INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XI · ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1965

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny
PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz
JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1,
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 710 (577 + 133)	Oddano do składania 19.XII.1964 r.
Ark. wyd. 19,0, ark. druk. 18,5	Podpisano do druku w marcu 1965 r.
Papier druk sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w marcu 1965 r.
Zamówienie nr 1889/64	Cena zł 25,— E-43

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

621.316.91

ANDRZEJ WISZNIEWSKI

Zastosowanie teorii składowych symetrycznych do obliczeń szczególnych przypadków zwarciowych

Rękopis dostarczono 28.9.1963

W artykule omówiono zmodyfikowane schematy zastępcze dla składowych symetrycznych, przystosowane szczególnie do obliczeń prądów powstałych przy zwarciach wewnętrznych w urządzeniach elektrycznych. Schematy te są przystosowane do obliczeń zwarć w układach łączonych zarówno w gwiazdę, jak i w trójkąt. Omówiono ponadto specyfikę postępowania w przypadku, gdy zwarcia mają miejsce w urządzeniach posiadających więź magnetyczną.

1. WSTĘP

Znajomość prądów powstałych przy zwarciach w różnych punktach systemu energetycznego jest niezbędna dla prawidłowego zaprojektowania elementów oraz wyposażenia tego systemu. Wydaje się jednak, że najdokładniejsze i najbardziej różnorodne informacje dotyczące wartości prądów zwarciowych wymagane są przez specjalistów zajmujących się techniką zabezpieczeń elektroenergetycznych. O ile bowiem inne działy energetyki potrzebują najczęściej informacji co do największych prądów powstałych przy zwarciu w danym elemencie systemu, technika zabezpieczeń dla właściwego doboru przekaźników ochronnych wymaga także znajomości najniższych wartości prądów występujących przy zwarciach w danym zabezpieczonym urządzeniu.

I tak w przypadku np. transformatorów energetycznych, dla doboru aparatury wysokonapięciowej lub określenia zagadnień równowagi wystarczy znać prądy powstałe przy zwarciu na zaciskach poszczególnych uzwojeń transformatora. Dla potrzeb techniki zabezpieczeń obok tych danych należałoby jeszcze znać prąd zwarciowy najtrudniej wykrywany przez zabezpieczenia, a więc prąd zwarcia jednego zwoju uzwojenia odbiorczego, najbardziej oddalonego od uzwojenia zasilającego. Analogiczna sytuacja występuje przy doborze zabezpieczeń maszyn wirujących, gdzie także należy z możliwych prądów zwarciowych znać więcej niż tylko te, które występują przy zwarciu zacisków wyjściowych. Powyższe rozważania wyjaśniają, dlaczego specjaliści techniki zabezpieczeń zainteresowani są opracowaniem metod obliczeń prądów zwarcio-

wych w przypadkach innych niż te, które w obecnej praktyce najczęściej są stosowane. Stąd więc coraz więcej publikacji ukazujących się na ten temat, zajmujących się na ogół metodyką określenia prądów zwarciowych przy zwarciach wewnętrznych w poszczególnych typach aparatury (generatory, silniki, transformatory) [2], [3], [5], [6].

Wspólną cechą większości tych publikacji jest oparcie obliczeń o teorię składowych symetrycznych. Bezsporne zalety stosowania przy obliczeniach tej teorii są w porównaniu z metodą obliczeń w schemacie trójfazowym następujące:

1. Dotychczas nie opracowano trójfazowego schematu zastępczego adekwatnego systemowi rzeczywistemu dla przypadku, gdy uwzględnia się, iż maszyny wirujące posiadają różną oporność dla składowej zgodnej i przeciwnej.

2. Zastosowanie teorii składowych symetrycznych przeważnie upraszcza obliczenia, zastępując obwody trójfazowe jednofazowymi.

3. Wyniki obliczeń podane w postaci składowych symetrycznych prądów i napięć są najczęściej najwygodniejszą formą do dalszego ich opracowania pod kątem przydatności dla potrzeb techniki zabezpieczeń.

Schematy zastępcze dla składowych symetrycznych wykorzystują pewne założenia upraszczające:

1. Założenie liniowości wszystkich elementów schematu zastępczego. Jest to założenie podstawowe dla całej teorii składowych symetrycznych.

2. Założenie symetrii *SEM* w stanie przedzwarciowym.

3. Założenie symetrii oporności w stanie przedzwarciowym.

Stosując schematy zastępcze dla składowych symetrycznych można obliczać prądy albo zakładając jako znane siły elektromotoryczne źródeł zasilania, albo stosując twierdzenie Thevenina zakładające w obliczeniach znajomość napięcia w miejscu powstania zwarcia oraz prądów płynących w systemie przed powstaniem zakłócenia, a więc tzw. prądów obciążenia wstępnego. Wydaje się, że w praktyce najczęściej dane wyjściowe przystosowane są do tego drugiego sposobu obliczeń. W większości przypadków bowiem jest znany poziom napięcia roboczego w miejscu, w którym zwarcie liczymy, oraz granice zmienności prądów obciążenia wstępnego. Dalsze rozważania tego artykułu są zatem oparte o ten właśnie sposób rozwiązania schematów zastępczych.

Stosowanie powszechnie znanych schematów do obliczeń składowych symetrycznych prądów napotyka w niektórych przypadkach zwarciowych na pewne trudności:

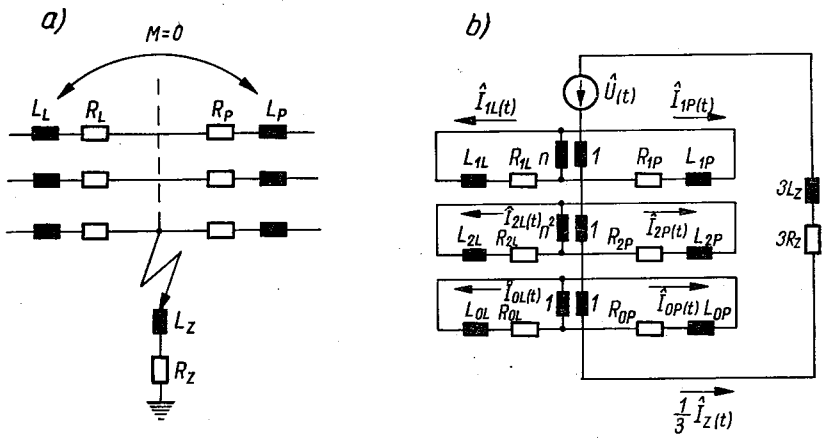
1) komplikuje obliczenia w przypadku zwarć między punktami, których odpowiednie napięcia fazowe różniły się od siebie; przypadek taki ma miejsce przy obliczaniu np. zwarć wewnętrznych w maszynach elektrycznych lub transformatorach.

2) uniemożliwia stosowanie metody składowych symetrycznych dla przypadku, gdy oporności włączone między zwarte punkty, a nazywane opornościami przejścia, są nieliniowe.

W niniejszym artykule dokonuje się takiej modyfikacji powszechnie znanych schematów, aby ww. trudności usunąć. Ponadto podaje się schematy zastępcze dla niektórych skomplikowanych przypadków zwarciowych oraz dyskutuje obliczenie zwarć w schematach magnetycznie sprzężonych.

2. ZWARCIE W ELEMENTACH POZBAWIONYCH SPRZĘŻEŃ MAGNETYCZNYCH

W celu wyjaśnienia zasad modyfikacji znanych schematów zastępczych rozpatrywać się będzie schematy elementów nie sprzężonych magnetycznie, tzn. elementów, których dwie części powstałe z podziału przez miejsce zwarcia nie są ze sobą magnetycznie sprzężone. Pokazano to przykładowo na rys. 1a.



Rys. 1. a) Ilustracja zwarcia jednofazowego dla systemu nie sprzężonego magnetycznie. b) Schemat zastępczy dla składowych symetrycznych odpowiadający przypadkowi z rysunku 1a

Schematem wyjściowym dla rozwijanej dalej teorii jest znany z literatury [1] schemat zastępczy dla zwarcia jednofazowego (rys. 1a), obowiązujący zarówno dla stanu ustalonego, jak i przejściowego, pokazany na rys. 1b. Na rysunku tym oznaczono:

$\hat{U}_{(t)} = Ue^{j(\omega t+\psi)}$ — wartość chwilowa napięcia między punktami zwartymi wyrażona w postaci symbolicznej. Rzeczywista wartość chwilowa wynosi:

$$u = Re[\hat{U}_{(t)}];$$

n — liczba określająca przekładnię idealnych transformatorów i wynosząca:

— dla zwarcia fazy przyjętej za podstawową $n = 1$,
— dla zwarcia fazy opóźnionej o 120° $n = a = e^{j120°}$
— dla zwarcia fazy wyprzedzającej o 120° $n = a^2$;

$L_{1L}, L_{2L}, L_{0L}, R_{1L}, R_{2L}, R_{0L}$ — indukcyjności i oporności czynne dla składowych zgodnej, przeciwnej i zerowej, systemu leżącego na lewo od miejsca zwarcia;

$L_{1P}, L_{2P}, L_{0P}, R_{1P}, R_{2P}, R_{0P}$ — jak wyżej dla systemu na prawo od miejsca zwarcia;

L_z, R_z — indukcyjność i oporność czynna włączone między zwarte punkty;

$\hat{I}_{(t)} = Ie^{j(\omega t+\gamma)}$ — wartość chwilowa prądu wyrażona w postaci symbolicznej, tzn. $i = Re[\hat{I}_{(t)}]$. Rozważania dopuszczają przypadek, dla którego: $I = f(t)$, gdzie $f(t)$ — dowolna funkcja czasu.

Schemat ten posiada następujące cechy z punktu widzenia rozwijanej teorii:

1. Napięciem wymuszającym przepływ prądu jest bezpośrednio napięcie między punktami zwartymi w chwili poprzedzającej zwarcie, bez względu na to, która z faz jest zwarta.

2. Istnieje obwód, w który włączona jest trzykrotna wartość oporności i indukcyjności przejścia, a w którym płynie prąd proporcjonalny $\left(\text{ze współczynnikiem } \frac{1}{3}\right)$ do prądu zwarciowego.

Zachodzi pytanie, czy można stosować ten schemat dla przypadku, gdy niektóre jego elementy są nieliniowe?

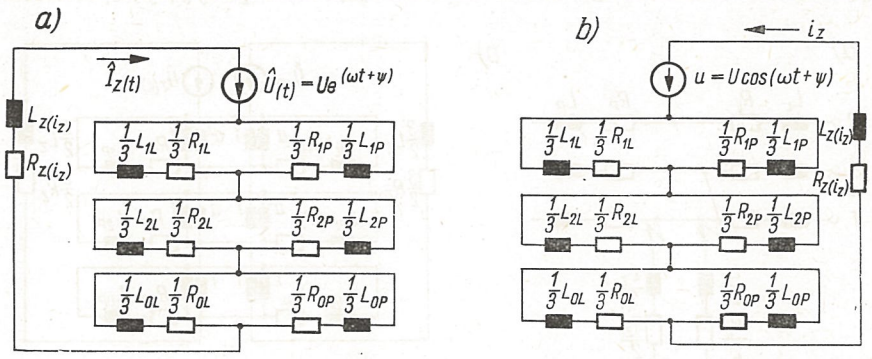
Nietrudno zauważyć, że w schemacie zastępczym istnieje tylko jeden obwód, w którym rzeczywisty rozpływ prądu nie jest zastąpiony superpozycją prądów składowych. Obwodem tym jest obwód, w którym włączone są oporność i indukcyjność przejścia, w którym napięciem jest rzeczywiste napięcie wywołujące w systemie przepływ prądu zwarciowego, zaś prądem — rzeczywisty prąd zwarciowy, mnożony przez współczynnik 1/3. Przez oporność i indukcyjność przejścia, a ściśle biorąc przez ich potrójne wartości przepływa 1/3 rzeczywistego prądu zwarciowego i wywołuje na nich spadek napięcia taki, jaki ma miejsce w rzeczywistym systemie na oporności przejścia.

Przyjmijmy teraz, że R_z oraz L_z są funkcjami chwilowej wartości prądu, a więc:

$$R_z = f_1[Re(\hat{I}_{z(t)})],$$
$$L_z = f_2[Re(\hat{I}_{z(t)})].$$

Z punktu widzenia obwodu, w którym włączone są oporność i indukcyjność przejścia, schemat z rys. 1b może być przekształcony do postaci pokazanej na rys. 2a. Schemat ten z kolei pozwoli się przekształcić

w schemat dla wartości chwilowej rozumianej jako część rzeczywista z symbolicznej postaci wartości chwilowej. Schemat ten pokazano na rys. 2b. Jest to już zatem schemat zastępczy dla wartości chwilowych, w którym występujące oporności przejścia mogą być funkcjami płynącego przez nie prądu. Prąd ten może być w ogólnym przypadku nie-



Rys. 2. a) Schemat z rysunku 1b po wyeliminowaniu idealnych transformatorków, b) Schemat zastępczy dla określenia chwilowych wartości prądu przy zwarciu jednofazowym przy przyjęciu nieliniowych oporności i indukcyjności przejścia

okresowy (szczególnie, jeśli rozważać także stany przejściowe takiego układu). Sprawą odrębną jest wyrachowanie w poszczególnych przypadkach wartości prądu i_z przy zadanej nieliniowości elementów L_z oraz R_z. Zadanie to może okazać się bardzo trudne lub nawet analitycznie nierozwiązalne. Metodyka takich obliczeń jest opisana w literaturze [4] i nie będzie omawiana w niniejszym artykule.

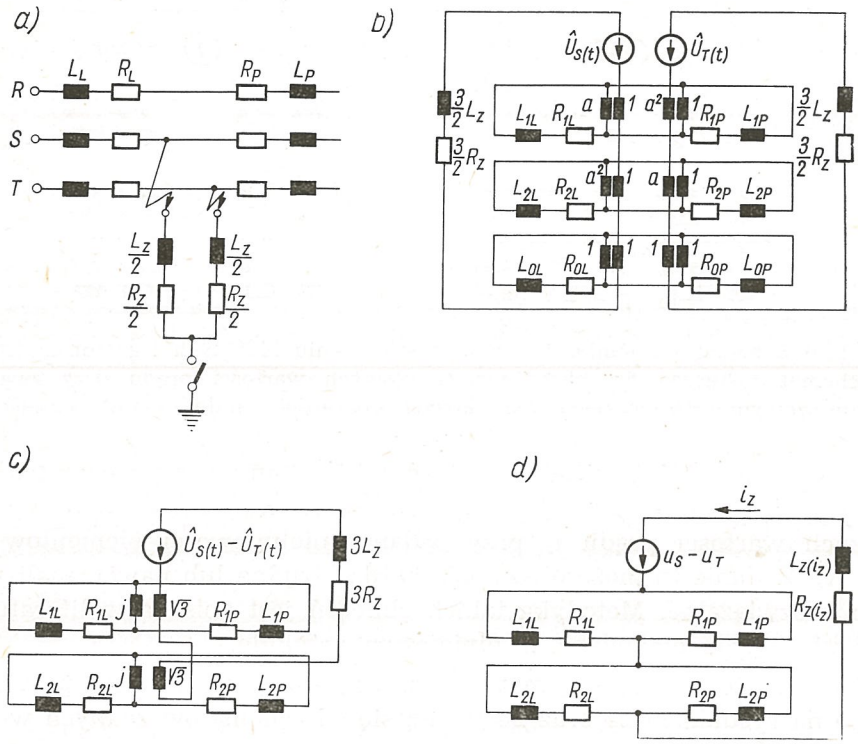
Ostatecznie zatem, schemat z rys. 1b oraz jego postacie przedstawione na rysunkach 2a oraz 2b różnią się od schematów znanych w publikacjach [1] tym, że:

1) dopuszczają występowanie nieliniowych oporności przejścia,

2) nie wymagają założenia symetrii napięciowej w stanie przedzwarciowym.

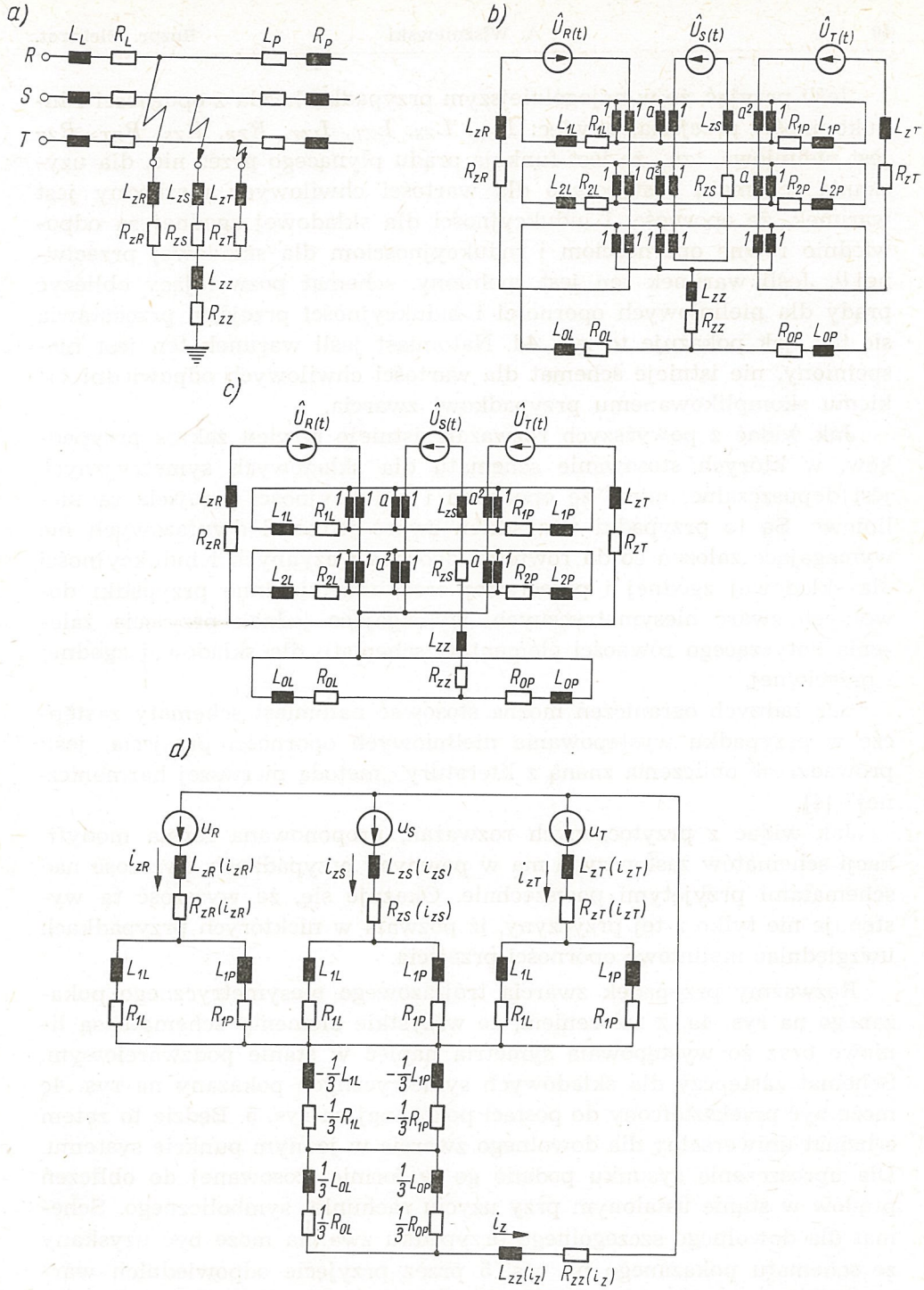
Jak widać zatem, trudności wynikające przy stosowaniu schematów zastępczych dla składowych symetrycznych, w celu obliczenia niektórych szczególnych przypadków zwarciowych, omówionych na wstępie, są dla zwarcia jednofazowego przy przyjęciu omawianej metodyki postępowania usunięte. Z tego względu schemat zastępczy dla zwarcia jednofazowego będzie traktowany jako wyjściowy przy określaniu schematów zastępczych dla pozostałych zwarć niesymetrycznych. Innymi słowy, każde zwarcie zostanie rozpatrywane jako nałożenie na siebie pewnej ilości zwarć jednofazowych. Przykładem może służyć zwarcie dwufazowe faz S, T przy przyjęciu fazy R za podstawową. Schemat zwarcia oraz kolejne etapy powstawania schematu zastępczego pokazane są na

rys. 3a, b, c. Przekształceń dokonuje się drogą eliminacji transformatorków idealnych o przekładni 1/1 oraz nakładania na siebie transformatorków o przekładni a oraz a^2. Z kolei rys. 3d przedstawia schemat zastępczy dla wartości chwilowych, umożliwiający obliczenie prądu zwarciowego w przypadku, gdy L_z oraz R_z są funkcjami prądu. I w tym przypadku zatem niedogodności konwencjonalnie przyjętych schematów



Rys. 3. a) Ilustracja zwarcia dwufazowego. b) Schemat zastępczy dla zwarcia dwufazowego jako nałożenie dwu zwarć jednofazowych. c) Przekształcony schemat zastępczy dla zwarcia dwufazowego. d) Schemat zastępczy dla obliczenia chwilowej wartości prądu przy zwarciu dwufazowym przy przyjęciu nieliniowych oporności przejścia

są zlikwidowane. Zarówno warunek symetrii napięciowej, jak i liniowości oporności przejścia nie musi być spełniony, aby móc stosować proponowaną postać schematów. Omówione wyżej przypadki zwarć należały do zwarć najprostszych. Spróbujmy teraz rozważyć przypadek skomplikowanego zwarcia trójfazowego przez trzy różne oporności przejścia, pokazanego na rys. 4a. Schemat zastępczy dla składowych symetrycznych chwilowych wartości prądu, przedstawionych w postaci symbolicznej, pokazany jest na rys. 4b. Po uproszczeniu na skutek wyeliminowania transformatorków o przekładni 1/1 schemat ten uzyska postać pokazaną na rysunku 4c.



Rys. 4. a) Ilustracja zwarcia trójfazowego niesymetrycznego. b) Schemat zastępczy dla zwarcia z rysunku 6a — postać pierwotna. c) Schemat zastępczy dla zwarcia z rysunku 6a — postać uproszczona. d) Schemat zastępczy dla zwarcia z rysunku 4a przy przyjęciu nieliniowych oporności przejścia oraz założeniu równości oporności i indukcyjności dla składowych zgodnej i przeciwnej

Jeśli przyjąć, że w najogólniejszym przypadku każda z oporności i indukcyjności przejścia, a więc: L_{ZR}, L_{ZS}, L_{ZT}, L_{ZZ}, R_{ZR}, R_{ZS}, R_{ZT}, R_{ZZ} jest nieliniowa, tzn., że jest funkcją prądu płynącego przez nie, dla uzyskania schematu zastępczego dla wartości chwilowych niezbędny jest warunek, że oporności i indukcyjności dla składowej zgodnej są odpowiednio równe opornościom i indukcyjnościom dla składowej przeciwnej [1]. Jeśli warunek ten jest spełniony, schemat pozwalający obliczyć prądy dla nieliniowych oporności i indukcyjności przejścia przedstawia się tak, jak pokazuje to rys. 4d. Natomiast jeśli warunek ten jest niespełniony, nie istnieje schemat dla wartości chwilowych odpowiedni takiemu skomplikowanemu przypadkowi zwarcia.

Jak widać z powyższych rozważań, istnieje pewien zakres przypadków, w których stosowanie schematu dla składowych symetrycznych jest dopuszczalne, mimo że oporności i indukcyjności przejścia są nieliniowe. Są to przypadki wszystkich zwarć jedno- i dwufazowych nie wymagające założeń co do równości oporności czynnych i indukcyjności dla składowej zgodnej i przeciwnej oraz wszelkie inne przypadki dowolnych zwarć niesymetrycznych, wymagające jednak przyjęcia założenia dotyczącego równości elementów schematu dla składowej zgodnej i przeciwnej.

Bez żadnych ograniczeń można stosować natomiast schematy zastępcze w przypadku występowania nieliniowych oporności przejścia, jeśli prowadzi się obliczenia znaną z literatury „metodą pierwszej harmonicznej" [4].

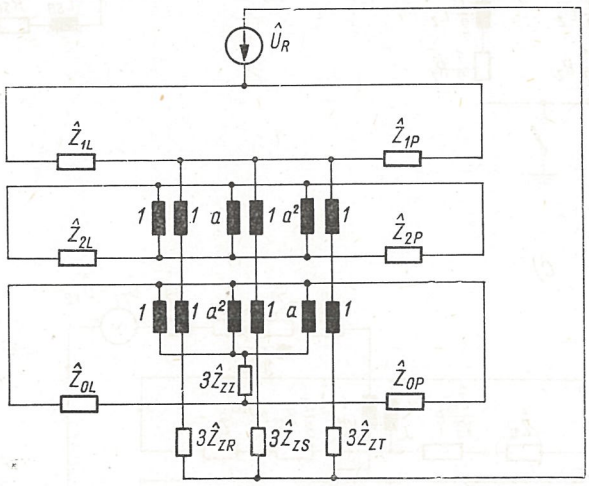
Jak widać z przytoczonych rozważań, proponowana forma modyfikacji schematów zastępczych ma w pewnych przypadkach wyższość nad schematami przyjętymi powszechnie. Okazuje się, że wyższość ta występuje nie tylko z tej przyczyny, iż pozwala w niektórych przypadkach uwzględniać nieliniowe oporności przejścia.

Rozważmy przypadek zwarcia trójfazowego niesymetrycznego pokazanego na rys. 4a, z założeniem, że wszystkie elementy schematu są liniowe oraz że występowała symetria napięć w stanie podzwarciowym. Schemat zastępczy dla składowych symetrycznych pokazany na rys. 4c może być przekształcony do postaci pokazanej na rys. 5. Będzie to zatem schemat uniwersalny dla dowolnego zwarcia w jednym punkcie systemu. Dla uproszczenia rysunku podano go w formie stosowanej do obliczeń prądów w stanie ustalonym przy użyciu rachunku symbolicznego. Schemat dla dowolnego szczególnego przypadku zwarcia może być uzyskany ze schematu pokazanego na rys. 5 przez przyjęcie odpowiednich wartości na dane oporności przejścia. Na przykład dla zwarcia jednofazowe-

[1] Jeśli obliczać prąd zwarciowy dla pierwszych chwil po powstaniu zaburzenia, warunek ten można uważać za spełniony z dość znaczną dokładnością.

go fazy R przez oporność R_{ZR} oraz indukcyjność L_{ZR} uzyska się schemat z układu pokazanego na rys. 5, jeśli przyjąć $R_{ZS} = \infty$, $R_{ZT} = \infty$; $L_{ZZ} = 0$; $R_{ZZ} = 0$.

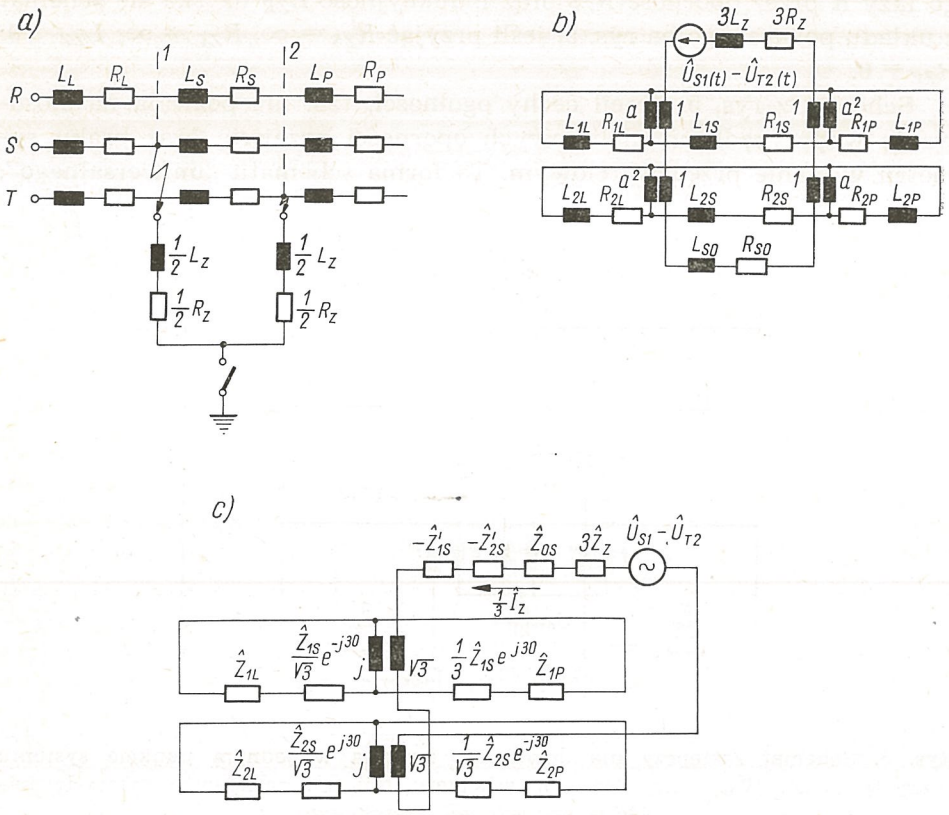
Schemat z rys. 5 stracił cechy ogólności, tzn. nie pozwala na stosowanie w przypadkach nieliniowych oporności przejścia oraz braku symetrii w stanie przedzwarciowym. Ta forma schematu „uniwersalnego",



Rys. 5. Schemat zastępczy dla dowolnego zwarcia w jednym punkcie systemu energetycznego. Wszystkie elementy schematu liniowe, zachowana symetria napięć w stanie przedzwarciowym

jaka pokazana jest na rys. 5, jest jednak korzystna z punktu widzenia obliczeniowego i wydaje się być wygodniejsza w stosowaniu niż znane w literaturze [1] schematy tego typu.

Z kolei rozpatrzmy przypadek zwarcia dwufazowego, dwupunktowego, pokazanego schematycznie na rys. 6a. Zgodnie z przyjętą metodą rozpatrywania tego przypadku jako nałożenia na siebie dwu zwarć jednofazowych w punktach 1 oraz 2, schemat zastępczy dla składowych symetrycznych przedstawia się tak, jak pokazano na rys. 6b. Schemat ten można by zastąpić schematem dla wartości chwilowych prądu, pozwalającym na dokonywanie obliczeń przy nieliniowych opornościach przejścia tylko w zupełnie szczególnym przypadku równości nie tylko parametrów schematów dla składowych przeciwnej i zgodnej, lecz także równości oporności i indukcyjności leżących na lewo od punktu 1 oraz na prawo od punktu 2. W ogólnym przypadku schemat z rys. 6b nie dopuszcza przyjęcia nieliniowości oporności przejścia, natomiast pozwala obliczać rozpływy prądów zwarciowych bez potrzeby założenia symetrii napięciowej w stanie przedzwarciowym. Ostatecznie schemat z rys. 6b może zostać przekształcony do postaci pokazanej na rys. 6c.



Rys. 6. a) Ilustracja zwarcia dwufazowego dwupunktowego. b) Schemat zastępczy dla zwarcia dwufazowego dwupunktowego. c) Przekształcona postać schematu dla zwarcia dwufazowego dwupunktowego

Dla uproszczenia schemat ten jest przedstawiony w formie symbolicznej, przystosowanej do obliczeń wartości ustalonych prądów. Występujące w tym schemacie oporności $\hat{Z}'_{1S}$ oraz $\hat{Z}'_{2S}$ wynoszą odpowiednio

$$\hat{Z}'_{1S} = \frac{\hat{Z}_{1S}\left[\hat{Z}_{1S} + \hat{Z}_{1L}\frac{1-a^2}{1-a} + \hat{Z}_{1P}\frac{1-a}{1-a^2}\right]}{\hat{Z}_{1S} + \hat{Z}_{1L} + \hat{Z}_{1P}},$$

$$\hat{Z}'_{2S} = \frac{\hat{Z}_{2S}\left[\hat{Z}_{2S} + \hat{Z}_{2L}\frac{1-a}{1-a^2} + \hat{Z}_{2P}\frac{1-a^2}{1-a}\right]}{\hat{Z}_{2S} + \hat{Z}_{2L} + \hat{Z}_{2P}},$$

gdzie:

$\hat{Z}_{1S}$; $\hat{Z}_{2S}$; $\hat{Z}_{0S}$ — symboliczna postać oporności dla składowych zgodnej, przeciwnej oraz zerowej, leżących między punktami zwarcia.

Na podstawie schematu z rys. 6c można obliczyć bezpośrednio prądy poszczególnych składowych na lewo od punktu 1 oraz na prawo od punktu 2. Dla określenia natomiast prądu między punktami zwarcia należy skorzystać z zależności:

$$\hat{I}_0 = \frac{1}{3}\hat{I}_z,$$

$$\hat{I}_{1S} = \hat{I}_{1L} - \frac{a}{3}\hat{I}_z,$$

$$\hat{I}_{2S} = \hat{I}_{2L} - \frac{a^2}{3}\hat{I}_z.$$

W powyższych rozważaniach modyfikujących nieco schematy zastępcze dla składowych symetrycznych, stosowane przy obliczeniach prądów zwarciowych, stosowano metodę rozpatrywania każdego przypadku zwarciowego jako nałożenie na siebie pewnej liczby zwarć jednofazowych. Ten sposób pozwalał na rozszerzanie w pewnych przypadkach zakresu stosowalności schematów dla składowych symetrycznych na zwarcia przez nieliniowe oporności przejścia oraz dawał pewne korzyści obliczeniowe w przypadkach konwencjonalnych oraz w przypadkach zwarć dwupunktowych. To ostatnie ma szczególne znaczenie przy analizie zwarć wewnętrznych w maszynach elektrycznych i transformatorach.

Proponowane schematy są szczególnie wygodne w obliczeniach, gdy w przypadku nieliniowych oporności przejścia prowadzi się rachunki „metodą pierwszej harmonicznej".

3. ZWARCIA W UKŁADACH POŁĄCZONYCH W TRÓJKĄT

Pewnym szczególnym przypadkiem zwarć w systemach energetycznych będzie zwarcie w układzie łączonym w trójkąt. Przypadek takiego zwarcia nasuwa czasem pewne trudności obliczeniowe, dlatego metodyka postępowania przy otrzymywaniu schematu zastępczego dla składowych symetrycznych zostanie poniżej wyjaśniona. Metoda postępowania opiera się na zastąpieniu każdego zwarcia nałożeniem na siebie pewnej ilości zwarć jednofazowych, jak to było opisane w rozdziale 2. Schematy przedstawione niżej są już jednak schematami wyrażonymi w wartościach symbolicznych, a więc zawężających rozważane przypadki do obliczeń stanów ustalonych przy liniowości wszystkich elementów schematu[1]).

Niech zatem dany będzie trójkąt pokazany na rys. 7a z dowolnym zwarciem wewnętrznym w miejscu K. Zadaniem jest określenie schema-

[1]) Uzyskanie schematu dla określenia prądów w stanach przejściowych wymaga tylko zapisu schematu nie w postaci symbolicznej, lecz operatorowej, natomiast uwzględnienie nieliniowości oporności przejścia jest możliwe w tym przypadku tylko przy zastosowaniu uproszczeń, np. takich, jak obliczeń „metodą pierwszej harmonicznej".

tu zastępczego dla składowych symetrycznych z punktu widzenia trójkąta. Zgodnie z naniesionym na rys. 7a rozpływem prądów można na rysunku wyróżnić trzy obszary o różnych prądach.

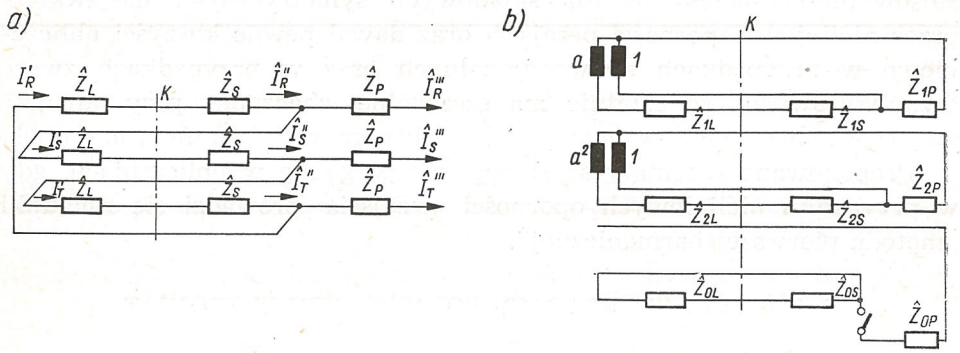
Pierwszy na lewo od miejsca zwarcia, w którym płyną prądy, oznaczono $\hat{I}'_R$, $\hat{I}'_S$, $\hat{I}'_T$.

Drugi między miejscem zwarcia a zaciskami trójkąta, w którym płyną prądy $\hat{I}''_R$, $\hat{I}''_S$, $\hat{I}''_T$.

Trzeci na prawo od zacisków trójkąta z prądami oznaczonymi $\hat{I}'''_R$, $\hat{I}'''_S$, $\hat{I}'''_T$.

Rozkładając prądy fazowe na składowe symetryczne, otrzymuje się następujące równania:

$$\hat{I}'''_{R1} = \hat{I}''_{R1} - \hat{I}'_{S1},$$
$$\hat{I}'''_{R2} = \hat{I}''_{R2} - \hat{I}'_{S2},$$
$$\hat{I}'''_{R0} = \hat{I}''_{R0} - \hat{I}'_{S0}.$$



Rys. 7. a) Ilustracja przypadków zwarciowych wewnątrz trójkąta. b) Schemat zastępczy dla przypadków zwarciowych wewnątrz trójkąta

Przyjmując fazę R za podstawową można równania te przekształcić do postaci:

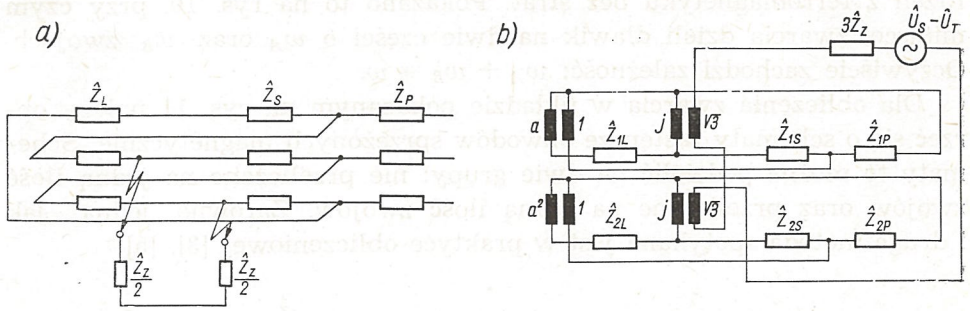
$$\hat{I}'''_1 = \hat{I}''_1 - a^2\hat{I}'_1,$$
$$\hat{I}'''_2 = \hat{I}''_2 - a\hat{I}'_2,$$
$$\hat{I}'''_0 = \hat{I}''_0 - \hat{I}'_0.$$

Równania te pozwalają określić schemat zastępczy dla składowych symetrycznych. Schemat ten dla dowolnego zwarcia w miejscu K (od rodzaju zwarcia zależyć będzie charakter sprzężeń między schematami dla poszczególnych składowych) pokazano na rys. 7b.

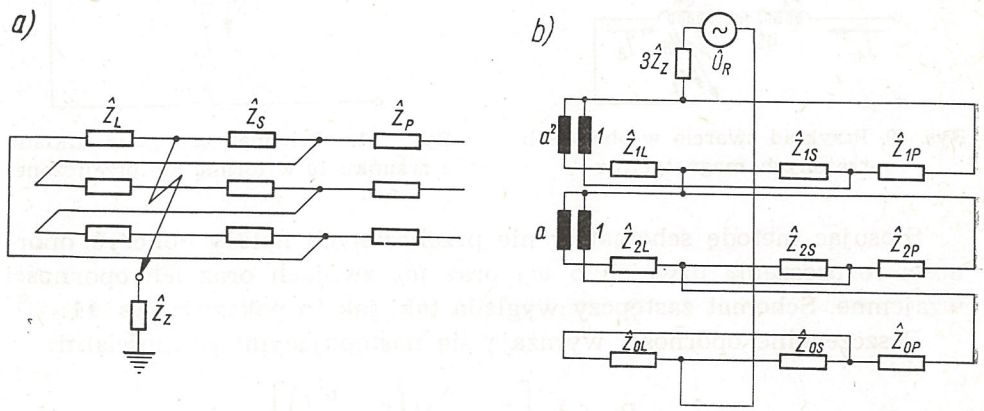
Dla ilustracji pokazano dwa szczególne przypadki zwarć w trójkącie. Na rysunkach 8a i 8b przedstawiono przypadek zwarcia między dwoma fazami i odpowiedni schemat zastępczy. Na rysunkach 9a i 9b pokazano

zwarcie jednej fazy do ziemi wraz z przynależnym mu schematem zastępczym.

Jak widać z przykładów, zwarcia wewnętrzne trójkąta oblicza się za pomocą schematów zastępczych tylko nieznacznie bardziej skomplikowanych od zwarć w systemie łączonym w gwiazdę.



Rys. 8. a) Ilustracja zwarcia dwupunktowego faz *S*, *T* wewnątrz trójkąta, b) Schemat zastępczy dla zwarcia z rysunku 8a



Rys. 9. a) Ilustracja zwarcia doziemnego fazy *R* wewnątrz trójkąta. b) Schemat zastępczy dla zwarcia z rysunku 9a

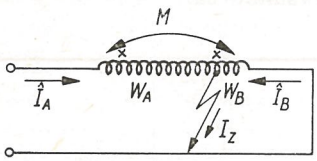
Wszystkie rozważane wyżej przypadki zwarć odnoszą się do urządzeń, w których nie istnieje sprzężenie magnetyczne między częściami systemu podzielonymi przez miejsce zwarcia. Dla analizy schematów zastępczych z punktu widzenia składowych symetrycznych założenie takie było słuszne, natomiast w praktyce obliczeniowej sprzężenia, o których mowa, trzeba często uwzględniać.

4. ZWARCIA W ELEMENTACH POSIADAJĄCYCH SPRZĘŻENIA MAGNETYCZNE

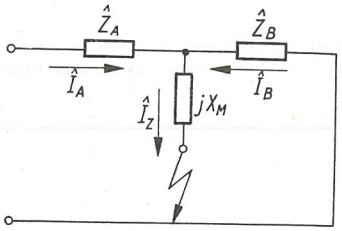
Duża część zwarć wewnętrznych w urządzeniach elektrycznych wymaga uwzględnienia sprzężeń. I tak np. wszelkie zwarcia wewnętrzne

w silnikach, generatorach czy transformatorach wymagają uwzględnienia sprzężeń wzajemnych między częściami uzwojenia podzielonymi przez miejsce zwarcia. Specyfiką tych przypadków jest silne sprzężenie poszczególnych części uzwojeń, dlatego ilustracją metody postępowania może być przypadek zwarcia dławika o „w" zwojach nawiniętych na rdzeń z ferromagnetyku bez strat. Pokazano to na rys. 10, przy czym miejsce zwarcia dzieli dławik na dwie części o w_A oraz w_B zwojach. Oczywiście zachodzi zależność: $w_A + w_B = w$.

Dla obliczenia zwarcia w układzie pokazanym na rys. 11 należy oprzeć się o schematy zastępcze obwodów sprzężonych magnetycznie. Schematy te można podzielić na dwie grupy: nie przeliczane na jedną ilość zwojów oraz przeliczane na jedną ilość zwojów. Zarówno jedna, jak i druga metoda spotykana jest w praktyce obliczeniowej [3], [5].



Rys. 10. Przykład zwarcia w obwodach sprzężonych magnetycznie



Rys. 11. Schemat zastępczy układu z rysunku 10 w formie nie przeliczonej

Stosując metodę schematów nie przeliczanych należy obliczyć oporności rozproszenia uzwojeń o w_A oraz w_B zwojach oraz ich oporności wzajemne. Schemat zastępczy wygląda tak, jak to pokazuje rys. 11.

Poszczególne oporności wyrażają się następującymi równościami:

$$\hat{Z}_A = R_A + j\omega\left[L_{rA} + M\left(1 + \frac{w_A}{w_B}\right)\right],$$

$$\hat{Z}_B = R_B + j\omega\left[L_{rB} + M\left(1 + \frac{w_B}{w_A}\right)\right],$$

$$jX_M = -j\omega M,$$

gdzie:

R_A, R_B — oporności czynne obydwu części uzwojenia,

L_{rA}, L_{rB} — indukcyjności rozproszenia poszczególnych części uzwojenia,

M — indukcyjność wzajemna pomiędzy dwiema częściami uzwojenia.

Stosując metodę schematów przeliczonych na określoną ilość zwojów korzysta się ze znanego w literaturze schematu zastępczego autotransformatora. Układ z rys. 10 można bowiem traktować jak autotrans-

formator ze zwartymi zaciskami niższego napięcia. Jako ilość zwojów, na którą układ będzie przeliczony, najwygodniej przyjąć $w_A + w_B = w$. Schemat zastępczy takiego układu pokazany jest na rys. 12. Na rysunku tym poszczególne oporności wyrażają się równaniami

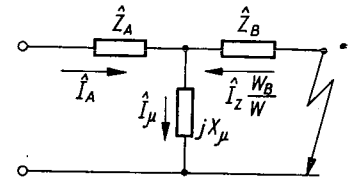
$$\hat{Z}'_A + \hat{Z}'_B = R_B \frac{w_A^2}{w_B^2} + R_A + j\omega L_r,$$

$$\hat{X}_\mu = j\omega L_\mu,$$

gdzie:

L_r — indukcyjność rozproszenia części A uzwojenia w stosunku do części B przeliczona na w_A zwojów,

L_μ — indukcyjność magnesowania liczona dla w zwojów.



Rys. 12. Schemat zastępczy układu z rysunku 10 w formie przeliczonej na w zwojów

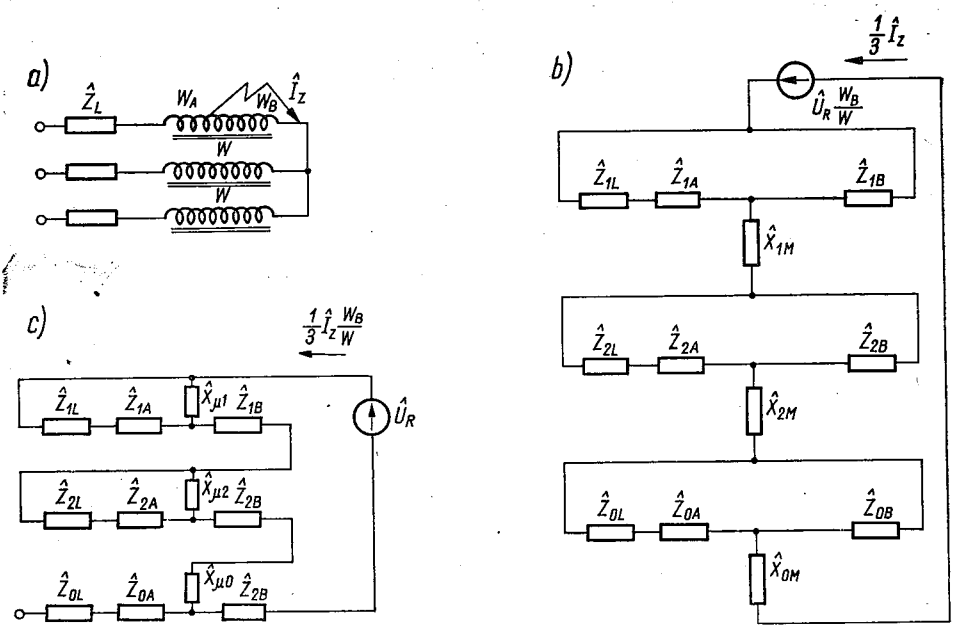
Dla porównania obydwu metod podaje się schematy zastępcze dla zwarcia w układzie trzech dławików pokazanego na rys. 13a. I tak na rys. 13b pokazano schemat nieprzeliczony, zaś na rys. 13c — przeliczony na jedną ilość zwojów.

Jak widać z przytoczonych przykładów, w oparciu o obydwie metody można skonstruować schemat zastępczy dla zwarć niesymetrycznych. W dotychczasowej praktyce wybór metod obliczeniowych zależał nie tyle od korzyści schematowych płynących z poszczególnych rozwiązań, lecz od tego, w jakiej postaci dla danego urządzenia zwykło się obliczać i przedstawiać parametry schematów zastępczych. I tak, dla maszyn wirujących najczęściej spotyka się metodę schematów nieprzeliczonych, bowiem właśnie tam oporności podaje się w postaci indukcyjności rozproszenia dla poszczególnych części uzwojeń oraz indukcyjności wzajemnych. Z kolei dla transformatorów stosuje się prawie wyłącznie schematy przeliczone, bowiem w tym przypadku oporność podawana jest z reguły jako indukcyjność rozproszenia między częścią uzwojenia zwartego a jego pozostałą częścią.

Pomijając konwencje obliczeniowe, z punktu widzenia przydatności schematowej, raczej przewagę ma metoda schematów przeliczonych na określoną ilość zwojów. Co prawda ta postać schematów jest mniej „naturalna", odbiega kształtem od reprezentowanego obiektu, jednak posiada cały szereg zalet w porównaniu z drugą możliwością.

Po pierwsze, nie posiada w schemacie elementów o dużych wartościach ujemnych oporności biernych ($-j\omega M$), co umożliwia w wielu przypadkach modelowanie na analizatorze.

Po drugie, w prosty sposób pozwala się uprościć dla przypadków, gdy $|\hat{X}_\mu| \gg |\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2|$, przez pominięcie gałęzi, w którą włączone są indukcyjności magnesowania.



Rys. 13. a) Ilustracja zwarcia zwojowego w fazie R zespołu dławików. b) Schemat zastępczy zwarcia z rysunku 13a w formie nie przeliczonej. c) Schemat zastępczy zwarcia z rysunku 13a przeliczony na w zwojów

Po trzecie, w schemacie zastępczym występują niewielkie wartości indukcyjności, co pozwala uniknąć znacznych błędów przy liczeniu suwakowym, wymagającym z konieczności zaokrąglania liczb do pierwszych trzech cyfr znaczących.

W praktycznych obliczeniach zatem, szczególnie tam, gdzie oporności wzajemne są bardzo duże, celowe jest obliczać przypadki zwarciowe w oparciu o schematy przeliczane.

5. ZAKOŃCZENIE

Podsumowując rozważania zawarte w powyższych czterech rozdziałach należy stwierdzić, że:

1. Dla potrzeb właściwego doboru zabezpieczeń elektroenergetycznych należy znać wartości prądów powstałych przy bardzo złożonych niejednokrotnie zwarciach wewnętrznych w poszczególnych urządzeniach elektrycznych.

2. W niektórych przypadkach zwarciowych korzystne jest zmodyfikowanie znanych w literaturze schematów zastępczych, na drodze roz-

patrywania każdego rodzaju zwarcia jako nałożenia na siebie pewnej ilości zwarć jednofazowych. Pozwala to w niektórych przypadkach na stosowanie schematów zastępczych dla składowych symetrycznych przy nieliniowych opornościach przejścia, pozwala zrezygnować z założenia symetrii *SEM* w stanie przedzwarciowym, wreszcie daje najprostsze schematy w przypadku zwarć dwupunktowych.

3. Schematy zastępcze dla zwarć wewnętrznych w układach połączonych w trójkąt wymagają uwzględnienia specyfiki tego połączenia, co w efekcie nieznacznie komplikuje schemat zastępczy.

4. W przypadkach obliczenia zwarć wewnętrznych w maszynach wirujących i transformatorach niezbędne jest uwzględnienie sprzężeń między poszczególnymi częściami uzwojenia. Sprzężenie takie można zastąpić w schematach zastępczych w oparciu o układy nieprzeliczone lub przeliczone na jedną ilość zwojów.

4. Dla zwarć, w których sprzężenia są silne, wygodniejsze są schematy uzyskiwane w oparciu o metodę przeliczania na jedną ilość zwojów.

Politechnika Wrocławska
Katedra Zabezpieczeń i Automatyki w Energetyce

WYKAZ LITERATURY

1. Atabiekow G. J.: Tieoreticzeskije osnowy rielejnoj zaszczity wysokowoltnych sietiej. Goseniergoizdat 1957.
2. Dombrowskij W. W.: Wnutriennyje korotkoje zamykanja w obmotkie statora dwuchpoliusnogo gienieratora. Izw. W. U. Z. „Elektromiechanika" nr 9, 1960.
3. Klingshorn E. A., Moore H. R., Wentz E. C.: Detection of Faults in Power Transformers. — AIEE Transactions, Part III, 1957, str. 87.
4. Nowacki P. J.: Obliczanie nieliniowych obwodów elektrycznych i magnetycznych. PWN, Warszawa 1959.
5. Pytel J.: Analiza przebiegów zwarciowych w silnikach indukcyjnych. (Praca doktorska). Wrocław 1963.
6. Schmidt P. A.: Calculation of Fault Currents for Internal Faults in A — C Motors. — AIEE Transactions, Part III, 1956, str. 818.

A. WISZNIEWSKI

APPLICATION OF SYMMETRICAL COMPONENTS THEORY FOR CALCULATION OF SPECIFIC CASES OF FAULTS

Summary

The purpose of this paper is to describe the modified equivalent schemes for symmetrical components, especially convenient for calculation of the fault currents caused by short circuits in electrical equipments. These schemes are prepared for faults in the equipments star connected as well as delta connected.

The possibility of application of the symmetrical components for faults with non linear resistance (or reactance) between short circuited points is discussed. The special behaviour in the cases, when faulty equipment has the magnetic linkage is described.

A. WISZNIEWSKI

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES COMPOSANTES SYMMÉTRIQUES AU CALCUL DES CAS PARTICULIERS DE COURT-CIRCUIT

Résumé

Dans l'article on a analysé des schémas équivalents modifiés en cas des composantes symmétriques, adaptés surtout au calcul des courants résultant des court-circuits intérieurs dans les installations électriques. Les schémas ci-dessus sont adaptés au calcul des court-circuits en cas des liaisons en étoile ainsi qu'en triangle. On a décrit encore la singularité du procédé, quand les court-circuits se forment dans les installations ayant une liaison magnétique.

A. WISZNIEWSKI

ANWENDUNG DER THEORIE SYMMETRISCHER KOMPONENTEN ZUR BERECHNUNG KOMPLIZIERTER KURZSCHLÜSSE

Zusammenfassung

Im Aufsatz werden modifizierte Ersatzschemen für symmetrischer Komponenten in Anwendung zur Berechnung von Strömen besprochen, die bei Kurzschlüssen in elektrischen Anlagen entstehen. Die Schemen eignen sich sowohl zur Berechnung der Kurzschlüsse im Sternverbund als auch im Dreiechverbund. Ausserdem wird das spezifische Vorgehen bei Kurzschlüssen in Anlagen mit magnetischem verbund behandelt.

А. ВИШНЕВСКИ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПРИ РАСЧЕТЕ СЛОЖНЫХ СЛУЧАЕВ КОРОТКИХ ЗАМЫКАНИЙ

Резюме

В статье обсуждено видоизмененные эквивалентные схемы для симметрических составляющих, приспособленные в особенности для расчета токов возникающих при коротких замыканиях в электрических устройствах.

Эти схемы приспособлены для расчета коротких замыканий в системах, соединенных как в звездочку, так и в треугольник.

Кроме того описана специфика действия в случае, когда короткие замыкания имеют место в устройствах с магнитной связью.

621.317.615 : 621.311

ZBIGNIEW ZIELIŃSKI

Przebiegi przejściowe zmian częstotliwości w układach elektroenergetycznych

Rękopis dostarczono 2.12.1963

W artykule podano wyprowadzone przez autora zależności określające przebiegi przejściowe zmian częstotliwości, związane z nagłym naruszeniem bilansu mocy czynnej w układach elektroenergetycznych. Wykazano, że przebiegi te mogą być określone funkcjami wykładniczymi lub wykładniczo-trygonometrycznymi. Stwierdzono, że analityczne ich wyznaczenie jest obarczone dość znacznym błędem.

W celu dokładnego określenia przebiegów przejściowych zmian częstotliwości wykonano w krajowym układzie elektroenergetycznym kilkanaście pomiarów, których wyniki zostały podane wraz z analizą.

Wykazano, że po zakończeniu zasadniczego procesu przejściowego zmian częstotliwości występują wtórne zmiany częstotliwości, wywołane zmianą parametrów pary, na skutek naruszenia bilansu cieplnego w elektrowniach.

1. WSTĘP

Przebiegi przejściowe zmian częstotliwości, związane z nagłym naruszeniem bilansu mocy czynnej w układach elektroenergetycznych, określane są zależnościami $\Delta f = \varphi(t)$ dla różnych wartości ΔP. Stanowią one ważny element, określający układy elektroenergetyczne zarówno dla celów badawczych, jak i eksploatacyjnych, ruchowych. Znajomość ich jest niezbędna przy obliczeniach i nastawieniach samoczynnego częstotliwościowego odciążenia, specjalnych układów zabezpieczeń i automatyki, reagujących bądź na częstotliwość sieci, bądź jej pochodne, jak również do prawidłowej analizy stanów zakłóceniowych, związanych z nagłym naruszeniem bilansu mocy czynnej w układach elektroenergetycznych.

Przebiegi przejściowe zmian częstotliwości, zwane również w części publikacji (głównie literatura radziecka) częstotliwościowymi charakterystykami dynamicznymi, są wywołane nagłym naruszeniem bilansu mocy czynnej, bez jednoczesnego, „zewnętrznego" naruszenia bilansu mocy biernej. Mogą one być wyznaczone w sposób analityczny lub pomiarowy.

Mimo zasadniczych korzyści, jakie daje metoda analityczna, polegających na możliwości określania przebiegów przejściowych zmian często-

tliwości w układach elektroenergetycznych bez przeprowadzania trudnych w realizacji pomiarów, możliwości badania wpływu poszczególnych parametrów na te przebiegi i określania charakteru ich przebiegu w różnych warunkach pracy układów elektroenergetycznych, dla uzyskania rzeczywistych przebiegów posługuje się metodą pomiarową. Bezpośredni pomiar, aczkolwiek również obarczony błędem, wynikającym z techniki pomiarowej, daje znacznie dokładniejsze wyniki i dlatego mimo trudności realizacyjnych dla konkretnych zastosowań bywa szeroko stosowany.

W artykule po bardzo krótkim omówieniu zależności dla analitycznego wyznaczenia przebiegów przejściowych zmian częstotliwości, potraktowanym szerzej w innych publikacjach [10], [13] m.i. autora [14] i wyciągnięciu zasadniczych wniosków, zestawiono wyniki kilkunastu przeprowadzonych pomiarów przebiegów przejściowych zmian częstotliwości w układach elektroenergetycznych oraz podano sposób ich przeprowadzenia wraz z oceną techniki i aparatury pomiarowej.

Badania przeprowadzono w krajowym układzie elektroenergetycznym i poszczególnych jego fragmentach.

2. ANALITYCZNE WYZNACZENIE PRZEBIEGÓW PRZEJŚCIOWYCH ZMIAN CZĘSTOTLIWOŚCI W UKŁADACH ELEKTROENERGETYCZNYCH

Traktując to zagadnienie w maksymalnym skrócie i zakładając, że w procesie przejściowym częstotliwość jest jednakowa we wszystkich punktach układu elektroenergetycznego (pominięcie częstotliwości lokalnych, wywołanych wpływem członów $\frac{d\delta_i}{dt}$ dla poszczególnych turbozespołów), zmiany częstotliwości można określić następującym równaniem wyjściowym

$$(\Sigma J_{Ti} + \Sigma J_{odb.i}) \frac{d\omega}{dt} = \Sigma \Delta M_{Ti} - \Sigma \Delta M_{odb.i} + \Delta M, \tag{1}$$

gdzie:

J_{Ti} — moment bezwładności i-tego turbozespołu,
$J_{odb.i}$ — moment bezwładności i-tego odbioru,
ω — prędkość kątowa ($\omega = 2\pi f$),
ΔM_{Ti} — przyrost momentu mechanicznego i-tego turbozespołu, wywołany wpływem zmiany prędkości kątowej na regulator turbiny,
$\Delta M_{odb.i}$ — przyrost momentu oporowego i-tego odbioru, wywołany zmianą prędkości kątowej,
ΔM — przyrost momentu, naruszający równowagę momentów w układzie elektroenergetycznym.

Określając poszczególne wyrażenia występujące w równaniu (1) funkcjami prędkości kątowej lub częstotliwości zgodnie z [14], po dokonaniu szeregu przekształceń otrzymuje się równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu o współczynnikach stałych

$$\frac{d^2 f_{\Delta}^*}{dt^2} + \left(\frac{1}{T_{s\Sigma}} + \frac{K_{1odb.\Sigma}}{T_{ukł}}\right)\frac{df_{\Delta}^*}{dt} + \frac{1}{T_{s\Sigma} T_{ukł} |s_{ukł}|} f_{\Delta}^* = \frac{1}{T_{s\Sigma} T_{ukł}} \cdot \frac{\Delta P}{P_{odb.\Sigma n}}, \quad (2)$$

gdzie:

$$f_{\Delta}^* = \frac{\Delta f}{f_n},$$

$T_{s\Sigma}$ — wypadkowa stała czasowa serwomotoru regulatora odśrodkowego zastępczego turbogeneratora,

$T_{ukł}$ — stała czasowa bezwładności mas wirujących układu elektroenergetycznego,

$K_{1odb.\Sigma}$ — współczynnik określający tzw. regulujący wpływ odbioru energetycznego,

$s_{ukł}$ — statyzm układu elektroenergetycznego $\left(s_{ukł} = \frac{\Delta f P_{odb.\Sigma n}}{\Delta P f_n}\right)$,

ΔP — przyrost mocy, naruszający bilans mocy czynnej w układzie elektroenergetycznym,

$P_{odb.\Sigma n}$ — suma mocy odbiorów w układzie elektoenergetycznym przy znamionowej częstotliwości.

Rozwiązując powyższe równanie przy pomocy tzw. równania charakterystycznego, znanego z teorii równań różniczkowych, otrzymuje się trzy typy rozwiązań w zależności od wartości pierwiastków równania charakterystycznego. Jedno z tych rozwiązań dla przypadku pierwiastka podwójnego nie ma praktycznego znaczenia, natomiast pozostałe występują dla wartości pierwiastków rzeczywistych lub zespolonych.

W przypadku pierwiastków rzeczywistych ($r_1 \neq r_2$) równania charakterystycznego, rozwiązanie ogólne równania różniczkowego (2) ma postać

$$f_{\Delta}^* = A_0 + A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}, \quad (3)$$

a w przypadku pierwiastków zespolonych

$$f_{\Delta}^* = A_0 + A e^{-\frac{\alpha}{2} t} \sin\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}\, t + \chi\right), \quad (4)$$

gdzie A_0, A_1, A_2, A, χ — współczynniki stałe rozwiązania ogólnego,

r_1, r_2 — pierwiastki równania charakterystycznego,

α — parametr zastępczy, równający się wyrażeniu występującemu w zal. (2) przy członie $\frac{df_{\Delta}^*}{dt}$,

β — parametr zastępczy, równający się wyrażeniu występującemu w zal. (2) przy członie f_{Δ}^*.

Jak wynika z podanych wyżej zależności, funkcja określająca przebieg zmian częstotliwości w czasie, w ogólnym przypadku może być za-

równo wykładnicza, jak i wykładniczo-trygonometryczna, opisująca w tym ostatnim przypadku ruch okresowy tłumiony.

Wyznaczając z warunków początkowych i końcowych współczynniki stałe równania ogólnego, po dokonaniu niezbędnych przekształceń otrzymuje się rozwiązania szczególne, w wyniku analizy których można stwierdzić, że w rzeczywistych układach elektroenergetycznych w realnych ich stanach pracy mogą występować zarówno rzeczywiste, jak i zespolone wartości pierwiastków równania charakterystycznego, a zatem wykładniczy i okresowy tłumiony przebieg zmian częstotliwości. Analityczne wykazanie możliwości istnienia różnego charakteru przebiegu przejściowego zmian częstotliwości, nawet w tych samych układach elektroenergetycznych, tłumaczy różny charakter przebiegu rzeczywistych charakterystyk, uzyskiwanych drogą pomiarową.

Rozwiązaniem szczególnym równania $\Delta f = \varphi(t)$ w przypadku istnienia pierwiastków rzeczywistych i różnych jest funkcja

$$\Delta f = s_{ukł} f_n \frac{\Delta P}{P_{odb.\Sigma n}} \left(1 - \frac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1 - \tau_2}\right), \tag{5}$$

gdzie:

$$\tau_1 = -\frac{1}{r_1}, \tag{6}$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{r_2}, \tag{7}$$

a

$$\Delta f_{ust} = s_{ukł} f_n \frac{\Delta P}{P_{odb.\Sigma n}}. \tag{8}$$

W przypadku pierwiastków zespolonych równania charakterystycznego

$$\Delta f = s_{ukł} f_n \frac{\Delta P}{P_{odb.\Sigma n}} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varkappa}} \frac{\sin(\varkappa t + \chi)}{\sin \chi}\right]. \tag{9}$$

Zależności dla poszczególnych wielkości występujących w równaniach (5) i (9) podano w poprzedniej pracy autora [14].

3. WNIOSKI Z WYPROWADZONYCH ZALEŻNOŚCI OKREŚLAJĄCYCH PRZEBIEGI PRZEJŚCIOWE ZMIAN CZĘSTOTLIWOŚCI W UKŁADACH ELEKTROENERGETYCZNYCH

Na podstawie analizy podanych zależności, przy uwzględnieniu rzeczywistych, typowych dla układów elektroenergetycznych wartości parametrów i wielkości wchodzących w rozpatrywane równania można stwierdzić, że w normalnych stanach pracy układów elektroenergetycznych mogą występować przebiegi przejściowe zmian częstotliwości określane funkcjami wykładniczymi i wykładniczo-trygonometrycznymi (prze-

biegi okresowe tłumione). Parametrem, który w zasadniczym stopniu wpływa na charakter przebiegu, jest wypadkowa stała czasowa serwomotoru regulatora odśrodkowego zastępczego turbogeneratora ($T_{s\Sigma}$) oraz statyzm układu ($s_{ukł}$). W układach elektroenergetycznych z przewagą elektrowni wodnych, ze względu na znaczne wartości stałej czasowej $T_{s\Sigma}$, przebieg przejściowy zmian częstotliwości bywa okresowy tłumiony do wyższych wartości statyzmu układu niż w układach elektroenergetycznych z przewagą elektrowni cieplnych. Ponadto przy niskich wartościach statyzmu układu (niżej 0,1—0,15) przebiegi zmian częstotliwości są z reguły okresowe tłumione, przy wysokich ($> 0{,}2$) — wykładnicze.

Tłumienie przebiegów, szczególnie okresowych, jest bardzo znaczne. Stała czasowa wynosi od ułamka do kilku sekund, co przy okresie funkcji rzędu 10 sek powoduje, że z reguły nie dochodzi nawet do pełnego okresu drgań, a poniżej osi określonej wartością Δf_{ust} przebieg jest już bardzo silnie stłumiony.

Dokładne zależności dla różnych wartości poszczególnych parametrów wyznaczono w [14].

Analityczne zależności, określające przebiegi przejściowe zmian częstotliwości posiadają zasadniczą zaletę, ponieważ pozwalają ocenić wpływ poszczególnych wielkości na te przebiegi oraz określić warunki limitujące charakter przebiegów.

Zasadniczą wadą tych zależności jest ich mała dokładność (odchylenia szacunkowo 20 do 30% w porównaniu z przebiegami rzeczywistymi).

Błąd, z jakim wyznacza się analitycznie przebiegi przejściowe zmian częstotliwości, wynika z przyjęcia uproszczonych zależności między poszczególnymi wielkościami oraz — przy dokonywaniu konkretnych obliczeń — z braku znajomości parametrów określających badany układ elektroenergetyczny w rozpatrywanym jego stanie pracy. Z tych względów, dla konkretnych potrzeb, gdy niezbędna jest dokładna znajomość przebiegów przejściowych zmian częstotliwości, posługuje się na ogół metodą pomiarową. Mimo błędów związanych z dokonywaniem pomiarów, wyznaczenie charakterystyk metodą pomiarową jest znacznie dokładniejsze i mimo trudności technicznych bywa szeroko stosowane.

4. WYZNACZENIE PRZEBIEGÓW PRZEJŚCIOWYCH ZMIAN CZĘSTOTLIWOŚCI PRZY POMOCY METODY POMIAROWEJ

Jak stwierdzono poprzednio, analityczne wyznaczenie przebiegów przejściowych zmian częstotliwości obarczone jest znacznym błędem. Dokładne przebiegi przejściowe zmian częstotliwości można uzyskać jedynie na drodze pomiarowej, wywołując przez nagłe, zaplanowane naruszenie bilansu mocy czynnej w układzie elektroenergetycznym zmianę częstotliwości i mierząc ją przy pomocy specjalnych przyrządów, przystosowanych do tego celu. Metoda ta daje bezpośrednio żądane wyniki

i jest najdokładniejszą spośród metod pomiarowych. Metody pomiarowe pośrednie, podane przez innych autorów [5], [7] są mniej dokładne i bardziej pracochłonne. Polegają one na sinusoidalnej zmianie mocy czynnej w układzie elektroenergtycznym przez okresowe otwieranie i zamykanie zaworów rgulacyjnych turbozespołów i jednoczesnym pomiarze mocy i odpowiedniego kąta fazowego. Przy pomocy tej metody, korzystając ze skomplikowanych zależności matematycznych, można wyznaczyć pośrednio przebieg przejściowy zmian częstotliwości. Metoda ta może być stosowana jednak tylko w małych układach elektroenergetycznych, jest bardzo uciążliwa i mniej dokładna od bezpośredniej.

Jeszcze inny sposób uzyskania przebiegów przejściowych zmian częstotliwości drogą pośrednią, podany w dużym uproszczeniu przez tych samych autorów [7], jest również skomplikowany i mniej dokładny od bezpośredniego pomiaru przebiegu przejściowego zmian częstotliwości. Jedyną zaletą metod pośrednich jest brak konieczności dokonywania wyłączeń turbozespołów pod obciążeniem, wyłączeń lub załączeń dużych odbiorów energetycznych, co ze względów technicznych i organizacyjnych jest trudne do zrealizowania.

Niedogodności te autor przy przeprowadzaniu pomiarów usunął przez dzielenie układu elektroenergetycznego na połączeniach sprzęgających, przy określonych, planowo wymuszonych rozpływach mocy, jednak i w tym przypadku pomiary związane są z trudnościami ruchowymi, wydzieleniem poszczególnych układów z całego układu elektroenergetycznego, często nieekonomiczną pracą poszczególnych turbozespołów lub całych elektrowni itp. Wynikają z tych powodów na ogół duże trudności w uzyskaniu możliwości dokonania pomiarów, jednak mimo tych trudności bezpośredni pomiar daje zasadnicze korzyści i w większości przypadków bywa stosowany.

Pomiary dla określenia przebiegów przejściowych zmian częstotliwości należy przeprowadzać w ustalonych warunkach pracy układów elektroenergetycznych, najlepiej w okresach, w których pobór mocy przez odbiory nie ulega szybkim zmianom.

Wartość mocy ΔP, o którą narusza się bilans mocy czynnej w układzie, powinna być przed pomiarem w przybliżeniu wyznaczona na podstawie orientacyjnych danych statyzmu układu w rozpatrywanym jego stanie pracy, dla uzyskania przewidywanych, żądanych odchyleń częstotliwości. Pomiary należy przeprowadzać przy załączonych regulatorach napięcia generatorów synchronicznych, w miarę możliwości przy najmniejszym, jednoczesnym naruszeniu bilansu mocy biernej. W przypadku istnienia regulacji częstotliwości w badanym układzie elektroenergetycznym, na czas pomiaru regulacja ta powinna być odstawiona z ruchu. Ze względu na rozpatrywanie jedynie częstotliwości średniej, punkt pomiaru częstotliwości jest w zasadzie dowolny, powinien być

jednak raczej elektrycznie odległy od szyn napięcia generatorowego elektrowni.

Pomiaru częstotliwości dokonuje się przy pomocy specjalnych dokładnych okresomierzy rejestrujących, o dużej szybkości posuwu taśmy (rzędu mm/sek), przy pomocy specjalnych układów pomiarowych, zamieniających częstotliwość na proporcjonalny prąd stały z wykorzystaniem oscylografu pętlicowego, lub przez porównanie ilości sinusoid napięcia z ilością drgań podstawy czasu na oscylogramach oscylografów pętlicowych. Ta ostatnia metoda pozwala na wyznaczenie częstotliwości metodą pośrednią, jest przy małych zmianach częstotliwości bardzo niedokładna i ściśle biorąc pozwala jedynie na wyznaczenie przybliżonego przebiegu częstotliwości.

Najdokładniejsze wyniki przy pomiarach przebiegów przejściowych zmian częstotliwości można uzyskać wykorzystując specjalne układy pomiarowe, zamieniające częstotliwość na proporcjonalny prąd stały i oscylografując przebieg prądu stałego, przy liniowych charakterystykach $I_{=} = \varphi(f)$. Wówczas z oscylogramu otrzymuje się bezpośrednio przebieg przejściowy zmian częstotliwości. Pomiar przeprowadzony w ten sposób praktycznie nie jest obarczony błędem wynikającym z bezwładności urządzeń zapisujących.

Pomiar przebiegów przejściowych zmian częstotliwości przy pomocy specjalnych rejestrujących okresomierzy o dużej szybkości zapisu obarczony jest pewnym błędem, związanym z bezwładnością systemu mierzącego i piszącego. Przyrządy takie dostosowane są jednak do dużych szybkości zmian częstotliwości i pozwalają na zapis z szybkością kilku mm/sek, a błąd wynikający z ich bezwładności przy realnych szybkościach zmian częstotliwości w układach elektroenergetycznych może być pominięty.

5. WYNIKI POMIARÓW

Poniżej zestawiono wyniki kilkunastu pomiarów przebiegów przejściowych zmian częstotliwości i podano kilka z uzyskanych, powtarzalnych charakterystyk. Pomiary przeprowadzonego w układach o mocy rzędu kilku tysięcy, kilkuset i kilkudziesięciu MW. W większości przypadków częstotliwość mierzono przy pomocy specjalnych rejestrujących okresomierzy o dużej szybkości posuwu taśmy, przystosowanych do zdejmowania przebiegów dynamicznych.

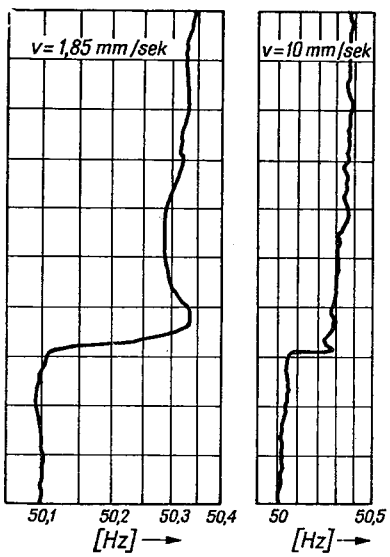
Wszystkie uzyskane charakterystyki mają przebieg okresowy tłumiony. Stromość ich przebiegów określono zastępczą stałą czasową, przyjętą jako czas osiągnięcia $1 - e^{-1} = 0{,}632\ \Delta f_{max}$.

Statyzm układu obliczono zarówno dla ustalonych, jak i maksymalnych odchyleń częstotliwości z poszczególnych przebiegów.

Jako moc odniesienia przyjęto $P_{odb.\Sigma n}$.

Z uzyskanych charakterystyk wyznaczono również poza wartościami zastępczej stałej czasu (T_f) czasy osiągnięcia wartości maksymalnej (t_m) i ustalonej (t_u) zmian częstotliwości. Przez t_w oznaczono czas, po którym od rozpoczęcia przebiegu przejściowego zmian częstotliwości zaczynają występować wtórne zmiany częstotliwości.

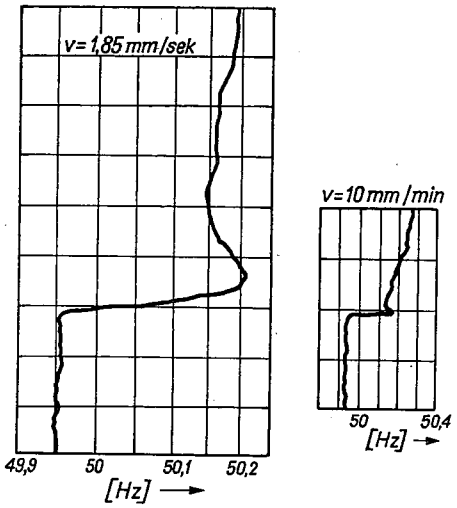
Przebiegi z pomiarów 1—8 i 12—14 uzyskano przy pomocy okresomierza rejestrującego firmy Goerz o zakresie 49,5—50,5 Hz, typu 548455, nr fabr. E166511, przebiegi z pomiarów 9-11 przy pomocy analogicznego przyrządu typu 548355, nr fabr. E98703. Szybkość posuwu taśmy 1-6 mm/sek, szerokość taśmy papieru odpowiadająca zakresowi pomiarowemu wynosi 120 mm, co pozwala na odczytanie zmian częstotliwości rzędu 5 mHz. Dokładność przyrządu jest jednak niższa i bez stosowania stabilizacji napięcia i temperatury wynosi $\pm$ 50 mHz.



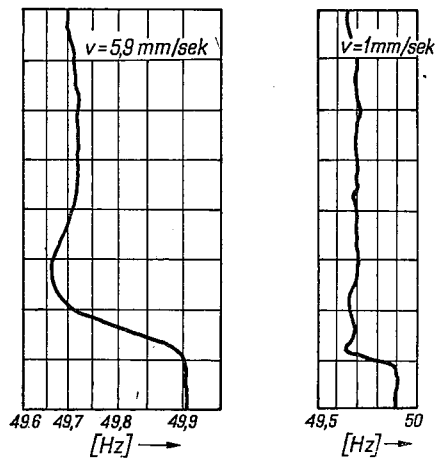
Rys. 1. Pomiar 1. Przebieg $f = \varphi(t)$ dla krajowego układu elektroenergetycznego. (Elektrownie cieplne > 90%)

Równocześnie dokonywano pomiaru częstotliwości przy pomocy okresomierza rejestrującego o zakresie 48—52 Hz (firma Goerz), typ 548452, nr fabr. E166510 z szybkością posuwu taśmy 10 mm/min lub 1 mm/sek, dla uzyskania w większym przedziale czasu wpływu wtórnych zmian częstotliwości, wywołanych zmianą parametrów pary na skutek naruszenia bilansu cieplnego w elektrowniach.

Przebiegi z pomiarów 15—17 uzyskano w sposób pośredni, przez porównanie w przedziałach czasowych 0,1 sek ilości sinusoid napięcia i drgań podstawy czasu (wartość niezmienna) oscylografu pętlicowego. Obarczone są one dość znacznymi błędami, wynikającymi z dokładności



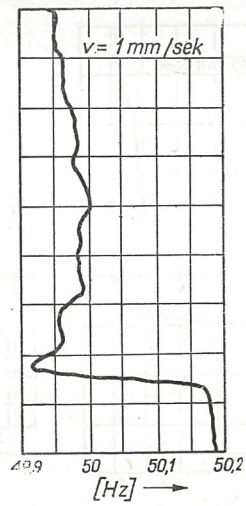
Rys. 2. Pomiar 4. Przebieg $f = \varphi(t)$ dla krajowego układu elektroenergetycznego



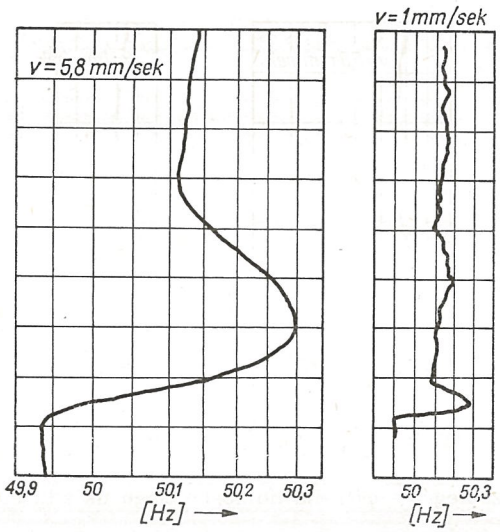
Rys. 3. Pomiar 8. Przebieg $f = \varphi(t)$ dla dolnośląskiego układu elektroenergetycznego

metody porównawczej, przy pomocy której zostały wyznaczone. Szczególnie przy małych zmianach częstotliwości, rzędu dziesiątych Hz, błąd, z jakim wyznacza się częstotliwość podaną metodą porównawczą, może dochodzić do kilkudziesięciu procent. Krzywe wyznaczone tą metodą można traktować jedynie jako orientacyjne, a samą metodą można posługiwać się jedynie wówczas, gdy nie dysponuje się lepszymi środkami

pomiaru i zapisu częstotliwości, tym bardziej, że jest ona bardzo żmudna i pracochłonna. Przy zmianach częstotliwości rzędu kilku Hz, błąd metody znacznie maleje.



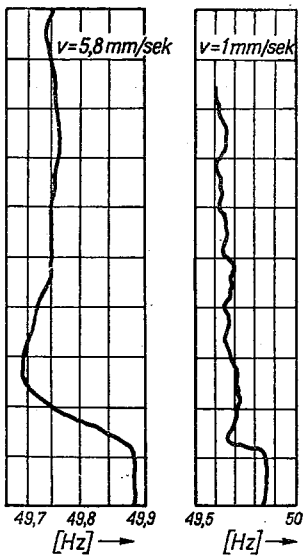
Rys. 4. Pomiar 10. Przebieg $f = \varphi(t)$ dla dolnośląskiego układu elektroenergetycznego



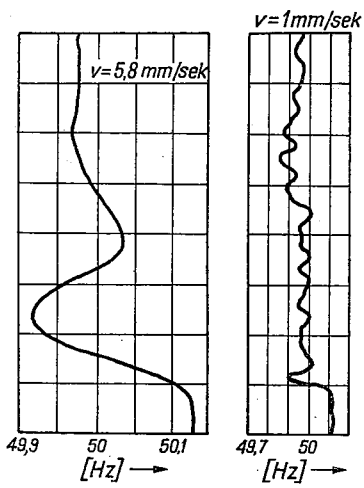
Rys. 5. Pomiar 12. Przebieg $f = \varphi(t)$ dla wydzielonego układu elektroenergetycznego (El. cieplna „Wrocław" — 90%, el. wodne — 10%)

Przy pomiarach nie posługiwano się urządzeniem przetwarzającym częstotliwość na proporcjonalny prąd stały, ponieważ brak w kraju urządzeń tego typu, a wykonanie ich ze względu na wymaganą wysoką dokładność pomiaru jest bardzo trudne.

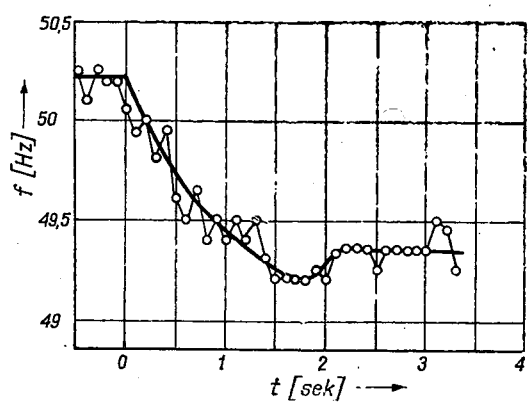
Na rys. 1—8 podano typowe, powtarzalne z kilkunastu uzyskanych charakterystyk, a w tablicy zestawiono ważniejsze parametry charakteryzujące uzyskane przebiegi przejściowe zmian częstotliwości.



Rys. 6. Pomiar 13. Przebieg $f = \varphi(t)$ dla wydzielonego układu elektroenergetycznego (El. cieplna „Wrocław — w")



Rys. 7. Pomiar 14. Przebieg $f = \varphi(t)$ dla wydzielonego układu elektroenergetycznego. (El. cieplna „Wrocław" — 90%, el. wodne — 10%)



Rys. 8. Pomiar 17. Przebieg $f = \varphi(t)$ dla wydzielonego układu elektroenergetycznego. (El. cieplna „Poznań")

6. ANALIZA UZYSKANYCH WYNIKÓW

Wszystkie uzyskane z pomiarów przebiegi przejściowe zmian częstotliwości mają charakter przebiegów okresowych tłumionych. Jest to wy-

Tablica

Zestawienie wyników pomiarów

Pomiar Nr	Charakterystyka układu	Data, godzina pomiaru	$P_{g\Sigma n}$	$P_{odb\Sigma n}$	ΔP	Δf_{ust}	Δf_{max}	$s_{ukl\,ust}$	$s_{ukl\,max}$	T_j	t_m	t_u	t_w	Uwagi
			MW	MW	MW	Hz	Hz	%	%	sek	sek	sek	sek	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	Krajowy układ elektro-	14.6.61 r. 12^{05}	4278	4062	—172	0,19	0,24	9,0	11,35	1,6	4,0	9,5	16	
2	energetyczny	15.6.61 r. 12^{05}	4251	4004	—165	0,18	0,22	8,7	10,7	1,6	3,7	7,0	16	
3	El. ciepl. >90%	21.6.61 r. 2^{05}	3758	3228	+115	0,1	0,14	5,6	7,9	1,6	3,6	10,0	15	
4		21.6.61 r. 3^{35}	3758	2940	—170	0,22	0,26	7,6	9,0	1,7	4,3	17,3	25	
5		21.6.61 r. 11^{10}	4332	4139	+160	0,16	0,22	8,3	11,4	1,6	3,7	8,6	33	
6		21.6.61 r. 12^{05}	4332	3929	—110	0,09	0,12	6,4	8,6	1,6	3,7	10,8	20,5	
7	Dolnośląski ukł. energ.	17.1.62 r. 13^{10}	545	470	+30	0,29	0,3	9,1	9,4	1,8	4,9	7,3		
8	El. ciepl. ~90%	17.1.62 r. 13^{33}	520	455	+30	0,18	0,24	5,5	7,3	1,46	2,71	6,1		*)
9	Dolnośląski	29.3.57 r. noc		180	+12		0,165		5,0	2,9	4,2		23	
10	układ energ.	29.3.57 r. noc		180	+16	0,215	0,26	4,85	5,85	2,2	4,5	11,0		
11	El. ciepl. ~80%	29.3.57 r. szczyt ranny		285	—26	0,42	0,45	9,2	9,9	1,8	5,1	10,0		
12	Część el. Wrocław	13.6.62 r. 11^{30}	37	31,5	—3,5	0,19	0,365	3,4	6,5	1,6	3,45	10,0	17,3	
13	i m. Wrocław	13.6.62 r. 11^{45}	34,5	31	+3	0,135	0,195	2,8	4,0	1,54	2,8	6,4	16,4	**)
14	El. wod. ~10% $P_{g\Sigma n}$	13.6.62 r. 13^{00}	37	31	+3	0,155	0,205	3,2	4,25	1,52	2,88	8,8		
15	Część el. Wrocław i m. Wrocław	14.12.56 r. noc	22,5	14,1	+4,08	0,58	0,7	4,0	4,85	1,1	2,0	2,75		
16	Część el. Poznań	9.8.56 r. noc	45	29,5	+5,45	0,35	0,47	3,8	5,1	0,55	1,5	2,5		
17	i m. Poznań El. ciepl. 100%	9.8.56 r. noc	45	28,65	+7,6	0,85	1,0	6,4	7,55	0,75	1,75	2,2		

*) Różny od poprzedniego rozkład obciążeń.

**) Bez elektrowni wodnych.

nikiem niskich wartości statyzmu układu w stanach pracy układów elektroenergetycznych, w których przeprowadzano badania, spowodowanych zarówno istnieniem wirujących rezerw mocy czynnej w czasie przeprowadzania pomiarów, jak i niskimi wartościami statyzmu poszczególnych turbozespołów (rzędu kilku procent).

Zgodnie z analitycznymi zależnościami wyprowadzonymi w poprzedniej pracy autora [14], a podanymi w dużym uproszczeniu w niniejszym artykule, dla wartości statyzmu układu uzyskanych z pomiarów, przy przyjęciu średnich wartości stałych czasowych $T_{s\Sigma}$ przebiegi powinny być okresowe tłumione, co zostało potwierdzone doświadczalnie we wszystkich pomiarach.

Ze względów technicznych i organizacyjnych autorowi nie udało się przeprowadzić pomiarów w warunkach, w których zgodnie z wyprowadzonymi zależnościami analitycznymi przebiegi powinny być wykładnicze, jednak przebiegi takie uzyskane doświadczalnie przez innych autorów [3], [6] potwierdzają tezę o okresowym tłumionym lub wykładniczym charakterze przebiegów przejściowych zmian częstotliwości.

Uzyskane charakterystyki są bardzo zbliżone do podanych przez Markowicza i Sowałowa [4] dla wydzielonych układów elektroenergetycznych ZSRR.

Wartości statyzmu układu, obliczone dla ustalonych odchyleń częstotliwości i odniesione do częstotliwości znamionowej i mocy pobieranej przez zastępczy odbiór energetyczny w badanym stanie pracy układów elektroenergetycznych ($P_{odb.\,\Sigma n}$) wynoszą poniżej 10% (3—9%). Tak niskie wartości statyzmu układu są między innymi wynikiem przyjętej mocy odniesienia, szczególnie dla stanów pracy układu, w których $P_{g\Sigma n} \gg P_{odb.\,\Sigma n}$. Przy przyjęciu jako mocy odniesienia $P_{g\Sigma n}$, wartości statyzmów byłyby większe, przy czym współczynnikiem przeliczeniowym jest stosunek $\frac{P_{g\Sigma n}}{P_{odb.\,\Sigma n}}$.

Obliczono również wartości statyzmu układu dla przejściowych, maksymalnych odchyleń częstotliwości. Wartości ustalonych odchyleń częstotliwości są niższe od maksymalnych tylko w przypadku przebiegów okresowych tłumionych — wówczas wartość statyzmu układu obliczona dla maksymalnych odchyleń częstotliwości jest zawsze większa niż dla odchyleń ustalonych, tym większa, im słabsze jest tłumienie przebiegu i im krótszy jest okres funkcji $\sin(\varkappa t + \chi)$ z zależności (9). Wartości statyzmu układu obliczone dla maksymalnych odchyleń częstotliwości przy mocy odniesienia $P_{odb.\,\Sigma n}$ wynoszą dla uzyskanych charakterystyk od 4 do 11,4%.

Ze względu na okresowy tłumiony (choć często prawie aperiodyczny) przebieg uzyskanych charakterystyk, określono go zastępczą stałą czasową ($T_f = 0{,}632\,\Delta f_{max}$) oraz czasem osiągnięcia wartości maksymalnej i ustalonej zmian częstotliwości.

W większości zbadanych przypadków wartości zastępczej stałej czasowej T_f wynoszą od 1,6 do 1,8 sek, czas osiągnięcia maksymalnych odchyleń częstotliwości od 3,6 do 5 sek, czas osiągnięcia ustalonej wartości zmian częstotliwości od 6 do 10 sek. Wyznaczony z uzyskanych charakterystyk czas osiągnięcia wartości ustalonych zmian częstotliwości może być obarczony znacznym błędem na skutek asymptotycznego przebiegu funkcji $e^{-\frac{t}{\tau_\varkappa}}$ z zależności (9) w końcowej fazie przebiegu przejściowego i jest znacznie dłuższy od trzech stałych czasowych $\tau_\varkappa$, w czasie których powinno nastąpić osiągnięcie 0,95—1,05 Δf_{ust}.

Czas trwania przebiegu przejściowego zmian częstotliwości, warunkowany stałą czasową $\tau_\varkappa$ zależy w zasadniczej mierze od wartości stałej czasowej $T_{s\Sigma}$. Przy dużych wartościach $T_{s\Sigma}$ stała czasowa $\tau_\varkappa$ ma również dużą wartość, a przebieg przejściowy trwa dłużej.

Zastępcza stała czasowa T_f jest nieporównywalna ze stałą czasową $\tau_\varkappa$, określającą tłumienie w równaniu (9), ze względu na wyznaczenie jej z rzeczywistego przebiegu zmian częstotliwości z uwzględnieniem członu okresowego, stąd trzy stałe czasowe T_f nie określają w przybliżeniu zakończenia przebiegu przejściowego. Stała czasowa T_f określa natomiast szybkość zmian częstotliwości w początkowym okresie procesu przejściowego oraz osiągnięcie wartości 0,632 Δf_{max}.

Nie dysponując charakterystycznymi danymi określającymi badane układy elektroenergetyczne (głównie $T_{ukł}$ i T_Σ) trudno jest ocenić zbieżność wyników doświadczalnych z wyprowadzonymi zależnościami analitycznymi, jednak niemal we wszystkich przypadkach można określić uzyskane charakterystyki przy pomocy zależności analitycznych, przyjmując odpowiednie wartości $T_{ukł}$ i $T_{s\Sigma}$. W stosunku do przebiegów określonych przy pomocy wyprowadzonych zależności analitycznych, przebiegi rzeczywiste uzyskane bezpośrednio na drodze pomiarowej charakteryzują się na ogół przedłużającym się czasem osiągnięcia wartości ustalonej zmian częstotliwości oraz nieregularnymi zmianami w końcowej fazie przebiegu przejściowego. Wytłumaczenia tego zjawiska można doszukiwać się w różnorodnych typach regulatorów obrotów i bardziej złożonych od przyjętych określających je równań.

We wszystkich zbadanych przypadkach zarówno wartości zastępczych stałych czasowych T_f, jak i czasy osiągnięcia maksymalnych odchyleń częstotliwości są małe i świadczą o bardzo szybkich zmianach częstotliwości w pierwszej fazie przebiegu przejściowego (w przypadku krzywych okresowych tłumionych), w której zachodzi maksymalne odchylenie częstotliwości, mimo istnienia mas wirujących w układach elektroenergetycznych.

Jak potwierdziły pomiary, dzięki niskim wartościom stałej czasowej $\tau_\varkappa$ w porównaniu z okresem funkcji $\sin(\varkappa t + \chi)$ z zależności (9), przebiegi przejściowe zmian częstotliwości zbliżone są raczej do krzy-

wych wykładniczych niż okresowych, ponieważ na ogół nie dochodzi nawet na pełnego okresu oscylacji, a poniżej osi określonej wartością Δf_{ust} przebieg jest już bardzo silnie stłumiony. Osiągane wartości zmian częstotliwości poniżej wartości ustalonej wynoszą na ogół od kilkunastu do 30—40% ustalonej wartości zmian częstotoliwości, co świadczy o szybkim tłumieniu funkcji okresowej.

Po zakończeniu zasadniczego przebiegu przejściowego zmian częstotliwości, warunkowanego w głównej mierze bezwładnością układu oraz parametrami układów regulacyjnych turbozespołów, po czasie na ogół rzędu kilkunastu sekund następują wtórne zmiany częstotliwości, wywołane zmianą parametrów pary w elektrowniach cieplnych na skutek naruszenia ich bilansu cieplnego. Czas po którym następują wtórne zmiany częstotliwości oraz wielkość ich odchyleń zależą od wartości mocy, o którą naruszony został wyjściowy stan ustalony, oraz od charakterystycznych cech kotłów, szybkości oddziaływania istniejącej automatyki kotłowej oraz nowego rozkładu obciążeń. Na podstawie uzyskanych przebiegów przejściowych zmian częstotliwości oraz innych pomiarów, mających na celu określenie przydatności różnych typów krajowych elektrowni do samoczynnej regulacji częstotliwości, przeprowadzonych przez autora w 1956 roku w kilkunastu elektrowniach cieplnych, można stwierdzić, że czas, po którym występują wtórne zmiany częstotliwości wywołane zmianą parametrów pary, wynosi od kilkunastu do kilkudziesięciu sekund, w zależności od typu kotłowni, głównie jej pojemności cieplnej, automatyki kotłowej oraz stopnia obciążenia kotłów.

Wtórne zmiany częstotliwości zachodzą w czasie do kilku minut i mogą dochodzić do kilkudziesięciu procent zasadniczego odchylenia częstotliwości.

7. WNIOSKI

1. Przebiegi przejściowe zmian częstotliwości, wywołane nagłym naruszeniem bilansu mocy czynnej w układach elektroenergetycznych mogą być określane funkcjami wykładniczymi lub wykładniczo-trygonometrycznymi. Obydwa rodzaje przebiegów mogą występować nawet w tych samych układach. O charakterze przebiegu decyduje w takim przypadku wartość statyzmu układu w wyjściowym jego stanie pracy.

2. Analityczne wyznaczenie zależności $\Delta f = \varphi(t)$ obarczone jest dość znacznym błędem. Najdokładniej przebiegi przejściowe zmian częstotliwości można uzyskać przy pomocy bezpośredniego pomiaru.

3. Zamiast wyłączania pod obciążeniem turbozespołów lub dużych odbiorów energetycznych w celu wywołania zmian częstotliwości, można rozłączać połączenia sprzęgające przy określonych, planowo wymuszonych rozpływach mocy.

4. Zastępcze stałe czasowe przebiegów przejściowych zmian częstotliwości wynoszą na ogół od 1 do 2 sek, a cały proces przejściowy trwa od kilku do kilkunastu sekund.

5. Po zakończeniu zasadniczego przebiegu przejściowego zmian częstotliwości występują wtórne zmiany częstotliwości, wywołane zmianą parametrów pary w elektrowniach cieplnych, na skutek naruszenia bilansu cieplnego.

Instytut Automatyki
Systemów Energetycznych
we Wrocławiu

WYKAZ LITERATURY

1. Cuénod M., Jacques A., Renchon R.: Analyse de la tenue de la fréquence d'un réseau par la méthode impulsionelle. CIGRE, 1954, referat Nr 316.
2. Davies M., Moran F., Bird J. I.: Power/Frequency Characteristic of the British Grid System. — Proc. J. El. Engrs., 1959, t. 106, str. 154—167.
3. Hodoušek V., Trojánek Z.: Frekvenčni charakteristiky energetického systému ČSR. — Energetika, 1960, Nr 4.
4. Markowicz J. M., Sowałow S. A.: Ekspierimientalnoje opriedielenje paramietrow elektriczeskoj sistiemy, wlijajuszczich na process awtomaticzeskogo riegulirowanja czastoty i moszcznosti. — Elektriczestwo, 1948, Nr 8.
5. Mesarowič M., Obradowič J.: Influence d'un réseau d'énergie sous tension sur le réglage de la fréquence. CIGRE, 1956, referat Nr 321.
6. Moskalew A. G.: Awtomaticzeskaja czastotnaja razgruzka eniergieticzeskich sistiem. Goseniergoizdat, 1959.
7. Obradovič J., Mesarovič M.: Wielkości znamionowe sieci wysokiego napięcia, mające znaczenie przy regulacji częstotliwości. — Przegląd Elektrotechniczny, 1958, Nr 8/9.
8. Pierwozwanskij A. A.: O kaczestwie awtomaticzeskogo riegulirowanja czastoty w eniergosistiemach. — Izwiestja AN SSSR, ONT, 1957, Nr 1.
9. Preminger J.: Zachowanie się częstotliwości w zespole krajowych układów elektroenergetycznych. — Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej, Elektryka VIII, 1957.
10. Rüdenberg R.: Pieriechodnyje processy w elektroeniergieticzeskich sistiemach. Przekład z pierwszego wydania amerykańskiego. Izdatielstwo Inostrannoj Litieratury, 1955.
11. Sekine Y.: Dynamic Performances and Spasmodic Variation Characteristics of Power Systems in Connection with Automatic Frequency Control. — ETJ of Japan, March 1958.
12. Sterninson L. D.: Charaktieristiki eniergosistiemy kak objekta awtomaticzeskogo riegulirowanja czastoty. — Elektriczeskije Stancji, 1949, Nr 1.
13. Wienikow W. A.: Elektromiechaniczeskije pieriechodnyje processy w elektriczeskich sistiemach. Goseniergoizdat, 1958.
14. Zieliński Z.: Częstotliwościowe charakterystyki dynamiczne układów elektroenergetycznych. Praca doktorska. Politechnika Wrocławska, 1962.

Z. ZIELIŃSKI

A STUDY OF TRANSCIENTS IN POWER SYSTEM

Summary

In the paper equations are given developed by author which determine transcients of frequency variation due to a sudden disturbance of active power balance in a power system. It is proved that exponentially — trigonometric functions for damped oscillations can describe these phenomena. Analytical evaluation of parameters of the function $\Delta f = \varphi(t)$ gives considerable error resulting from the impossibility to discover all relations between electrical and mechanical quantities influencing these parameters and from the lack of numerical datas for the calculations involved.

To determine transcient performance of frequency variation a dozen measurements was done after a sudden disturbance of active power balance in the system. The variation of frequency was measured by means of high speed registrating frequency meters (with paper tape rate of several mm's per second). These measurements in the State Power System and in parts of it gave the background for determining characteristic parameters of the function.

It is shown, that after the decay of basic transcient process of frequency variation a secondary process may be observed due to a change of steam parameters resulting from a disturbance of thermal balance in the thermal power plants.

Z. ZIELIŃSKI

PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES DE FRÉQUENCE DANS LES RÉSEAUX ÉNERGÉTIQUES

Résumé

Dans l'article l'auteur démontre mathématiquement les dependances déterminant les phénomènes transitoires de fréquences, causés par les troubles soudain du bilan de la puissance active, propres aux réseaux énergétiques. On démontre, que ces phénomènes peuvent être définis par des fonctions exponentielles ou bien par des fonctions exponentielles trigonométriques qui déterminent dans ce dernier cas un mauvement périodique atténué.

On a constaté que la détermination de ces phénomènes $\Delta f = \varphi(t)$ par la méthode analytique renferme des erreurs non négligeables qui résultent de l'impossibilité de prendre en égard tous les rapports existants entre les valeurs électriques et mécaniques qui ont influence sur les phénomènes cités. On peut ajouter encore le manque de la connaissance précise des paramètres et valeurs entrant dans les équations des rapports ci-dessus.

Pour mieux déterminer ces phénomènes transitoires de fréquence on a accompli une dizaine d'expériments de mesure, provoquant dans le réseau énergétique par l'instabilité instantanée du bilan de la puissance active les phénomènes transitoires de fréquence mesurés à l'aide des enregistreurs de fréquence à très grande vitesse de l'enroulement de la bande (quelques millimètres par seconde). En se basant sur les expériments et mesures éffectuées dans le réseau énergétique Polonais, on a déterminé les valeurs caractérisant les changements mentionnés.

On a demontré ainsi qu'a la terminaison du principal processus des phénomènes transitoires de fréquence apparaissent de secondaires phénomènes transitoires provenant des changements de paramètres de la vapeur causés par les troubles provoqués dans le bilan thermique des centrales thermiques d'électricité.

З. ЗЕЛИНЬСКИ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ИЗМЕНЕНИЙ ЧАСТОТЫ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Резюме

В статье опубликованы выведенные автором зависимости определяющие переходные процессы изменений частоты, связанные с внезапным нарушением баланса активной мощности в электро-энергетических системах. Доказано, что эти процессы могут быть определены показательными или показательно-тригонометрическими функциями, последние определяют периодическое демифированное движение.

Доказано, что аналитический метод определения функции $\Delta f = \varphi(t)$ приводит к большой ошибке, потому что нет возможности точно учесть все зависимости между электрическими и механическими величинами, имеющими влияние на этот процесс. Трудность точного определения параметров и величин, входящих в выведенные зависимости тоже увеличивает ошибку.

Для точного определения переходных процессов изменений частоты произведено свыше десяти измерений, производя в электро-энергетической системе внезапное нарушение баланса активной мощности. Вследствие этого изменялась частота, которую измерено при помощи регистрирующих частомеров с очень большой скоростью продвижения ленты (порядка нескольких мм/сек).

Из произведённых в польской электро-энергетической системе и её частях измерений, определено характеристические величины характеризующие переходные процессы изменения частоты.

Доказано, что после оконьчения главного переходного процесса изменений чатоты, появляются вторичные изменения частоты, вызванные изменением параметров пара, вследствие нарушения теплового баланса в тепло-электростанциях.

538.65 : 621.315.55

ZBIGNIEW KACZKOWSKI

Własności magnetostrykcyjne stopów żelazo-niklowych

Rękopis dostarczono 14.2.1963

W oparciu o bogatą literaturę omówiono statyczne i dynamiczne własności magnetostrykcyjne niklu i stopów żelazo-niklowych.

Podano w tablicach i na wykresach najważniejsze parametry tych materiałów i stwierdzono, że najbardziej przydatne do szerokich zastosowań mogą być stopy o zawartości od 40 do 50% niklu. Stopy te posiadają podobne do niklu własności magnetomechaniczne, a zawierają o połowę mniej tego deficytowego pierwiastka.

1. WSTĘP

Własności magnetyczne stopów żelazo-niklowych były już znane w ubiegłym stuleciu. Pierwsze systematyczne badania w tej dziedzinie rozpoczął Hopkinson i w 1889 i 1890 opublikował wyniki swych prac [18], [19]. Opracowaniem technologii stopów Fe-Ni do zastosowań w telekomunikacji o własnościach lepszych niż tradycyjnych stopów żelazo-krzemowych zajął się Elmen i w latach 1916—1926 opatentował stopy typu Permalloy. Zasadniczy wpływ na własności magnetyczne tych stopów ma odpowiednia obróbka termiczna (temperatura i czas wyżarzania, szybkość chłodzenia, atmosfera, hartowanie, studzenie w polu magnetycznym itp.). Zagadnienia te szczegółowo przeanalizował Bozorth [5].

Po odkryciu zjawiska magnetostrykcji w żelazie przez Joule'a w 1842 r. [20] badania te rozciągnięto na inne metale i stopy. W 1882 r. Barret stwierdził, że nikiel kurczy się w polu magnetycznym. Stopy żelazo-niklowe w zakresie małych zmian pól badali Mc Keehan i Cioffi [37], [38]. Szersze badania przeprowadzili między innymi Schultze [43], Masiyama [35] i Rankin [42], Matsumoto i Nara [36], Honda [16], [17] i inni. Badania własności dynamicznych magnetostrykcyjnych stopów żelazoniklowych na szerszą skalę zaczęto prowadzić po II wojnie światowej. Do najpełniejszych należą prace Davisa, Helmsa i Ferebee [9], [10]. Materiały żelazo-niklowe znalazły powszechne zastosowanie w przetwornikach ultradźwiękowych dużej i średniej mocy w zakresie do ponad 100 kHz, a także w niektórych typach filtrów magnetomechanicznych i magnetostrykcyjnych liniach opóźniających.

Tablica 1

Definicje współczynników magnetomechanicznych

	MKSA zr			CGSM n		
v_H	$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_H$	$\pi d_{śr} f_r$	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_H$	$\pi d_{śr} f_r$	cm/s
v_B	$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_B$	$\pi d_{śr} f_a$	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_B$	$\pi d_{śr} f_a$	cm/s
E_H	$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\right)_H$	$v_H^2 \gamma$	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$	$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\right)_H$	$v_H^2 \cdot \gamma$	$\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}^2}$
E_B	$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\right)_B$	$v_B^2 \gamma$	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$	$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\right)_B$	$v_B^2 \cdot \gamma$	$\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}^2}$
k	$\frac{W - W_0}{W}$	$\pm \sqrt{\frac{2(f_a - f_r)}{f_a}}$	—	$\frac{W - W_0}{W}$	$\pm \sqrt{\frac{2(f_a - f_r)}{f_a}}$	—
μ_σ	$\left(\frac{\partial B}{\partial H}\right)_\sigma$	$\frac{L \cdot l}{S \cdot n^2}$	$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$	$\left(\frac{\partial B}{\partial H}\right)_\sigma$	$\frac{L \cdot l \cdot 10^8}{0{,}4\pi S n^2}$	Gs/Oe

	MKSA zr			CGSM n		
μ_ε	$\left(\frac{\partial B}{\partial H}\right)_\varepsilon$	$(1-k^2)\mu_\sigma$	$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$	$\left(\frac{\partial B}{\partial H}\right)_\varepsilon$	$(1-k^2)\mu_\sigma$	Gs/Oe
h	$-\left(\frac{\partial \sigma}{\partial B}\right)_\varepsilon \equiv -\left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}\right)_B$	$\pm k\sqrt{\frac{E_B}{\mu_\varepsilon}}$	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Wb}}$	$-\left(\frac{\partial \sigma}{\partial B}\right)_\varepsilon = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}\right)_B$	$\pm k\sqrt{\frac{E_B}{4\pi\mu_\varepsilon}}$	$\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm^2\,Gs}}$
g	$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial B}\right)_\sigma \equiv -\left(\frac{\partial H}{\partial \sigma}\right)_B$	$\frac{h}{E_B}$	$\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{Wb}}$	$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial B}\right)_\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial H}{\partial \sigma}\right)_B$	$\frac{h}{E_B}$	1/Gs
e	$-\left(\frac{\partial \sigma}{\partial H}\right)_\varepsilon \equiv \left(\frac{\partial B}{\partial \varepsilon}\right)_H$	$\frac{k^2}{g} = \mu_\varepsilon \cdot h$	$\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m^2}}$	$-4\pi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial H}\right)_\varepsilon = \left(\frac{\partial B}{\partial \varepsilon}\right)_H$	$\frac{k^2}{g} = 4\pi\mu_\varepsilon \cdot h$	Gs
d	$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial H}\right)_\sigma \equiv \left(\frac{\partial B}{\partial \sigma}\right)_H$	$\frac{e}{E_H} = \mu_\sigma g$	$\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{N}}$	$4\pi\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial H}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial B}{\partial \sigma}\right)_H$	$\frac{e}{E_H} = 4\pi\mu_\sigma g$	$\frac{\mathrm{cm^2\,Gs}}{\mathrm{dyn}}$
Q_m	$\frac{A_r}{A} = \frac{2\pi f_r M}{R}$	$\frac{f_r}{f_2-f_1}$ lub $\frac{\pi}{\vartheta}$	—	$\frac{2\pi f_r M}{R}$	$\frac{f_r}{f_2-f_1}$	—
Q_μ	$\frac{\mu'}{\mu''}$	$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\delta}$	—	$\frac{\mu'}{\mu''}$	$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\delta}$	—

2. PARAMETRY CHARAKTERYZUJĄCE WŁAŚCIWOŚCI MATERIAŁÓW MAGNETOSTRYKCYJNYCH

Do prawidłowego zaprojektowania przetwornika magnetostrykcyjnego konieczna jest znajomość jego parametrów zarówno statycznych, jak i dynamicznych. Zagadnienia te zostały rozpatrzone w kilku publikacjach polskich, np [23]÷[27], [45], [46].

O zakresie dopuszczalnych mocy przetwornika decydują między innymi takie statyczne parametry, jak indukcja nasycenia B_s i magnetostrykcja nasycenia ε_s. Najekonomiczniejszy i najodpowiedniejszy ze względów technicznych jest punkt pracy poniżej zagięcia charakterystyk B i ε w funkcji H na ich odcinku prostoliniowym. Podmagnesowanie takie zapewnia optymalne dynamiczne własności magnetomechaniczne. Do określenia częstotliwości rezonansowej przetwornika niezbędna jest obok znajomości dynamicznego modułu sprężystości przy danym podmagnesowaniu E_H, [23], znajomość jego gęstości γ lub określona z tych dwóch parametrów szybkość dźwięku w omawianym materiale v_H:

$$f_r \approx \frac{K}{2l}\sqrt{\frac{E_H}{\gamma}} = \frac{K}{2l} v_H, \tag{1}$$

gdzie:

K = 1, 2, 3 ...,
l — długość w cm,
E_H — w dyn/cm^2,
γ — w g/cm^3,
v_H — w cm/s.

Wzór powyższy jest słuszny dla drgań wzdłużnych.

Częstotliwościowy zakres stosowalności przetworników metalicznych zależy od strat na prądy wirowe i jest określony jego przenikalnością, opornością właściwą i grubością stosowanych blaszek. Do określenia tego zjawiska wprowadzono pojęcie częstotliwości charakterystycznej f_c. Częstotliwość charakterystyczna jest to częstotliwość, przy której głębokość wnikania jest równa $\sqrt{2}$ razy grubość blaszek. Częstotliwość charakterystyczna jest określona następującą zależnością:

$$f_c = \frac{7{,}85 \cdot 10^{10} \varrho}{\mu t^2} \text{ [Hz]}, \tag{2}$$

gdzie:

ϱ — oporność właściwa w $\mu\Omega$cm,
μ — przenikalność w Gs/Oe,
t — grubość blaszek w mm.

Parametry dynamiczne materiałów magnetostrykcyjnych najdogodniej jest określać posługując się współczynnikami występującymi w równaniach magnetostrykcyjnych [22], [23], [24]. Obok tych współczynników

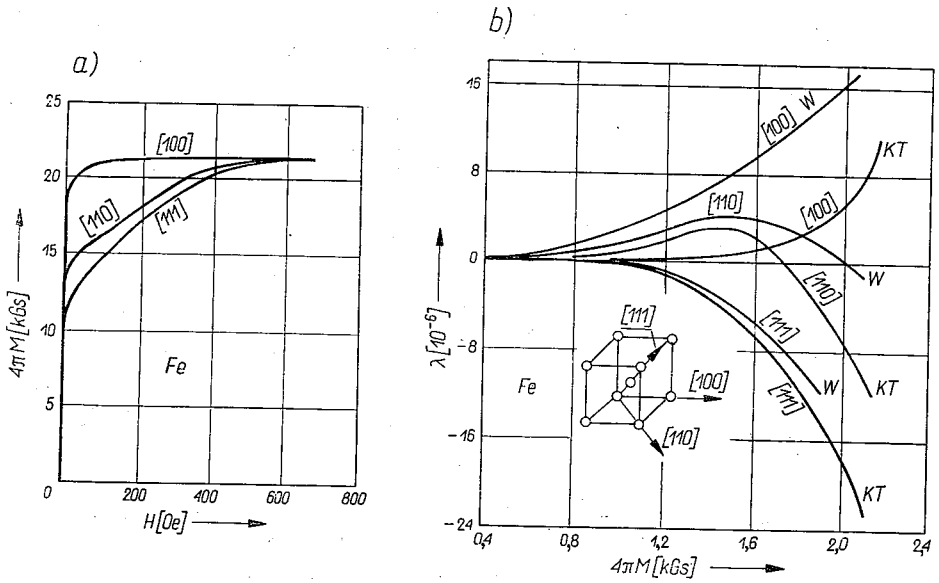
interesujący jest także współczynnik sprzężenia magnetomechanicznego, ściśle związany ze współczynnikami równań magnetostrykcyjnych [22], a także prędkość dźwięku w materiale. Ponadto może być interesująca wartość dobroci mechanicznej Q_m [21] i magnetycznej Q_μ, a w przypadku gotowych przetworników ich sprawność, określana przez Bradfielda [6] następującym wzorem przybliżonym:

$$\eta \approx 1 - \frac{2}{k\sqrt{Q_\mu Q_m}}. \tag{3}$$

Definicje współczynników magnetomechanicznych wraz z odpowiednimi wzorami określającymi podano w tablicy 1. Szczegółowa analiza tych związków została przeprowadzona w innych pracach autora, np. [24], [25].

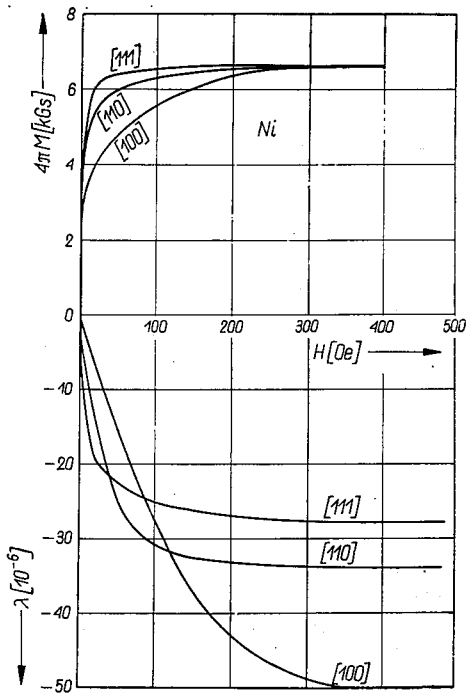
3. NIKIEL I ŻELAZO

Nikiel i żelazo — pierwiastki wyjściowe przy produkcji stopów żelazo-niklowych — należą obok kobaltu do najważniejszych metali ferromagnetycznych. Własności ich były przez wielu naukowców gruntow-

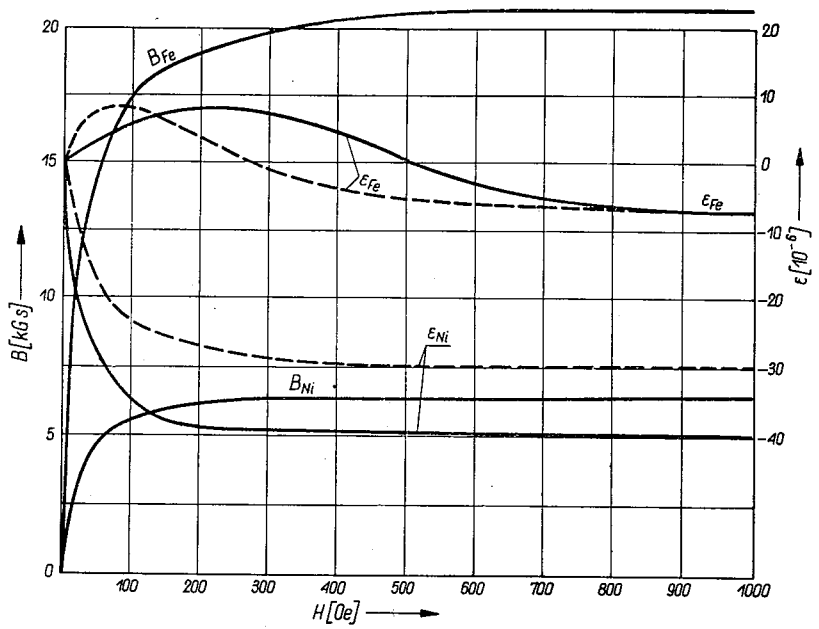


Rys. 1. Magnetyzacja i magnetostrykcja monokryształu żelaza

nie przebadane. Dla przykładu przedstawiono charakterystyki namagnesowania i magnetostrykcji monokryształów żelaza i niklu (rysunki 1 i 2) dla ich głównych osi krystalicznych [5], [33], [50], [51]. Żelazo ma zazwyczaj strukturę przestrzenno-centrowaną (faza α), nikiel zaś struk-



Rys. 2. Magnetyzacja i magnetostrykcja monokryształu niklu



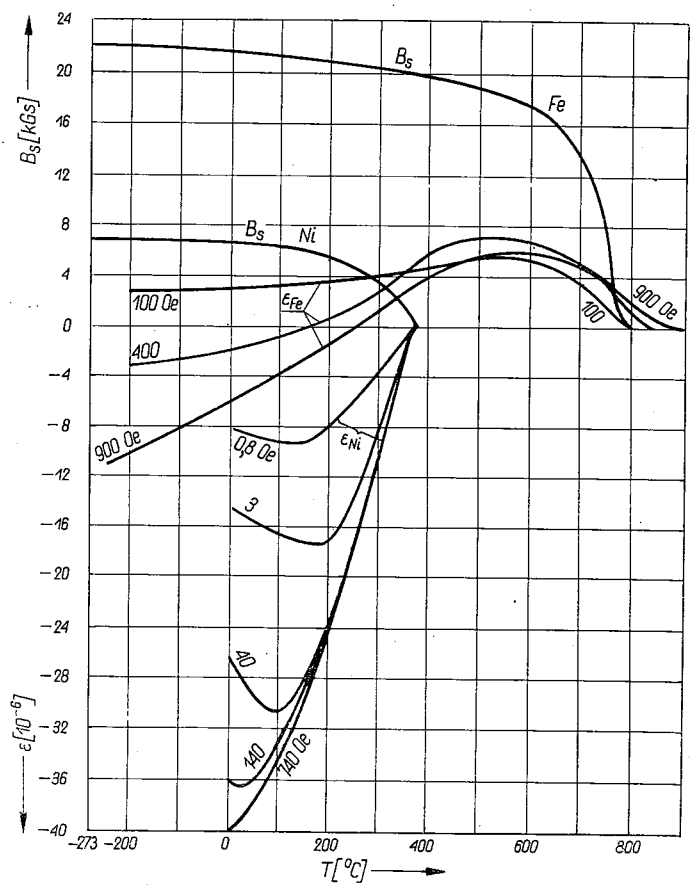
Rys. 3. Krzywe pierwotne magnesowania i magnetostrykcji żelaza i niklu

turę płasko-centrowaną (faza γ). Stopy Fe-Ni, stosowane w technice telekomunikacyjnej, o zawartości od 40 do 90% Ni mają strukturę płasko centrowaną. Struktura ta zależy nie tylko od składu chemicznego, ale i od przeprowadzanej obróbki termicznej.

Na rys. 3 przedstawiono krzywe pierwotne magnesowania i magnetostrykcji polikrystalicznego żelaza i niklu.

Oporność właściwa żelaza jest w przybliżeniu proporcjonalna do kwadratu temperatury w zakresie od -273 do 750°C; w 20° $\varrho = 9{,}7$—-11 $\mu\Omega$cm, w 200°C $\varrho = 20\mu\Omega$cm, a w 600° $\varrho - 70\mu\Omega$cm.

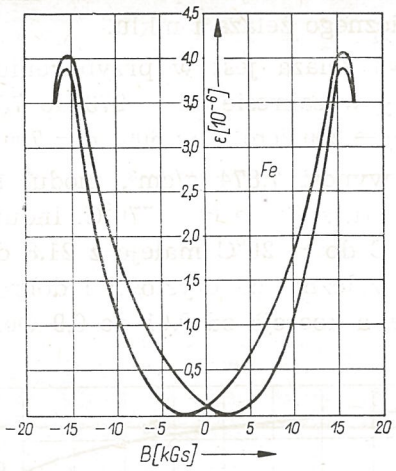
Gęstość żelaza γ wynosi 7,874 g/cm^3, moduł sprężystości $E = 2{,}1 \cdot 10^{12}$ dyn/cm^2, temperatura Curie $\Theta = 770$°C. Indukcja nasycenia żelaza w zakresie od -273°C do $+20$°C maleje z 21,8 do 21,58 kGs. Przenikalność maksymalna, zależnie od czystości i dobroci, może wynosić od 5000 do 350000 Gs/Oe, a koercja od 0,01 do 0,9 Oe.



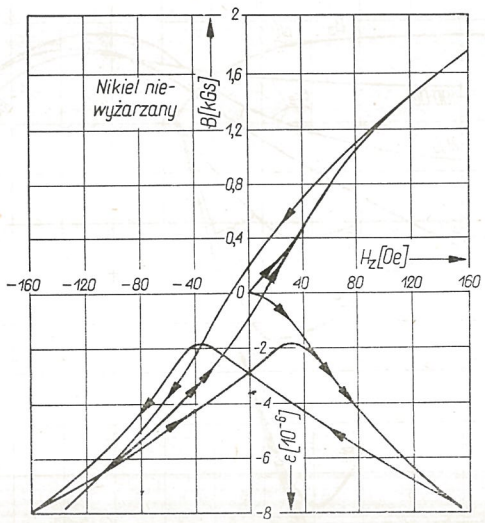
Rys. 4. Indukcja nasycenia i magnetostrykcja żelaza i niklu jako funkcje temperatury

Zmiana znaku magnetostrykcji w zależności od natężenia pola w poważnym stopniu obniża przydatność żelaza do klasycznych zastosowań.

Własności niklu pozwalają na powszechne stosowanie go w przetwornikach magnetostrykcyjnych; najpoważniejszym jednak mankamentem

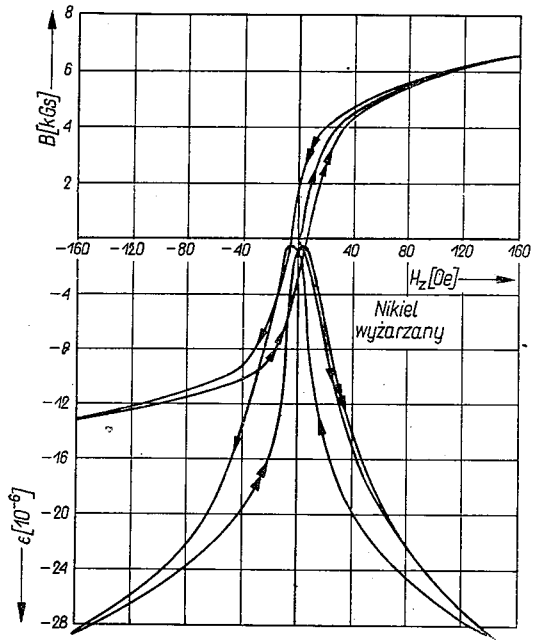


Rys. 5. Histereza magnetostrykcji żelaza

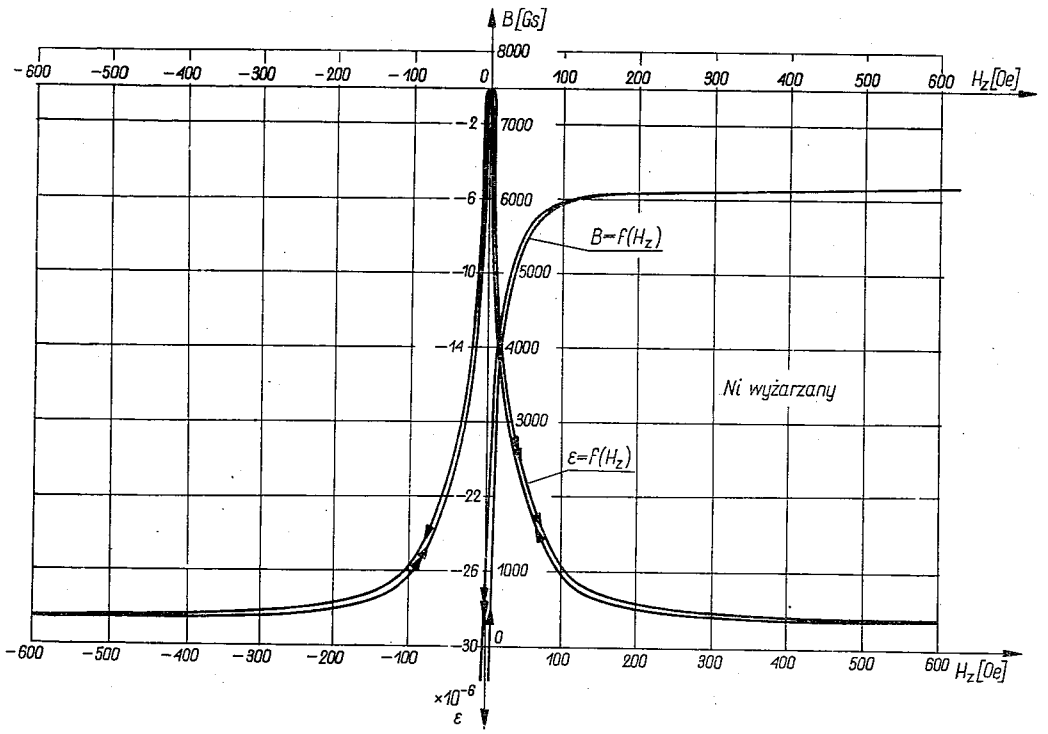


Rys. 6. Histereza magnetyczna i magnetostrykcyjna niklu niewyżarzanego

jest deficytowość niklu i ograniczony zakres częstotliwościowy zastosowań. Własności statyczne niklu podano łącznie z własnościami statycznymi stopów Fe-Ni. Zależności temperaturowe magnetostrykcji i indukcji nasycenia niklu i żelaza podano na rys. 4 [5], [17], [30].

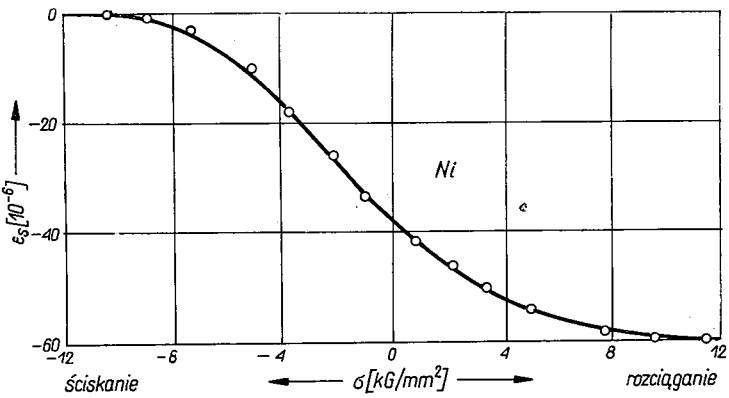


Rys. 7. Histereza magnetyczna i magnetostrykcyjna niklu wyżarzonego

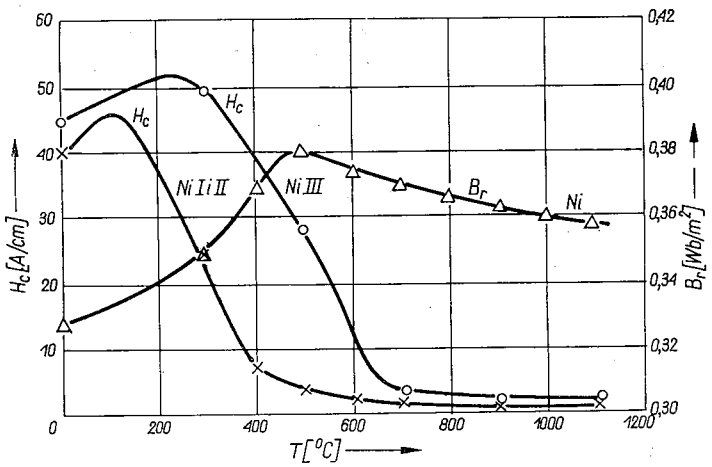


Rys. 8. Histereza magnetyczna i magnetostrykcyjna niklu wyżarzonego w zakresie do 700 Oe

Na rys. 5 przedstawiono pętlę histerezy magnetostrykcyjnej żelaza [5], a na rys. 6, 7 i 8 pętle histerezy magnetycznej i magnetostrykcyjnej niklu przed i po obróbce termicznej w zakresie do 160 i 700 Oe [22]. Zależności przedstawione na rys. 6 i 7 wyraźnie obrazują wpływ naprężeń na charakterystyki magnetostrykcyjne. Na rys. 9 przedstawiono wpływ ściskania i rozciągania na magnetostrykcję nasycenia niklu [29].



Rys. 9. Wpływ ściskania i rozciągania na magnetostrykcję nasycenia niklu

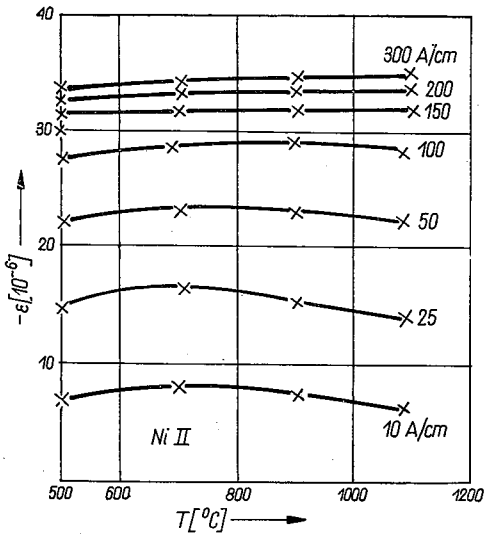


Rys. 10. Wpływ temperatury wyżarzania na natężenie powściągające H_c i koercję B_r niklu

Przy ciśnieniu jednoosiowym 12 kG/mm² nikiel traci własności magnetostrykcyjne ($\varepsilon_{wzdł} = 0$). Znacznie bardziej skomplikowany problem stanowi wpływ ciśnienia wszechstronnego.

Wpływ temperatury wyżarzania na własności magnetyczne i magnetostrykcyjne przedstawiono na rys. 10 i 11, gdzie Ni I oznacza nikiel o czystości 99,94%, Ni II — 99,60%, Ni III — 99,35% [15].

Parametry dynamiczne niklu (tak jak i pozostałych stopów) ściśle zależą od stopnia jego czystości chemicznej oraz obróbki mechanicznej i termicznej. Parametry te zestawiono ogólnie z parametrami stopów Fe-Ni w rozdziale 4 w tablicy 4, a w tablicy 2, zamieszczonej niżej, podano stałe niklu w zależności od jego czystości.



Rys. 11. Wpływ wyżarzania na magnetostrykcję niklu

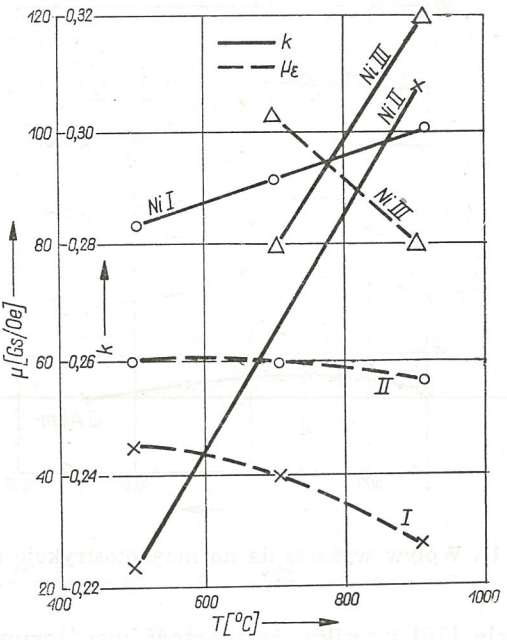
Z badań Henkla [15] wynika, że wartość współczynników k i d oraz stałej h wzrasta ze zwiększaniem temperatury wyżarzania (rys. 12 i 13). Materiał Ni I zawierał 99,94% Ni, 0,034% C i mniej niż 0,02% Mn, Ni II — 99,60% Ni, 0,25% Fe i 0,024% C, i mniej niż 0,02% Mn, Ni III — 99,35% Ni, 0,14% Fe, 0,028 C, 0,37% MN, i 0,09% Al.

Tablica 2

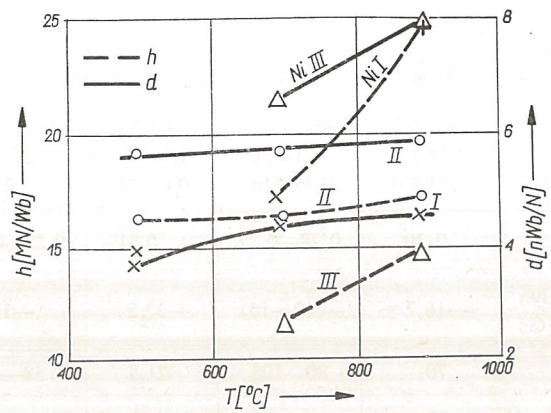
Dynamiczne własności magnetomechaniczne niklu

Skład	%	99,3 Ni 0,64 Fe <0,1 Co	99,35 Ni 0,14 Fe 0,37 Mn	99,5 Ni 0,028 C 0,09 Al	99,60 Ni 0,25 Fe <0,025 C	99,94 Ni 0,034 C <0,02 Mn
k_m	—	0,30	0,28—0,32	0,31	0,22—0,31	0,28—0,30
h_{km}	$\frac{MN}{Wb} = \frac{10^3\,\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm^2\,Gs}}$	—16,7	—(12—15)	—27,5	—17	—(14—24)
μ'_{km}	—	70	80—105	21,8	58—60	19—45
d_{km}	$\frac{nWb}{N} = \frac{\mu\,\mathrm{Gs\,cm^2}}{\mathrm{dyn}}$	—6,1	—(6,6—8,1)	—3,8	—(5,5—5,8)	—(3,9—4,5)

Dobroć mechaniczna i magnetyczna, przenikalność μ_ε oraz sprawność przetwornika maleje ze wzrostem temperatury wyżarzania (w zakresie od 500 do 1200°C). Z rysunków 12÷14 widać także, że mniejsza czystość nie zawsze przeszkadza w uzyskaniu lepszych własności magnetomechanicznych.

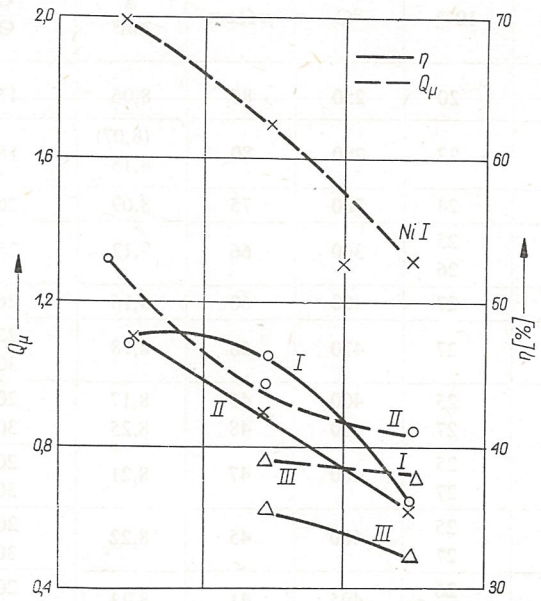


Rys. 12. Zależność współczynnika sprzężenia magnetomechanicznego k i przenikalności μ_ε od temperatury wyżarzania i czystości składu. Ni I — 99,94% Ni, Ni II — 99,60% Ni, Ni III — 99,35% Ni



Rys. 13. Stała magnetostrykcji h i czułość magnetostrykcyjna d niklu jako funkcja temperatury wyżarzania

Wartość współczynnika sprzężenia przy remanencji k_r wynosi od 0,14 do 0,23, a $d_r = 1{,}7—7{,}2$ przy zmianach przenikalności odwracalnej przy remanencji μ_r w granicach od 18 do 160 Gs/Oe. Prędkość dźwięku



Rys. 14. Dobroć magnetyczna Q_μ i sprawność η niklu w zależności od temperatury wyżarzania

w niklu może zawierać się w granicach od 4,7 do $4{,}9 \cdot 10^5$ cm/s. W tablicy 4 w pozycji Ni 100% podano ekstremalne wartości podawane dla niklu o różnym bliżej nieokreślonym stopniu czystości.

4. STOPY Fe-Ni

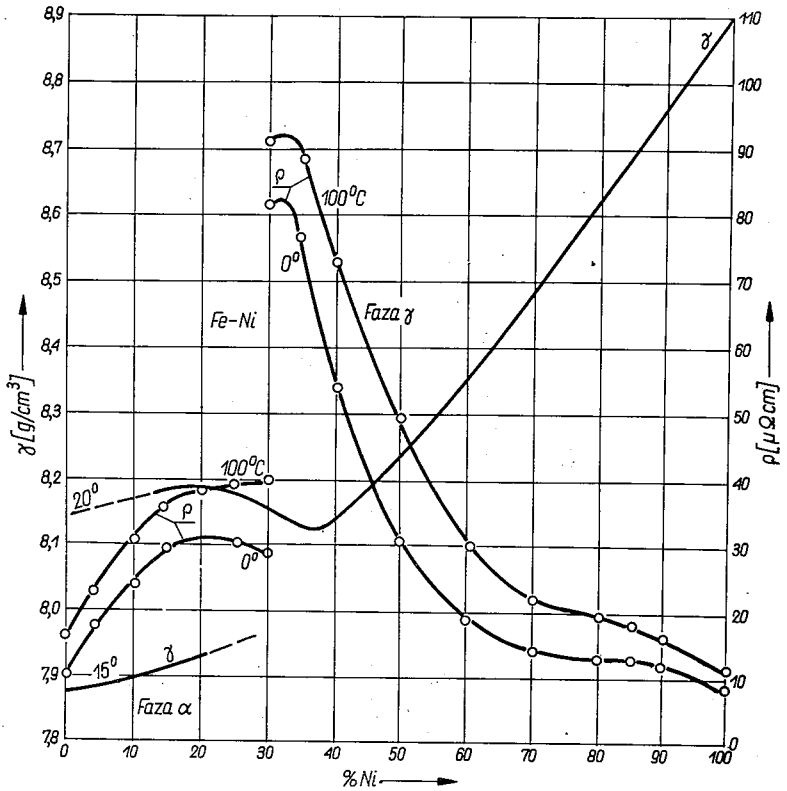
Własności mechaniczne, elektryczne i magnetyczne stopów żelazo-niklowych zostały pomierzone przez wielu badaczy, a wyniki tych prac szczegółowo omówione przez Bozortha [5].

Autor artykułu oparł się głównie na pracach amerykańskich dotyczących badań ściśle magnetostrykcyjnych [9], [10], w niektórych przypadkach uzupełniając je innymi danymi. W tablicy 3 zestawiono podstawowe parametry statyczne omawianych stopów. Stopy w zakresie do 35% Ni i pomiędzy 65 a 90% Ni, mimo niezłych parametrów statycznych, w zasadzie nie są jak dotychczas przedmiotem zainteresowania z punktu widzenia zastosowań, głównie ze względu na anomalie magnetostrykcyjną lub też małe wartości współczynników magnetomechanicznych. W tablicy 3 w kolejnych kolumnach podano zawartość niklu w procen-

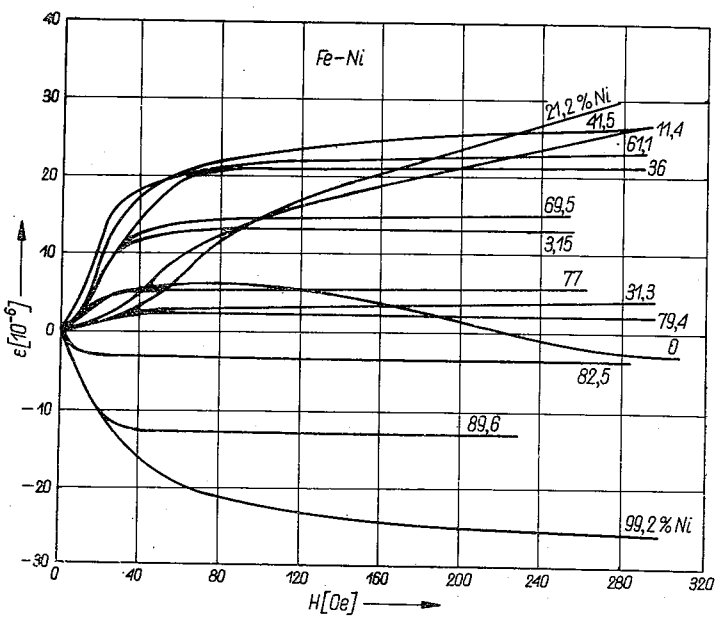
Tablica 3

Własności statyczne stopów żelazoniklowych

% Ni	B_s	ε_s	T_c	ϱ	γ	μ_p	μ_m
	kGs	10^{-6}	°C	$\mu\Omega$cm	$\frac{g}{cm^3}$	$\frac{Gs}{Oe}$	$\frac{Gs}{Oe}$
35	12	20	250	85	8,06	1500	8000
36	13	22	280	80	(8,07) 8,15	1800	9000
37,5	14	24	300	75	8,09	2000	10000
40,0	15	25 26	360	66	8,12	2500	14000 20000
42,5	15,3	27	400	60	8,16	2600	15000
43,5	15,5	27	420	58	8,18	2200 3000	16000 25000
45	16	25 27	400 440	45 48	8,17 8,25	2000 3000	18000 25000
46,5	16	25 27	460	47	8,21	2000 3000	18000
47,5	16	25 27	480	45	8,22	2000 3000	18000
48,5	16	26 27	495	41	8,23	2000 3000	18000 40000
48,9	16	25 27	500	40	8,24	2000 3000	18000 40000
50,0	16	26 27	500 510	45 39	8,22 8,25	1500 4000	17000 70000
52,5	15,8	26	530	32	8,28	1100 3000	17000
55,0	15,5	25	560	30	8,32	1000 3100	17000
60,0	15	25 23	605	24	8,38	600 3500	17000
65,0	14	19	620	21	8,45	500 5000	18000
78,0	11	7	590	16	8,58	800 12000	10000 120000
78,5	10,8	7	600	16	8,6	800 2000	10000 100000
80	10,3	2 5	570	13 15	8,62	900 9000	12000 80000
82	10	$\sim$ 0	560	14 15	8,65	900 4000	20000
90	8	—15	500	13	8,77	1000	5000
100	5,3 6,3	—30 —45	358	7 9	8,7 8,9	110 900	600 2500

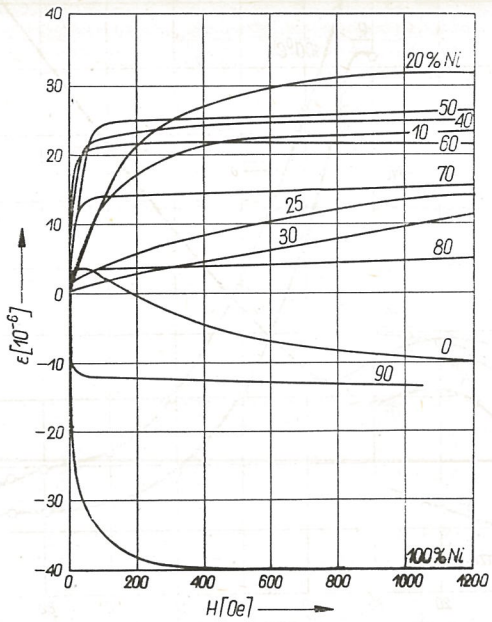


Rys. 15. Oporność właściwa i gęstość stopów układu żelazo-nikiel

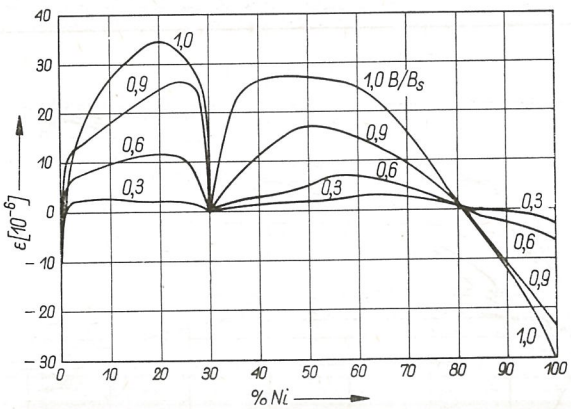


Rys. 16. Krzywe magnetostrykcji stopów Fe-Ni wg [43]

tach, indukcję nasycenia B_s, magnetostrykcję nasycenia ε_s, temperaturę Curie T_c, oporność właściwą ϱ, gęstość γ oraz początkową μ_p i maksymalną μ_m wartość przenikalności.



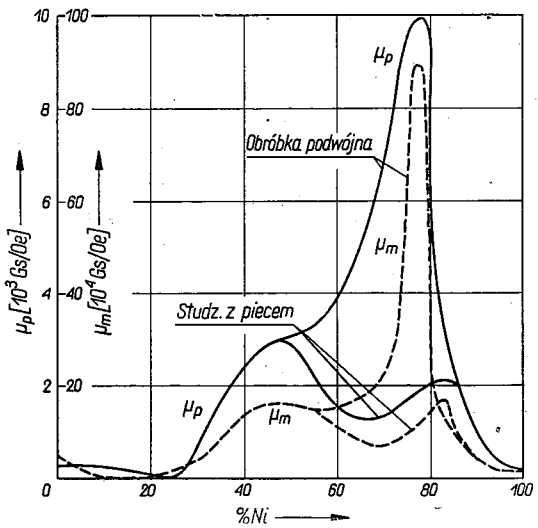
Rys. 17. Krzywe magnetostrykcji stopów Fe-Ni wg [35]



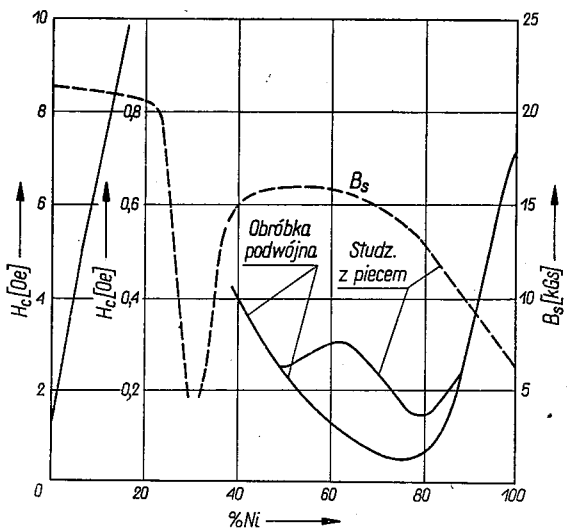
Rys. 18. Zależność magnetostrykcji od zawartości niklu

Odpowiednie zależności ϱ i γ przedstawiono na rys. 15 [5]. Na rys. 16 podano krzywe magnetostrykcji wg Schultzego [43], a na rys. 17 wg Masiyamy [35]. Zależność magnetostrykcji od zawartości niklu przedstawiono na rys. 18 [43]. Na rys. 19 podano zależności przenikalności maksymalnej i początkowej stopów Fe-Ni, a na rys. 20 zależność koercji H_c

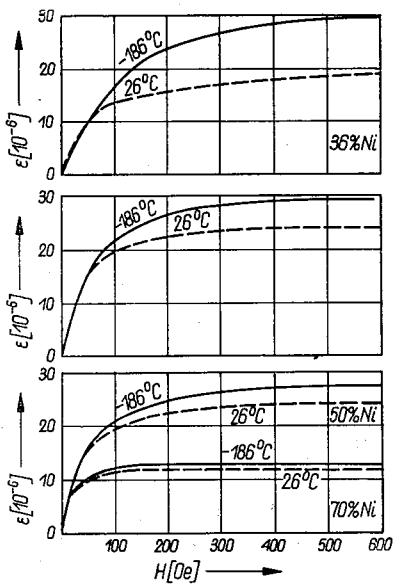
i indukcji nasycenia tych stopów [5]. Na rys. 21 podano zmiany magnetostrykcji stopów Ni-Fe dla 26 i — 186°C [17]. Na rys. 22 i 23 przedstawiono pętle histerezy magnetycznej i magnetostrykcyjnej 50% permaloju przed i po wyżarzeniu uzyskane przez autora [22], a na rys. 24 podobne zależności wg Masiyamy [34]. Zależność magnetostrykcji na-



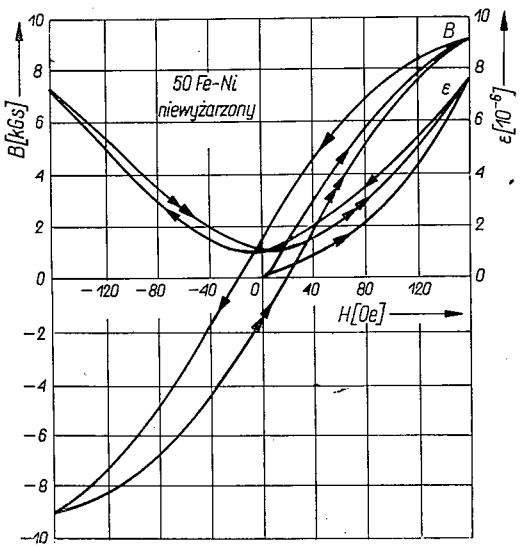
Rys. 19. Zależność przenikalności maksymalnej i początkowej stopów Fe-Ni od zawartości niklu



Rys. 20. Zależność koercji H_c i indukcji nasycenia B_s stopów Fe-Ni od składu chemicznego



Rys. 21. Magnetostrykcja kilku stopów Fe-Ni w — 186°C i 26°C

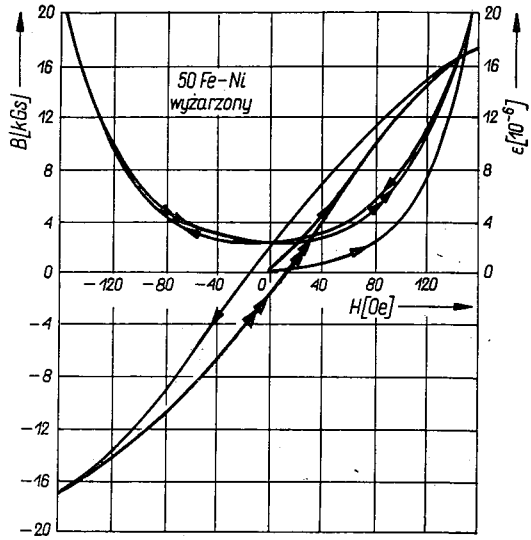


Rys. 22. Pętle histerezy magnetycznej i magnetostrykcyjnej permaloju 50-procentowego niewyżarzonego

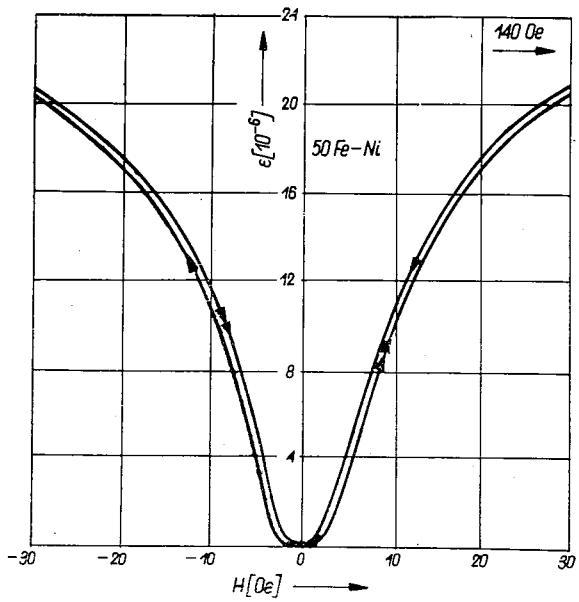
sycenia 36, 65 i 78% permaloju czeskiego (PY 36, PY 65, PY 78) od odkształceń plastycznych podano na rys. 25 [48].

Davis, Helms i Ferebee przebadali parametry dynamiczne stopów żelazo-niklowych w zakresie od 35 do 65% Ni [9], [10]. Obok pomiarów

parametrów tych stopów wyżarzanych w 1000°C w atmosferze wodoru badali także własności magnetomechaniczne tych stopów przy innych temperaturach wyżarzania, zawartych w granicach od 900 do 1220°C. Wyniki te uzupełnione danymi z innych źródeł zestawiono w tablicy 4



Rys. 23. Pętle histerezy magnetycznej i magnetostrykcyjnej permaloju 50-procentowego wyżarzonego



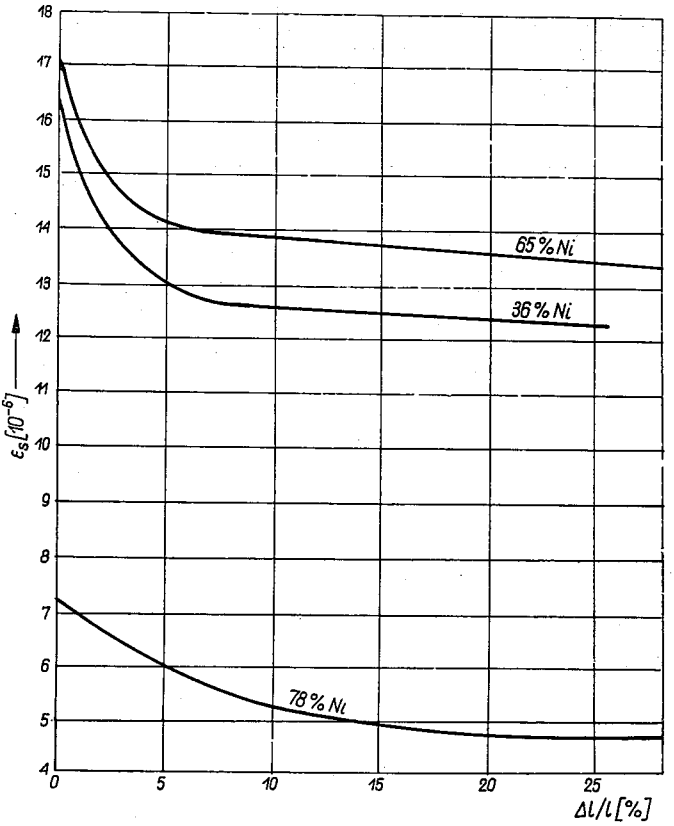
Rys. 24. Pętla histerezy magnetostrykcyjnej permaloju 50-procentowego

Tablica 4

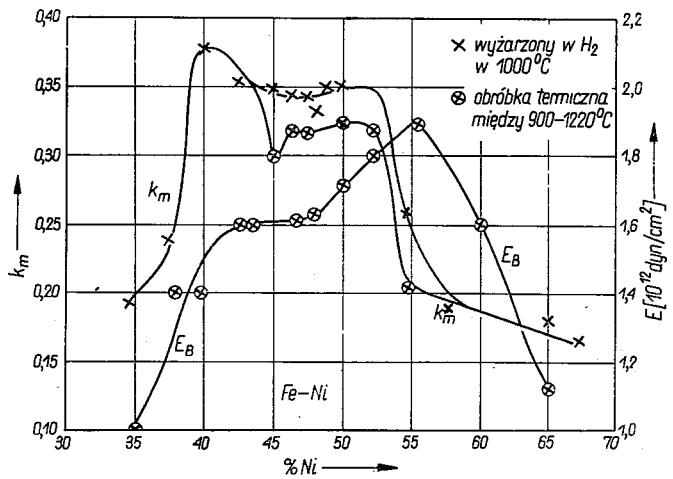
Własności dynamiczne stopów żelazoniklowych

% Ni	E_B	k_m	h_{km}	μ_{km}	d_{km}	e_{km}	g_{km}
	$10^{12}\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$	—	$10^3\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2\,\text{Gs}}$	$\frac{\text{Gs}}{\text{Oe}}$	$\frac{\mu\,\text{Gs}\,\text{cm}^2}{\text{dyn}}$	10^6 Gs	$10^{-9}\frac{1}{\text{Gs}}$
35	1,0	0,198	5,9	87 89	7,4	7,4	5,9
36	1,1				8	8,8	
37,5	1,4	0,236	7,3 7,4	121 123	8,2	11,5	5,3
40,0	1,4	0,376	11,8	107	11,3 13	16 18	8,4
42,5	1,6	0,354	12,8	101	10,2	16	8
43,5	1,6	0,352	12,4 12,6	100 102	10,1	16	7,9
45	1,6	0,29 0,35	13	102	10,3 20	16 32	8,1
46,5	1,6	0,316 0,340	11,9	88 90	8,3	13,3	7,4
47,5	1,6	0,314 0,340	12,5	82	8	13	7,8
48,5	1,65	0,330	11,4	83	7,3 22	12 35	7
48,9	1,65	0,345	11,0	98	8,1	13	6,6
50,0	1,7	0,326 0,350	12,7 13,4	72 86	7,7 30	13 51	7,7
52,5	1,8	0,318 0,340	14,1 14,2	64 73	5,2	9,4	7,8
55,0	1,9	0,202 0,265	9,9 12,8	42 63	5,3	10	6,7
60,0	1,6	0,188	10,1	43	3,6	5,7	6,3
65,0	1,1	0,174	8,3	38	3,5	3,8	7,5
100	2,0 2,2	0,22 0,32	—12 —28	22 70	—3,8 —8,1	—7,6 —16	—13

i na rys. 26—30. Współczynniki *d*, *g* i *e* w tablicy 4 i na rys. 29 i 30 zostały wyznaczone przez autora na podstawie danych z prac Davisa, Helmsa i Ferebee [9], [10] oraz zależności wyprowadzonych przez autora [24], [25]. Inne współczynniki magnetomechaniczne spotykane w literaturze mogą się różnić od tu podanych oznaczeniami, jednostkami lub współczynnikiem 4π, dlatego przy porównywaniu współczynników należy zaw-

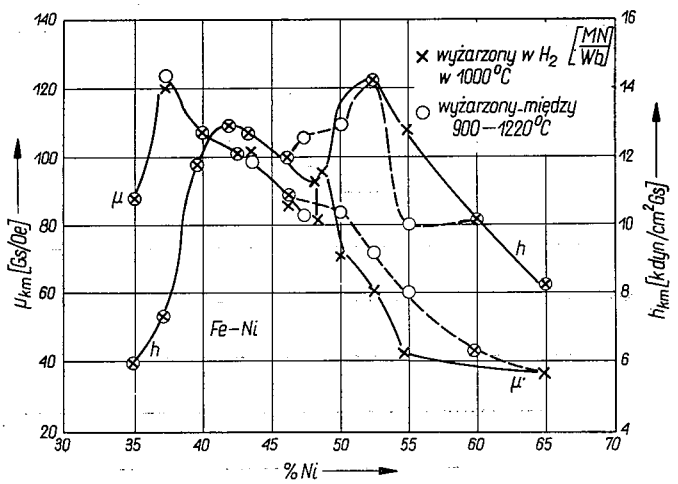


Rys. 25. Zależność magnetostrykcji nasycenia od plastycznych odkształceń 36, 65 i 78-procentowego permaloju (PY 36, PY 65, PY 78)

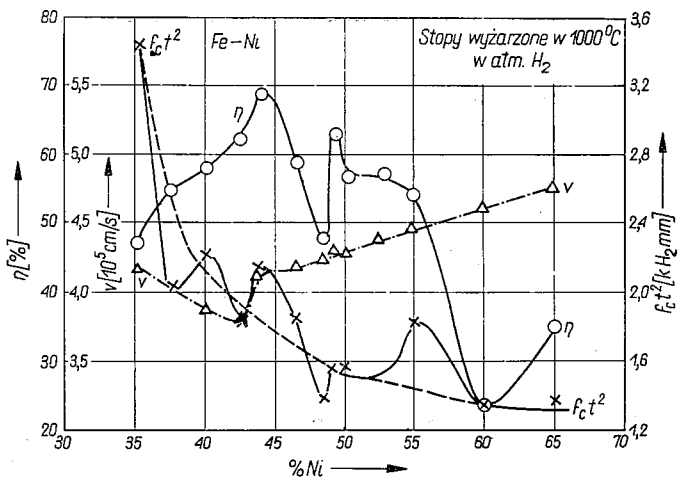


Rys. 26. Maksimum współczynnika sprzężenia magnetomechanicznego k_m i moduł sprężystości E_B stopów układu Fe-Ni

sze sprawdzić stosowane definicje. Przegląd stosowanych oznaczeń i definicji podano w pracy [23]. Należy zaznaczyć, że wszystkie z omówionych tu współczynników można spotkać w równaniach filtrów elektro-

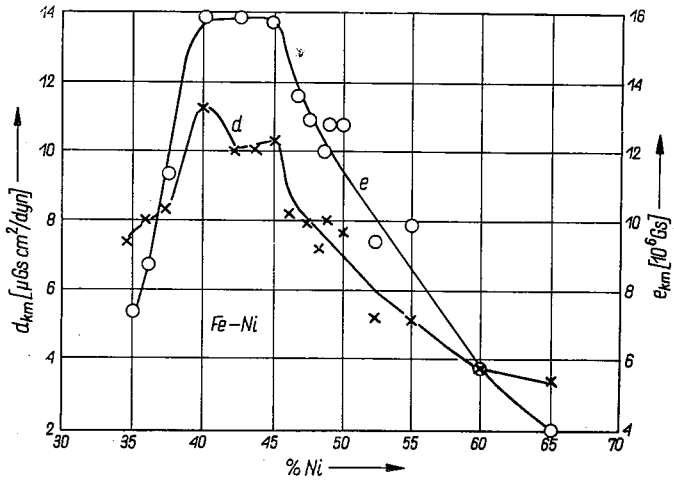


Rys. 27. Przenikalność odwracalna μ_σ i stała magnetostrykcji h stopów Fe-Ni

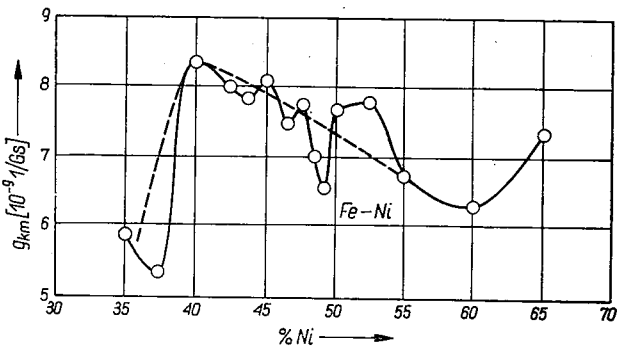


Rys. 28. Iloczyn częstotliwości charakterystycznej i kwadratu grubości blaszek $f_c t^2$, sprawność η i prędkość dźwięku v w przetwornikach wykonanych ze stopów Fe-Ni

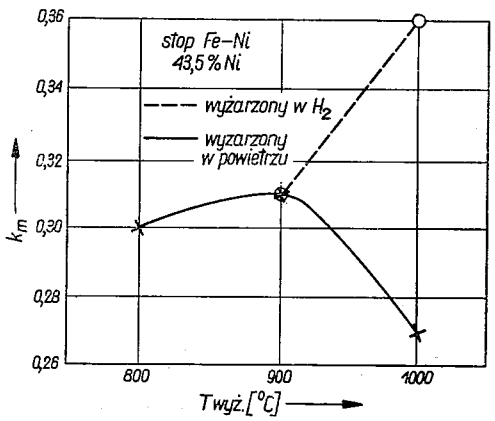
mechanicznych, przetworników ultradźwiękowych czy magnetostrykcyjnych linii opóźniających. Przy projektowaniu przetworników wymagana jest także znajomość charakterystyk omawianych współczynników w funkcji podmagnesowania.



Rys. 29. Czułość magnetostrykcyjna d i współczynnik naprężeń polowych e stopów Fe-Ni



Rys. 30. Współczynnik odkształceń indukcyjnych g stopów Fe-Ni



Rys. 31. Wpływ obróbki termicznej na wartość k stopu 43,5 Ni

Dobroć mechaniczna omawianych stopów jest b. mała w porównaniu z ferrytami [21] (w ferrytach średnio 2000—5000) i zmienia się w granicach od 15 do 80 [10].

Omawiane stopy były wyżarzane w temperaturach pomiędzy 900 a 1220°C przez 2 godziny i następnie studzone z piecem do temperatury pokojowej. Wyżarzania przeprowadzano w atmosferze wodoru i porównywano z materiałami wyżarzanymi przez 1 godzinę w powietrzu w naczyniu zamkniętym. Badano toroidalne blaszki o grubości ok. 0,35 mm o częstotliwości rezonansowej ok. 30 kHz.

5. OMÓWIENIE I WNIOSKI

Rodzaj obróbki termicznej niektórych stopów Ni-Fe wyżarzanych między 900 i 1220°C nie powoduje tak gwałtownych zmian parametrów magnetomechanicznych jak można by sądzić na podstawie innych przesłanek, [10]. Autorzy stwierdzili, że optymalne własności uzyskiwano przy wyżarzaniu w 1000°C w atmosferze wodoru i studzeniu z piecem.

Własności magnetomechaniczne zależą od struktury materiału. Zagadnienia teoretyczne związane ze zjawiskiem magnetostrykcji w oparciu o teorię Akułowa i nowsze prace zostały omówione między innymi w pracach Biełowa [3], Bozortha [5], Lee [31], Djakowa i innych. Przedstawiono tam również wiele innych nie przytaczanych tu danych eksperymentalnych. Zmiany namagnesowania wywołane nałożonym polem zmiennym na pole stałe są wywołane w znacznej części (w stopach Fe-Ni o Ni powyżej 52,5) przez ruchy 180° ścian Blocha, które nie zmieniają odkształceń, a więc wartość k w tym zakresie będzie mała [10].

Można przypuszczać, że przy przyłożeniu małych wartości pola magnetycznego na próbkę odpowiednio wyżarzoną, proces magnesowania zachodzi głównie przez ruch 180° ścian domenowych, a więc nie wymaga pracy na pokonanie anizotropii ani naprężeń magnetostrykcyjnych. Tym można by wyjaśnić b. małe wartości magnetostrykcji stopów Fe-Ni w zakresie początkowym magnesowania uzyskane przez Mc Keehana i Cioffiego [38]. Dalszy wzrost pola powoduje ruch ścian wywołany wzrostem domen, w których kierunki wektorów magnetyzacji są najbardziej zbliżone do kierunku przyłożonego pola zewnętrznego. Powoduje to zmianę uporządkowania wektorów magnesowania, nastąpi ruch 90° ścian domenowych, a więc wystąpią także magnetostrykcyjne zmiany długości. Powyżej kolana krzywej magnesowania, gdzie dominującą rolę mają obroty wektorów magnetyzacji z łatwych kierunków magnesowania do kierunku przyłożonego pola, magnetostrykcja występuje w sposób najsilniejszy. W pobliżu nasycenia procesowi porządkowania sprzeciwia się anizotropia magnetyczna i przetwornik pracujący w tym zakresie ma

niższą sprawność. Przetworniki mogą pracować też w remanencji, która może przyjmować wartości od 0,5 B_s, a nawet od zera, do B_s, zależnie od składu chemicznego, obróbki oraz stanu naprężeń. Materiały po obróbce „twardej" lub niewyżarzane mają przeważnie $B_r \approx 0{,}5\,B_s$; wektory magnetyzacji są ustawione zgodnie lub pod kątami $|\Theta| < 90°$. Remanencję prawie równą indukcji nasycenia można uzyskać w mającym ujemną magnetostrykcję niklu poddanym ściskaniu lub w rozciąganym materiale o dodatniej magnetostrykcji (permaloju 68%), a także w niektórych innych materiałach poddanych obróbce cieplnej w obecności silnego wzdłużnego pola. W materiałach tych w stanie rozmagnesowanym wektory magnetyzacji są ustawione w równych proporcjach równolegle lub antyrównolegle do pola.

Zerową lub prawie zerową remanencję można uzyskać w niklu rozciąganym lub w 60—80-procentowym permaloju ściskanym, a także w materiałach obrabianych cieplnie w poprzecznym polu magnetycznym. W tych przypadkach w stanie początkowym oraz w remanencji domeny są zorientowane prostopadle w stosunku do przykładanego pola.

Magnetostrykcja w stanie remanencji jest zazwyczaj b. mała (rys. 5÷8 i 22÷24), mimo to w przypadku pracy przy małych amplitudach, np. w przetwornikach odbiorczych, własności piezomagnetyczne materiałów mogą być bardzo dobre. Wartość magnetostrykcji zależy od obróbki cieplnej (rys. 11) i zmienia się pod wpływem przyłożonych sił.

Magnetostrykcja nasycenia zwykle maleje ze wzrostem temperatury (rys. 21) i osiąga zero w temperaturze Curie (rys. 4). Dwa wyjściowe pierwiastki permalojowe, nikiel i żelazo, wykazują w zakresie początkowym magnetostrykcję o znakach przeciwnych. Żelazo wydłuża się w kierunku przyłożonego pola, a nikiel kurczy się. Powyżej 300—600 Oe magnetostrykcja żelaza zmienia znak i w nasyceniu osiąga $-8 \cdot 10^{-6}$.

Własow i Trodin obserwowali skoki magnetyzacji i magnetostrykcji niklu [54]. Zależności między stałą anizotropii a magnetostrykcją niklu wyznaczył Brener [7], Nodtwedt [40] zajmował się ΔE efektem, a Afoszyn histerezą obrotową magnetostrykcji [1]. Pomiary magnetostrykcji w szerokim zakresie zmian temperaturowych przeprowadzali [2], [4], [53]. Podobne badania dla stali i permaloju przeprowadził Dunajew [13]. Wpływ kształtu, temperatury i naprężeń na własności magnetostrykcyjne monokryształów żelaza i niklu omówiono w pracach [8], [32], [50].

Stopy żelaza z niklem mają magnetostrykcję o $|\varepsilon_s| < 40 \cdot 10^{-6}$, przy czym magnetostrykcja ich może w funkcji pola zmieniać znak (rys. 16 i 17). Z magnetostrykcją są związane również własności magnetyczne materiału. Dużej magnetostrykcji towarzyszy pogorszenie przenikalności magnetycznej. Optimum przenikalności wypada w okolicach zerowej magnetostrykcji dla stopów o zawartości 76—78% Ni.

Obróbka termiczna ma duży wpływ na przebieg krzywej magnetostrykcji jak również na szerokość jej pętli histerezy (rys. 5÷8 i 11, 22, 28). Histerezę temperaturową magnetostrykcji niklu badali Antonow i Własow [4].

Siły zewnętrzne wpływają w sposób istotny (podobnie jak naprężenia wewnętrzne) na wartość magnetostrykcji (rys. 9). Również odkształcenia plastyczne mają wpływ na wartość magnetostrykcji. Obszerne dane na ten temat można znaleźć w pracach Paczesa i Szudy [41], [47], [48], którzy badali wpływ odkształceń elastycznych i plastycznych w niklu i permalojach.

Wpływ obróbki termomechanicznej, polegającej na wyżarzaniu materiału i przykładaniu na niego naprężeń rozciągających, na magnetostrykcję nasycenia badał dla stali 65% permaloju Dunajew [13]. Podobne badania dla obróbki termomagnetycznej przeprowadzili Głazier i Szur [14], badając 66 i 78-procentowy permaloj.

Badanie stałych magnetostrykcji stopów żelazo-niklowych przeprowadził Djakow [11]. Magnetostrykcję objętościową w niklu i żelazie omówiono między innymi w pracach [39], [44], [53].

Z dużą wartością współczynnika magnetostrykcji statycznej nie zawsze idą w parze dobre własności piezomagnetyczne.

Mc Keehan podaje dla żelaza maksymalną wartość czułości magnetostrykcyjnej równą $7{,}6 \cdot 10^{-6}$ Gs cm²/dyn, podczas gdy Bozorth podaje również wartości sześciokrotnie niższe wyznaczone w inny sposób. Nikiel ma czułość około 6 do $8 \cdot 10^{-6}$ Gs cm²/dyn, permaloj 78,5-procentowy może mieć od 1,4 do $5 \cdot 10^{-6}$ Gs cm²/dyn, a permaloje grupy 45—50% od 7 do $20 \cdot 10^{-6}$ Gs cm²/dyn. Temperatura Curie permalojów 36% jest wyższa od 250°, a oporność właściwa wynosi $85_{\mu\Omega cm}$, przy czym współczynnik sprzężenia dochodzi do 0,2. Lepsze od 36% permalojów są permaloje grupy 45—50%, które mimo mniejszej blisko o połowę oporności mają współczynnik k dochodzący do 0,30—0,35 przy dużej czułości i dużej wartości stałej magnetostrykcji. Największą wartość k wyznaczono dla stopów o 40% Ni [10], dochodzącą do 0,376. Jak już wspomniano, wartość współczynnika sprzężenia magnetomechanicznego k i innych współczynników piezomagnetycznych zależy od obróbki mechanicznej. Naprężenie wprowadzane w czasie wycinania, gięcia, szlifowania itp. czynności powodują z reguły pogorszenie wartości k. Należy więc po obróbce mechanicznej stosować odpowiednią odprężającą obróbkę cieplną. Współczynniki magnetomechaniczne, jak wiadomo, zależą od wielkości polaryzacji magnetycznej. Zależność czułości magnetostrykcyjnej między innymi przetworników niklowych i permalojowych (66%) od pola magnetycznego przedstawiono w pracy [49]. Wpływ naprężeń ściskających na częstotliwość rezonansową przetwornika niklowego omówiono w pracy [52].

Parametry magnetomechaniczne w sposób istotny zależą od obróbki cieplnej, domieszek i zanieczyszczeń [15]. Zarówno szybkie studzenie, jak i wyżarzanie w polu magnetycznym dla stopów o 40—52% Ni nieco obniża wartość k (do 10% [10]). Przy stopach o większej zawartości niklu wyżarzanie w polu może tak obniżyć k, że staje się on wartością niemierzalną (przy 65% Ni [10]), przy czym przenikalność może wzrastać nawet 70-krotnie. Związane to jest ze strukturą uporządkowaną i można to tłumaczyć ruchami ścian 180°. Wyżarzanie w wodorze w 1000°C znacznie polepsza własności k (dla 43,5% Ni $k = 0{,}36$, a przy wyżarzaniu w powietrzu — 0,27), natomiast wyżarzanie w 900°C w wodorze lub w powietrzu nie powoduje żadnych różnic (rys. 31) [10]. Stopy o 40—52,5% Ni mają własności podobne do niklu, a więc są bardziej od niego odpowiednie ze względu na deficytowość tego pierwiastka.

WYKAZ LITERATURY

1. Afoszyn W. S.: Wraszczatielnyj gistieriezis magnitostrikcji w nikiele. — Izwiestija Sibirskogo Otdielenija AN SSSR, nr 1, 1962, str. 36—42.
2. Antonow I. W., Własow A. J.: O tiempieraturnych gistieriezisach namagniczenosti i magnitostrikcji nikiela. — Fizika mietałłow i mietałłowiedienije, 12, nr 2, 1961, str. 188—192.
3. Biełow K. P.: Uprugije, tiepłowyje i elektriczeskije jawlenija w fierromagnitnych mietałłach. GIT-TL, Moskwa 1951.
4. Birss R. R., Lee E. W.: The Saturation Magnetostriction Constants of Nickel within the Temperature Range −196 to 365 °C. — Proc. Phys. Soc., vol. 76, p. 4, 1960, str. 502—506.
5. Bozorth R. M.: Ferromagnetism. D. van Nostrand Co, New York 1955.
6. Bradfield G.: Practical Applications and Measurements on Ferrite Electrochemical Transducers. — The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, vol. 104, P. B., s. nr 7, 1957, str. 558—563.
7. Brenner R.: Über einen Zusammenhung zwischen Kristallanisotropie und Magnetostriction bei Nickel. — Zeitschrift für Naturforschung, B 17a, nr 2, 1962, str. 150—154.
8. Corner W. D., Hunt G. H.: The Temperature Dependence of Magnetostriction in a Nickel Crystal. — The Proceedings of the Physical Society, vol. 68, P. 3a, 1955, str. 133—144.
9. Davis C. M. Jr, Ferebee S. F.: Effect of Composition and Processing on the Activity of Some Magnetostrictive Materials. — Journal of Applied Physics, Suppl. to vol. 30, nr 4, 1959, str. 1135—1155.
10. Davis C. M. Jr., Helms H. H. Jr., Ferebee S. F.: Dynamic Magnetostrictive Properties of Ni-Fe Alloys. — The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 29, nr 4, 1957, str. 431—434.
11. Djakow G. N.: Magnitostrikcjonnyje swojstwa binarnych spławow. — Izwiestija AN SSSR, sier, fiz. t. 22, nr 10, 1958, str. 1254—1258.
12. Dunajew F. N.: O kinietikie tiermomiechaniczeskoj obrabotki fierromagnietikow. — Izwiestija AN SSSR, sier. fiz., t. 22, nr 10, 1958, str. 1225—1230.
13. Dunajew F. N.: Tiempieraturnaja zawisimost magnitostrikcji transformatornoj stali i G5 — piermałłoju, nachodiaszczichsja pod nagruzkoj — Izwiestija Wysszych Uczebnych Zawiediennii. — Fizika, nr 4, 1961, str. 79—82.

14. Głazier A. A., Szur J. S.: O prirodie effiekta tiermomagnitnoj obrabotki w magnitnomiagkich fierromagnietikach. — Izwiestija AN SSSR, sier. fiz., t. 22, nr 10, 1958, str. 1205—1211.
15. Henkel O.: Untersuchungen an Nickel und Nickellegierungen für magnetostriktive Wandler. — Hochfrequenztechnik und Elektoakustik, B 70, nr 5, 1961, str. 177—187.
16. Honda K., Kido K.: On the Change of Length by Magnetostriction in Iron-Nickel and Iron-Cobalt Alloys. — The Science Reports of the Tohoku University, vol. 9, 1930, str. 221.
17. Honda K., Shimizu S.: On the Magnetization and the Magnetic Change of Length in Ferromagnetic Metals and Alloys at Temperatures Ranging from −186 °C to 1200 °C. — The Philosophical Magazin, [6], vol. 10, 1905, str. 548—574.
18. Hopkinson J.: Magnetic Properties of Alloys of Nickel and Iron. — Proceedings of Royal Society, vol. 47, 1889, str. 23—24.
19. Hopkinson J,. Magnetic Properties of Alloys of Nickel and Iron. — Proceedings of Royal Society, vol. 48, 1890, str. 1—13.
20. Joule J. P.: On the New Class of Magnetic Forces. — Annal Electrical Magnetism and Chemistry, vol. 8, 1842, str. 219—224.
21. Kaczkowski Z.: Ferryty magnetostrykcyjne o dużej dobroci mechanicznej. — Rozprawy Elektrotechniczne, t. 6, z. 4, 1960, str. 451—474.
22. Kaczkowski Z.: Metoda jednoczesnego pomiaru statycznych własności magnetycznych i magnetostrykcyjnych. — Przegląd Elektroniki, t. 3, nr 7, 1962, str. 409—418.
23. Kaczkowski Z.: Równania magnetostrykcyjne i ich współczynniki. — Rozprawy Elektrotechniczne, t. 7, z. 2, 1961, str. 245—275.
24. Kaczkowski Z.: The Coefficients of Magnetostrictive Equations and their Relationship. — Proceedings of Vibration Problems, vol, 2, nr 4, 1961, str. 451—468.
25. Kaczkowski Z.: Zjawiska magnetomechaniczne w materiałach magnetostrykcyjnych. — Przegląd Elektroniki, r. 2, nr 3, 1961, str. 256—278.
26. Kaczkowski Z., Smoliński A.: Ferryty magnetostrykcyjne. — Zeszyty Naukowe Nauki Polskiej, nr 20, Ferryty, 1960, str. 161—170.
27. Kaczkowski Z., Smoliński A.: Ferryty magnetostrykcyjne i ich zastosowania. — Rozprawy Elektrotechniczne, t. 6, 1960, z. 1—2, str. 77—105.
28. Kaya S., Takaki H.: Hysteresis Loops and Magnetostriction of Fe Crystals. — The Science Reports of Tohoku Imperial University, 1936, str. 314—328.
29. Kirchner H.: The Effect of Tension, Compression and Torsion on Longitudal Magnetostriction. — Ann. Physic, 5, vol. 27, 1936, str. 49—69.
30. Kirkham D.: Variation of Suscebility and Magnetostriction with Temperature and Magnetization in Nickel. — Physical Review, vol. 52, 1937, str. 1162—1167.
31. Lee E. W.: Magnetostriction and Magnetomechanical Effects. — Reports on Progress in Physics, vol. 18, 1955, str. 184—229.
32. Lee E. W.: The [110] Magnetostriction of Some Single Crystal of Iron and Silicon Iron. — The Proceeding of the Physical Society, vol. 68, P. 2A, 1955, str. 65—71.
33. Masiyama Y.: Magnetostriction of Single Crystal of Nickel. — Science Reports of Tohoku Imperial University, vol. 17, 1928, str. 945—961.
34. Masiyama Y.: On Hysteresis of Magnetostriction for Alloys of Systems Fe-Ni, Ni-Co, Fe-Co. — Science Reports of Tohoku Imperial University, vol. 26, 1937, str. 65—85.

35. Masiyama Y.: On the Magnetostriction of Iron-Nickel Alloys. — Science Reports of Tohoku Imperial University, S. 1, vol. 20, 1931, str. 574—593.
36. Matsumoto H., Nara S.: On the Coefficient of Thermal Expansion in Nickel-Cobalt and Iron-Cobalt Alloys and the Magnetostriction of Iron-Nickel Alloys. — Science Reports of the Tohoku Imperial University, vol, 16, 1927, str. 333—341.
37. McKeehan L. F.: Magnetostriction. — Journal of the Franklin Institute, vol. 202, 1926, str. 737—773.
38. McKeehan L. W., Cioffi P. P.: Magnetostriction in Permalloy. — Physical Review, vol. 28, nr 1, 1926, str. 146—157.
39. Nakamura Y., Nakajima T., Takami H.: Volume Magnetostriction in Nickel-Iron Alloys. — Journal of the Physical Society of Japan, vol. 16, 1961, nr 4, str. 840—841.
40. Nodtvedt L. H.: Magnetostrictive Effect and ΔE Effect in Nickel. — Nature, vol. 170, 1952, str. 834—835.
41. Pačes J., Šuda P.: The Influence of Elastic Deformation on Magnetostriction Constant of Nickel. — Czechoslovak Journal of Physics, vol. B 11, nr 6, 1961, str. 439—443.
42. Rankin J. S.: Magnetostriction of Various Steels. — J. Roy. Tech. Coll., Glasgow 1929, vol. 2, str. 12—19.
43. Schultze A.: Magnetostriktion I. — Zeitschrift für Physik, vol. 50, 1928, str. 488—505.
44. Snoek J. L.: Volume Magnetostriction of Iron and Nickel. — Physica, vol. 4, 1937, str. 853—862.
45. Smoliński A.: Magnetostriction and Magnetostrictive Materials. — Proceedings of the Symposium on Electroacoustic Transducers, Krynica 1958, PWN, Warszawa 1961, str. 159—173.
46. Smoliński A.: Zjawisko magnetostrykcji i materiały magnetostrykcyjne. — Rozprawy Elektrotechniczne, t. 5, 1959, z. 2, str. 211—237.
47. Šuda P., Pačes J.: The Influence of Elastic Deformation on the Magnetostriction Constant of Nickel and Iron-Nickel Alloys. — Czechoslovak Journal of Physics, vol. B 12, 1962, nr 5, str. 361—368.
48. Šuda P., Pačes J.: The Influence of Plastic Deformation on the Magnetostriction Constant of Iron-Nickel Alloy. — Czechoslovak Journal of Physics, vol. B11, 1961, nr 8, str. 602—608.
49. Szur J. S., Łużinskaja M. G., Własow K. B., Szirjajewa O. J., Zajkowa W. A.: O zawisimosti czuwstwitielnosti magnitostrikcjonnych prijomnikow od ich magnitnych charaktieristik. — Izwiestija AN SSSR, ser. fiz., t. 22, 1958, nr 10, str. 1259—1262.
50. Takaki H., Hayashi J.: The Effect of Tension on the Magnetostriction of Iron Single Crystal. — Journal of the Physical Society of Japan, vol. 13, 1958, nr 7, July, str. 703—709.
51. Webster W. L.: Magnetic Properties of Fe Crystals. — Proceedings of the Royal Society L, vol. 107A, 1925, str. 496—509.
52. Whymark R. R., Witting J. M.: Resonant Displacement of Nickel and Permendur Magnetostrictors under Static Compressive Stress. — The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 33, 1961, nr 12, str. 1720—1724.
53. Własow A. J., Antonow I. W.: Tiempieraturnyj gistieriesis magnitostrikcji nikiela i nikiel miednych spławow. — Izwiestija Sibirskogo Otdielenija AN SSSR, 1961, nr 8, str. 121—124.
54. Własow A. J., Trodin J. D.: Skaczki namagniczennosti i magnitostrikcji w nikiele. — Izwiestija AN SSSR, sier. fiz., t. 25, 1961, nr 12, str. 1514—1517.

55. Yoji N., Tetsuo N., Hideo T.: Volume Magnetostriction in Nickel-Iron Alloys. — Journal of the Physical Society of Japan, vol. 16, 1961, nr 4 str. 840—841.

Z. KACZKOWSKI

MAGNETOSTRICTIVE PROPERTIES OF Fe-Ni ALLOYS

Summary

On the basis of numerous bibliography static and dynamic magnetostrictive properties of nickel and iron-nickel alloys are discussed. The most important parameters of these materials are given in tables and charts. The alloys with 40—50% nickel have been found most suitable in a wide range of applications. The magnetomechanical properties of the above mentioned alloys are similar to those of nickel, and they contain less by half of this deficit element.

Z. KACZKOWSKI

PROPRIÉTÉS MAGNÉTOSTRICTIVES DES ALLIAGES FER-NICKEL

Résumé

En se basant sur les données de la bibliographie on a décrit les propriétés statiques et dynamiques de nickel ainsi que des alliages fer-nickel. On a donné sur les tableaux et sur les abaques les paramètres essentiels de ces matériaux et on a constaté, que les plus intéressants sont des alliages contenant 40 à 50% de nickel, qui ont des propriétés magnétomécaniques semblables à celles de nickel, tout en contenant la moitié de cet élément déficitaire.

Z. KACZKOWSKI

MAGNETOSTRIKTIVE EIGENSCHAFTEN DER EISEN-NICKEL LEGIERUNGEN

Zusammenfassung

Gestützt auf umfangreiche Literatur, wurden die statischen und dynamischen magnetostriktiven Eigenschaften des Nickels sowie der Eisen-Nickel Legierungen besprochen. Anhand von Tafeln und Zeichnungen wurden die wichtigsten Parameter dieser Stoffen angegeben, wobei festgestellt wurde, dass für die breitere Verwendung sich Legierungen mit 40—50% Nickel eignen. Diese Legierungen besitzen nämlich ähnliche magneto-mechanische Eigenschaften wie Nickel, aber enthalten weniger als die Hälfte dieses sehr gesuchten, mangelnden Grundstoffes.

З. КАЧКОВСКИ

МАГНИТОСТРИКЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЖЕЛЕЗО-НИКЕЛЕВЫХ СПЛАВОВ

Резюме

На основании многочисленной литературы описаны статические и динамические магнитострикционные свойства никеля и железо-никелевых сплавов.

Приведены в таблицах и на графиках самые важные параметры этих материалов и получено, что наиболее пригодными для широкого применения могут быть сплавы с содержимым от 40 до 50% никеля. Эти сплавы имеют похожие с никелем магнитомеханические свойства, а содержат на 50% меньше этого дефицитного элемента.

621.365.23

EUGENIUSZ HOROSZKO

Charakterystyki zewnętrzne elektrycznych pieców redukcyjnych

Rękopis dostarczono 10.7.1963

W pracy zostały wyprowadzone przez autora, przez niego nazwane charakterystyki zewnętrzne pieców redukcyjnych, oparte o wykresy Bergeona. Opisano sposób ich wyznaczania dla pieców jednofazowych, dla pieców trójfazowych symetrycznych i asymetrycznych oraz na przykładach liczbowych objaśniono sposób posługiwania się nimi przy określaniu racjonalnych warunków pracy pieca. We wnioskach końcowych podano motywy, które przekonują o prostocie i operatywności stosowania charakterystyk w praktyce.

1. WSTĘP

Elektryczne piece redukcyjne zaliczamy w elektrotermii, podobnie jak stalownicze piece łukowe, do dziedziny grzejnictwa łukowego. W teorii grzejnictwa łukowego powszechnie jest znany wykres kołowy pieca łukowego, na którego podstawie wyznacza się zwykle jego charakterystyki robocze.

Charakterystyki te mają duże praktyczne znaczenie dla każdego pieca, ponieważ określają optymalne zakresy jego pracy pod względem przelotności produkcji oraz wskaźników ekonomiczno-technicznych. Pozwalają one zatem wyznaczyć warunki racjonalnego prowadzenia pracy pieca. Z tego punktu widzenia mają one również duże praktyczne znaczenie dla pieców redukcyjnych. Jednak wyznaczanie ich w taki sposób oraz w takiej formie, jak to ma miejsce dla pieców stalowniczych, jest dla pieców redukcyjnych mało przydatne i napotyka na trudności. Wynika to z następującego stanu rzeczy.

Dla pieców stalowniczych wyznaczamy zwykle charakterystyki robocze przy pomocy próby zwarcia, która pozwala określić elektryczne parametry toru wielkoprądowego, tj. jego rezystancję i reaktancję. W ten sposób wyznaczone parametry odnoszą się do całego toru łącznie z elektrodami.

Tymczasem w piecu redukcyjnym nie można przeprowadzić próby zwarcia. Energia cieplna wydziela się w nim nie tylko w łuku elektrycz-

nym, jak to ma miejsce w piecu stalowniczym, ale również we wsadzie piecowym, a ciepło wydzielane w samych elektrodach, zanurzonych we wsadzie piecowym, zaliczyć trzeba również do energii grzewczej pieca. Fakt ten komplikuje wyznaczanie charakterystyk.

Charakterystyki robocze pieców stalowniczych wyznaczamy dla pełnego zakresu prądowego, tj. od prądu elektrod $I_e = 0$ do osiągnięcia prądu zwarcia $I_e = I_z$, który często w nich występuje podczas roztapiania złomu. Natomiast dla pieców redukcyjnych zbędny jest taki zakres prądowy charakterystyk, ponieważ nie osiąga się w nich prądów zwarcia.

Dla pieców stalowniczych ustala się zwykle na podstawie charakterystyk roboczych prądowy zakres pracy pieca, natomiast wartości napięcia dobiera się niezależnie, w oparciu o zapotrzebowanie energii cieplnej. W piecach redukcyjnych nie zachodzą tak duże zmiany zapotrzebowania ciepła jak w piecach stalowniczych, pracują one równo pod tym względem i dla wybranego zakresu prądowego dobiera się zwykle napięcia każdej fazy, które ze względu na występującą zwykle asymetrię pieca są różne. Charakterystyki, które pozwalałyby dobierać wartości tych napięć do określonego prądu łuku, byłyby dla tego celu bardzo przydatne.

2. CHARAKTERYSTYKI ZEWNĘTRZNE PIECA JEDNOFAZOWEGO

Biorąc pod uwagę podane powyżej względy autor niniejszej pracy wyprowadził innego rodzaju charakterystyki dla pieców redukcyjnych, które, w odróżnieniu ich od charakterystyk roboczych, nazwał charakterystykami zewnętrznymi. Są to graficznie przedstawione zależności zewnętrznych wielkości elektrycznych pieca, jak moc czynna, bierna, pozorna i prąd pieca — od jego współczynnika mocy. Autor wyprowadził je, wychodząc z podstawowych wykresów Bergeona, przedstawionych na rysunku 3 i opartych o charakterystyczny wykres kołowy.

Jeżeli bowiem przyjmiemy obwód zasilania jednofazowego pieca, jak na rys. 1, o napięciu zasilania $U = 100$ V i reaktacji $X = 1\ \Omega$, wówczas jego wykres kołowy przedstawia się jak na rys. 2. Jest to charakterystyczny wykres kołowy, który stanowi podstawę do sporządzania rzeczywistych wykresów kołowych i następnie charakterystyk zewnętrznych. Średnica OB wykresu na rys. 2 jest prądem zwarcia teoretycznego $I_{zt} = 100$ A.

Dla obranego punktu pracy pieca A na tym wykresie, można napisać następujące zależności matematyczne:
prąd elektrod:

$$I_e = I_{zt} \cdot \sin\varphi = 100 \sin\varphi, \qquad (1)$$

pobrana moc czynna:

$$P_c = UI\cos\varphi = 10^4 \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}10^4 \sin 2\varphi, \tag{2}$$

moc bierna pieca:

$$P_b = UI\sin\varphi = 10^4 \sin^2\varphi, \tag{3}$$

moc pozorna pieca:

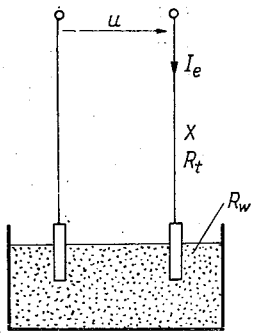
$$P = UI = 10^4 \sin\varphi, \tag{4}$$

całkowita rezystancja pieca:

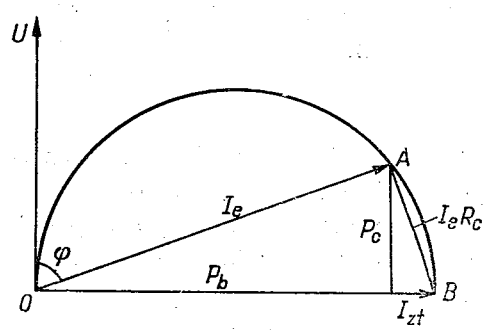
$$R_c = R_w + R_t = \operatorname{ctg}\varphi, \tag{5}$$

gdzie R_w — jest rezystancją wewnętrzną pieca, a R_t — jest rezystancją toru wielkoprądowego. Rezystancja zatem pieca jest sumą jego rezystancji wewnętrznej R_w, na którą składa się rezystancja wsadu i łuku, oraz rezystancji toru wielkoprądowego R_t.

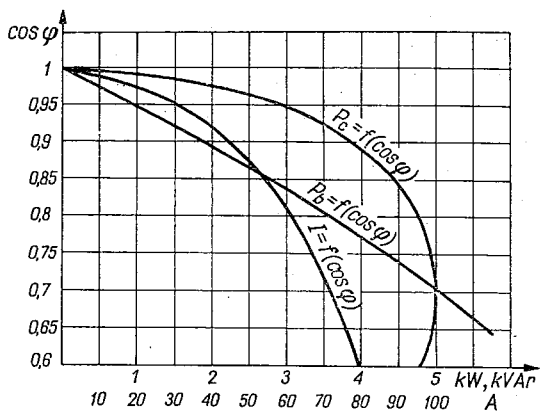
Powyższe zależności matematyczne zostały przedstawione graficznie na rysunku 3 jako funkcje $\cos\varphi$. W celu ułatwienia wykreślenia tych



Rys. 1. Obwód zasilania jednofazowego pieca



Rys. 2. Wykres kołowy X = 1 Ω, U = 100 V



Rys. 3. Wykresy Bergeona

funkcji oraz sporządzenia właściwych charakterystyk zewnętrznych zestawiono współrzędne tych wykresów w tablicy 1 dla zakresu współczynnika mocy od $\cos\varphi = 0{,}6$ do $\cos\varphi = 1$, jaki w praktyce może występować. Piece redukcyjne nie posiadają bowiem współczynnika mocy mniejszego od 0,6, a wiele z nich ma $\cos\varphi$ bliskie 1.

Tablica 1

Współrzędne wykresów Bergeona

$\cos\varphi$	R_e Ω	I A	P_c W	P_b VAr	P VA
0,60	0,7535	79,8	4806	6368	7986
0,65	0,8540	76,0	4938	5776	7604
0,707	1,000	70,7	5000	5000	7071
0,75	1,1303	66,2	4962	4382	6626
0,80	1,3270	60,1	4806	3612	6018
0,85	1,6212	52,5	4468	2745	5249
0,90	2,0655	43,5	3922	1892	4357
0,95	3,0474	31,2	2962	967	3117
1	∞	0	0	0	0

Z powyższych wykresów poznajemy znane własności pieca łukowego, a mianowicie następujące.

Do najkorzystniejszego współczynnika mocy $\cos\varphi = 1$ zbliżamy się wówczas, gdy prądowo piec odciążamy:

$$\cos\varphi = 1, \text{ gdy } I_e = 0.$$

W miarę obciążenia pieca, rośnie z prądem łuku moc czynna i bierna, przy czym dla $\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$ moc czynna osiąga maksymalną wartość, równą mocy biernej.

Moc czynną, np. 4,5 KW, można osiągnąć przy $\cos\varphi = 0{,}84$ i przy prądzie łuku $I_e = 53$ A, wówczas moc bierna wynosi 2,8 kVAr. Z wykresu czytamy również, że w tym punkcie pracy pieca jego całkowita rezystancja $R_c = 1{,}6\ \Omega$, a jeśli znalibyśmy rezystancję toru wielkoprądowego, można by obliczyć rezystancję wewnętrzną pieca:

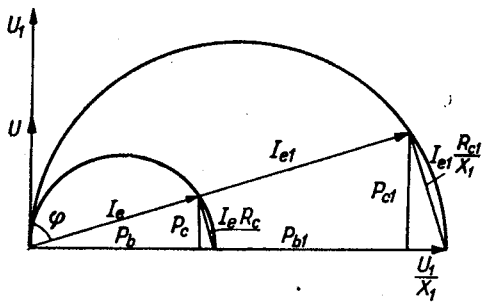
$$R_w = R_c - R_t.$$

Przedstawione na rysunku 3 wykresy zostały wykonane dla szczególnego, odbiegającego od rzeczywistości przypadku, gdy $X = 1\ \Omega$ i $U = 100$ V.

W każdym rzeczywistym przypadku, gdy $X \neq 1\ \Omega$ i $U \neq 100$ V, można wyznaczyć poszczególne wielkości elektryczne pieca przy pomocy rysunku 4, na którym przedstawiono podstawowy wykres kołowy

przy $U = 100$ V i $X = 1\ \Omega$ oraz drugi — wykonany dla $U_1 \neq 100$ V i $X_1 \neq 1\ \Omega$.

Na jego podstawie i na podstawie odpowiednich proporcji można napisać następujące zależności, pozwalające określić moce pieca, prąd i jego



Rys. 4. Wykres kołowy $X_1 \neq 1\Omega$, $U_1 \neq 100$ V

rezystancję: wielkości te zostały oznaczone przyznakiem 1 i zostały podane w jednostkach — kW, kVAr, kA i Ω, a mianowicie:

$$I_{e1} = \frac{I_e U_1}{100 X_1} \cdot 10^{-3}, \tag{6}$$

moc czynna:

$$P_{c1} = \frac{P_c}{X_1}\left(\frac{U_1}{100}\right)^2 10^{-3} = k_1 P_c \cdot 10^{-3}, \tag{7}$$

moc bierna:

$$P_{b1} = \frac{P_b}{X_1}\left(\frac{U_1}{100}\right)^2 10^{-3} = k_1 P_b \cdot 10^{-3}, \tag{8}$$

moc pozorna:

$$P_1 = \frac{P}{X_1}\left(\frac{U_1}{100}\right)^2 10^{-3} = k_1 P \cdot 10^{-3}, \tag{9}$$

rezystancja całkowita:

$$R_{c1} = X_1 \cdot \operatorname{ctg}\varphi, \tag{10}$$

rezystancja wewnętrzna pieca:

$$R_{w1} = R_{c1} - R_t = X_1 \cdot \operatorname{ctg}\varphi - R_t, \tag{11}$$

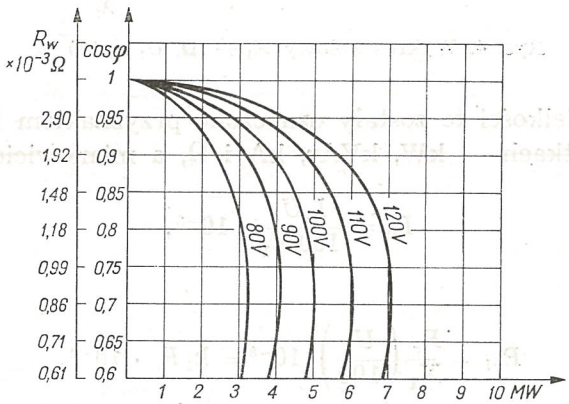
moc grzejna pieca:

$$P_{g1} = I_{e1}^2 \cdot R_{w1} = I_{e1}^2 (X_1 \cdot \operatorname{ctg}\varphi - R_t) 10^3. \tag{12}$$

W powyższych relacjach matematycznych współczynnik proporcjonalności: $k_1 = \frac{1}{X_1}\left(\frac{U_1}{100}\right)^2$, natomiast U_1 jest napięciem zasilania pieca.

Całkowitą rezystancję obwodu zasilania pieca oznaczono R_{c1}. Zawiera ona rezystancję toru wielkoprądowego uwzględnioną do uchwytów elektrod, samych elektrod od ich uchwytów w dół, łuku i wsadu piecowego. Wobec powyższego określona równaniem $R_{w1} = R_{c1} - R_t$ rezystancja wewnętrzna pieca zawiera rezystancję łuku, wsadu i elektrod. Przy jej pomocy określona moc grzejna pieca $P_{g1} = I_{e1}^2 \cdot R_{w1}$ jest elektryczną mocą doprowadzoną do pieca, zawartą w łuku, we wsadzie piecowym i w elektrodach zanurzonych w tworzywach wsadu.

Na podstawie wyżej podanych związków matematycznych oraz wykresów z rys. 3 można wyznaczyć charakterystyki zewnętrzne pieca, $P_{c1} = f(\cos\varphi)$ dla różnych napięć zasilania, otrzymywanych przy pomocy przełącznika zaczepów.



Rys. 5. Charakterystyki zewnętrzne $P_c = f(\cos\varphi)$ przy $U = \text{const}$

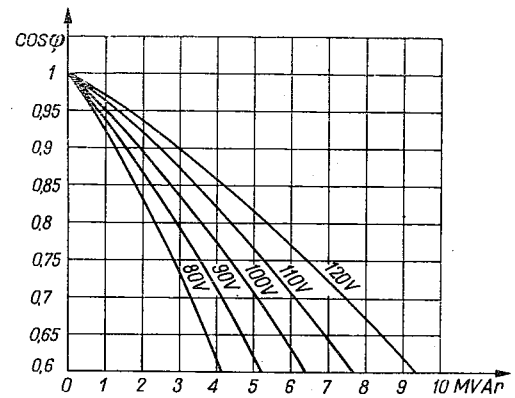
Dla przykładu sporządzono wykresy (rys. 5) dla $X_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ Ω oraz dla różnych napięć: $U_1 = 80$ V, 90 V, 100 V, 110 V i 120 V. Otrzymano wiązkę krzywych, które osiągają maksymalną moc czynną przy $\cos\varphi = 0{,}707$. Z wykresów tych czytamy, że np. moc 5,8 MW możemy otrzymać przy pracy pieca przy napięciu $U_1 = 110$ V i wówczas $\cos\varphi = 0{,}8$, lub przy napięciu 120 V, a wtedy $\cos\varphi = 0{,}88$.

Jeżeli zaś piec pobiera moc 5,8 MW przy $U_1 = 110$ V i przy $\cos\varphi = 0{,}8$, a przełączymy go na zaczep napięciowy $U_1 = 120$ V i ustawimy jego pracę na ten sam współczynnik mocy, otrzymamy moc większą — 6,9 MW.

Na osi rzędnych można nanieść wartości R_{w1}, określone równaniem (11), otrzyma się wówczas zależności $P_c = f(R_{w1})$.

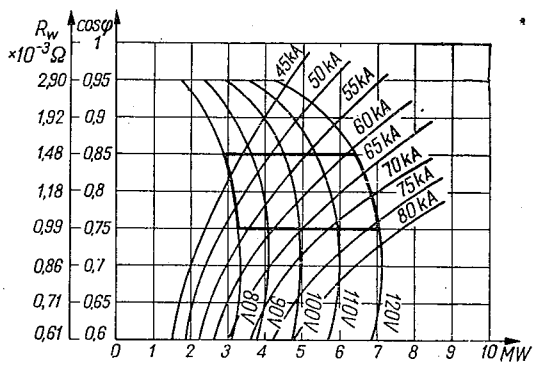
W podobny sposób można otrzymać innego rodzaju charakterystyki zewnętrzne, a mianowicie $P_{b1} = f(\cos\varphi)$. Dla tych samych napięć pokazano je na rysunku 6 jako wiązkę krzywych opadających, wychodzących z punktu $\cos\varphi = 1$. Podobny charakter miałyby graficznie przed-

stawione zależności $P_1 = f(\cos\varphi)$. Większe jednak znaczenie praktyczne mają charakterystyki mocy czynnej $P_{c1} = f(\cos\varphi)$ przy prądzie elektrod $I_{e1} = \text{const}$ i przy różnych, zmiennych napięciach zasilania pieca. Ich zdejmowanie można sobie w ten sposób wyobrazić, że zmieniając



Rys. 6. Charakterystyki zewnętrzne $P_b = f(\cos\varphi)$ przy $U = \text{const}$

zaczepami transformatora napięcia zasilania pieca utrzymujemy stałą wielkość prądu, regulując ją długością łuku. Notując pobraną moc czynną i $\cos\varphi$ otrzymamy punkty, które dadzą wiązkę krzywych przedstawionych na rysunku 7.



Rys. 7. Charakterystyki zewnętrzne $P_c = f(\cos\varphi)$ przy $U = \text{const}$ i $I = \text{const}$

Charakterystyki zewnętrzne można również wykreślić korzystając z wykresów Bergeona oraz następującej relacji matematycznej:

$$P_{c1} = I_{e1}^2 \cdot R_{c1} = I_{e1}^2 \cdot X_1 \cdot \operatorname{ctg}\varphi \cdot 10^3 = k_2 \cdot \operatorname{ctg}\varphi \cdot 10^3, \qquad (13)$$

przy czym $k_2 = I_{e1}{}^2 \cdot X_1$ jest stałym współczynnikiem proporcjonalności przy $I_{e1} = \text{const}$.

W ten sposób otrzymane krzywe dla prądów $I_{e1} = 45 \div 80$ kA i dla $X_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ Ω pokazano na rysunku 7.

Z wykresów tych czytamy, że jeśli np. chcielibyśmy doprowadzić do pieca moc 5,9 MW przy $\cos\varphi = 0{,}85$, musielibyśmy piec prowadzić przy prądzie elektrod $I_{e1} = 60$ kA.

Na rysunku 7 naniesiono również charakterystyki $P_{c1} = f(\cos\varphi)$ przy $U_1 = \text{const}$ z poprzedniego rys. 5. Otrzymaliśmy w ten sposób dwie wiązki krzywych:

$$P_{c1} = f(\cos\varphi) \text{ przy } U_1 = \text{const i przy } I_{e1} = \text{const.}$$

W tej formie charakterystyki te są już przydatne praktycznie i łatwo pozwalają dobrać wielkości elektryczne do zadanego programu pieca. Jeżeli bowiem wybrane na wykresach napięcia 80—120 V odpowiadają napięciom na poszczególnych stopniach zaczepów transformatora piecowego, a jego zakres prądu wtórnego może dochodzić do 80 kA, wówczas na podstawie rys. 7 można wybrać odpowiedni punkt pracy pieca, a więc odpowiedni zaczep transformatora i prądy elektrod. Jeżeli np. ze względu na sieć energetyczną $\cos\varphi$ pieca powinien wynosić 0,85, a ze względów produkcyjnych piec powinien pobierać moc 6,4 MW, czytamy z wykresu, że jest to możliwe przy prądzie elektrod ok. 60 kA i na zaczepie transformatora 120 V.

Należałoby jeszcze zbadać, czy prąd wybranego punktu pracy nie przekracza optymalnego prądu, przy którym moc grzejna pieca jest największa.

Dla tego celu można wykorzystać znaną własność pieca łukowego, że w optymalnym punkcie pracy kąt przesunięcia fazowego stanowi połowę kąta przesunięcia fazowego przy zwarciu i na tej podstawie obliczony współczynnik mocy wynosi:

$$\cos\varphi_{opt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{R_t}{\sqrt{R_t^2 + X_1^2}}}; \tag{14}$$

zależy on jak widać z powyższej zależności, od parametrów toru wielkoprądowego R_t i X_1.

Jeżeli w obranym przykładzie np. $R_t = 0{,}14 \cdot 10^{-3}$ Ω, to:

$$\cos\varphi_{opt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{0{,}14}{\sqrt{0{,}14^2 + 1^2}}} = 0{,}75,$$

a zatem wybrany punkt pracy pieca $\cos\varphi = 0{,}85$, jest dopuszczalny ze względu na optimum pracy pieca.

Jeżeli na rysunku 7 narysujemy linię poziomą $\cos\varphi = 0{,}75$, wówczas linia ta będzie dla rozważanego pieca linią graniczną, a praca pieca powinna się odbywać powyżej niej.

Na podstawie wykresów stwierdzamy, że praca pieca przy prądzie 80 kA jest niekorzystna, ponieważ wybierając jakikolwiek zaczep transformatora, $U_1 = 80 \div 120$ V, zawsze otrzymamy punkty pracy pieca po-

niżej linii granicznej $\cos\varphi = 0{,}75$. Zatem transformator został w tym przypadku niewłaściwie dobrany, jego prąd wtórny jest za duży.

Drugą linię graniczną można wyznaczyć wg wymagań sieci energetycznej, np. $\cos\varphi = 0{,}85$. Uwzględniając znajdujące się w dyspozycji stopnie napięć transformatora piecowego, $U_1 = 80$ V do $U_1 = 120$ V, można na rysunku 7 wyznaczyć pole dopuszczalnego zakresu pracy pieca; pole to zostało zaznaczone grubymi liniami.

Na podstawie powyższych charakterystyk można również określić moc grzejną pieca.

Dla wybranego przykładu $\cos\varphi = 0{,}85$ rezystancja wewnętrzna wynosi:

$$R_{w1} = X_1 \operatorname{tg}\varphi - R_t = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}62 - 0{,}14 \cdot 10^{-3} = 1{,}48 \cdot 10^{-3}\,\Omega,$$

a moc grzejna:

$$P_{g1} = I_{e1}^2 \cdot R_{w1} = 60^2 \cdot 1{,}48 \cdot 10^3 = 5300 \text{ kW}.$$

Jeżeli rezystancja toru wielkoprądowego $R_t = 0{,}14 \cdot 10^{-3}\ \Omega$ została wyznaczona dla odcinka do uchwytów elektrod, wówczas określona powyżej moc P_{g1} jest całkowitą mocą doprowadzoną do pieca, zużywaną na grzanie wsadu i na pokrycie cieplnych strat pieca.

W ten sposób określona moc grzejna jest jedną z podstawowych wielkości pieca redukcyjnego, decyduje ona przede wszystkim o jego przelotności, a poza tym przy danych wymiarach wanny piecowej lub też jej przestrzeni topowej jest ona bezpośrednio związana z technologią procesu elektrotermicznego, jest to wielkość zwykle wymagana dla danej technologii procesu. Mając do dyspozycji charakterystyki zewnętrzne pieca można dobrać podstawowe parametry jego pracy, jak napięcie U_1 i prąd elektrody I_{e1}, korzystne z punktu widzenia racjonalnej eksploatacji.

3. CHARAKTERYSTYKI ZEWNĘTRZNE TRÓJFAZOWEGO PIECA SYMETRYCZNEGO

W przypadku pieca trójfazowego, symetrycznej budowy, tzn. o okrągłej wannie piecowej, o elektrodach i fazach toru wielkoprądowego, umieszczonych w wierzchołkach trójkąta równobocznego, przy równych jego fazowych impedancjach i rezystancjach, oraz pracującego symetrycznymi prądami elektrod, przy symetrycznych napięciach zasilających — zadanie wyznaczenia charakterystyk nie przedstawia trudności, ponieważ wówczas można posługiwać się rozpatrywaniem jednej fazy o napięciu fazowym oraz o impedancji i rezystancji fazowej.

Jeżeli przez U_1 oznaczy się przewodowe napięcie zasilania pieca, wówczas podstawowe wielkości charakterystyk zewnętrznych wyrażają się następująco.

Prąd elektrody w kA, analogicznie do zależności (6), wynosi:

$$I_{e1} = \frac{I_e U_1}{\sqrt{3}\, 100 X_1} 10^{-3}. \tag{15}$$

Całkowita moc czynna pieca w kW przy niezmiennym napięciu U_1, analogicznie do zależności (7), wynosi:

$$P_{c1} = \frac{P_c}{X_1}\left(\frac{U_1}{100}\right)^2 10^{-3} = k_1 P_c \cdot 10^{-3}, \tag{16}$$

a natomiast całkowita moc czynna pieca przy niezmiennych prądach elektrod, analogicznie do zależności (13), wynosi:

$$P_{c1} = 3 I_{e1}^2 \cdot R_{c1} = 3 I_{e1}^2 \cdot X_1 \cdot \operatorname{ctg}\varphi \cdot 10^3 = 3 k_2 \cdot \operatorname{ctg}\varphi \cdot 10^3. \tag{17}$$

W powyższych matematycznych ujęciach zależności (15), (16) i (17) oznaczają: X_1 — fazowa reaktancja pieca w Ω, φ — kąt fazowego przesunięcia prądu elektrody I_{e1} względem napięcia $\frac{U_1}{\sqrt{3}}$ odpowiedniej fazy, a współczynniki k_1 i k_2 mają te same znaczenia, co w zależnościach (7) i (13).

Całkowitą, fazową rezystancję pieca R_{c1}, jego fazową rezystancję R_w i jego współczynnik mocy przy optymalnym prądzie $\cos\varphi$ można wyrazić podanymi już zależnościami (10, (11) i (14). Całkowita zaś moc grzejna pieca w kW, stosownie do relacji (12), wynosi:

$$P_{g1} = 3 I_{e1}^2 \cdot R_{w1} = 3 I_{e1}^2 (X_1 \cdot \operatorname{ctg}\varphi - R_t) \cdot 10^3. \tag{18}$$

Charakterystyki zewnętrzne wyznacza się posługując się podstawowymi fazowymi parametrami toru wielkoprądowego X_1 i R_t i tablicą 1, przy pomocy której oblicza się ich współrzędne wg zależności (16) i (17) dla przyjmowanych różnych wartości $\cos\varphi$. Otrzymuje się w ten sposób charakterystyki analogiczne do pokazanych na rys. 7, przy czym będą to charakterystyki całkowitej mocy pieca przy $U_1 = \text{const}$ oraz przy $I_{e1} = \text{const}$. Zakres racjonalnej pracy pieca wyznacza pole charakterystyk powyżej poziomej linii $\cos\varphi_{opt}$.

W praktyce nie posiadamy pieców redukcyjnych o zupełnie symetrycznej budowie. Wynikałoby stąd, że podane powyżej zależności są teoretyczne i metoda wyznaczania charakterystyk nie ma praktycznego zastosowania. Są jednak piece trójfazowe o małej mocy bądź też o średniej mocy i o odpowiednio, geometrycznie ukształtowanym torze wielkoprądowym, o okrągłej wannie piecowej, w których asymetria jest tak mała, że przy wyznaczaniu charakterystyk można ją pominąć. Wtedy oczywiście podana powyżej metoda będzie miała praktyczne znaczenie o wystarczającej dokładności przebiegu charakterystyk.

W przypadkach niepewnych, w których nie można z góry rozstrzygnąć o możliwości zastosowania podanej metody, wyznaczanie charakterystyk należy rozpocząć od wyznaczania albo od pomiaru stopnia asymetrii pieca. Pomiar ten pozwoli ocenić błędy, które powstaną, jeżeli się pominie asymetrię pieca.

4. CHARAKTERYSTYKI ZEWNĘTRZNE TRÓJFAZOWEGO PIECA ASYMETRYCZNEGO

Trójfazowe elektryczne piece redukcyjne, szczególnie dużej mocy, wykazują zawsze dość znaczną asymetrię, która wynika przede wszystkim z ich budowy oraz z tego, że duże są prądy elektrod, wynoszące nieraz 100 kA, a nawet czasem i więcej. Piece te buduje się jeszcze często z prostokątną wanną piecową i z rzędowym układem elektrod, a ich tory wielkoprądowe przy tak dużych prądach elektrod układa się z rur miedzianych, chłodzonych wodą. Przy takiej budowie przypadająca na każdą fazę toru wielkoprądowego reaktancja jest bardzo duża i różna od reaktancji innych faz; różnice te stają się główną przyczyną asymetrii pieca.

Zjawisko asymetrii pieca redukcyjnego jest bardzo niekorzystne zarówno dla przebiegającego w nim procesu elektrotermicznego, jak również dla zasilającej piec sieci elektroenergetycznej. Z elektrotermicznego punktu widzenia powoduje ono nierównomierny rozkład mocy grzejnej pod trzema elektrodami, co niekorzystnie wpływa na proces technologiczny. Dla sieci energetycznej zjawisko to jest wówczas niekorzystne, jeżeli dla jego zniesienia stosuje się pracę pieca przy różnych prądach elektrod. Asymetria przenosi się wtedy z pieca na sieć zasilającą, co jest niewłaściwe.

W celu zniesienia lub zmniejszenia zjawiska asymetrii w piecach redukcyjnych powszechnie są stosowane dwa sposoby:

1) Jeżeli asymetria pieca nie jest zbyt duża, np. piec jest o okrągłej wannie i średniej mocy, zasila się go z trójfazowego transformatora piecowego, o równych, przewodowych napięciach wtórnych, regulowanych równocześnie w trzech fazach przełącznikiem zaczepów. Asymetrię natomiast staramy się zmniejszyć różnym, geometrycznym ukształtowaniem faz toru wielkoprądowego.

2) W przypadku natomiast dużej asymetrii w piecach, staramy się ją znieść dobierając różne przewodowe napięcia, przy pomocy niezależnej regulacji wtórnych napięć transformatora, oddzielnymi w każdej fazie przełącznikami zaczepów.

W obu jednak przypadkach, ze względu na zasilającą sieć energetyczną, w której dopuszczalne jest tylko małe asymetryczne obciążenie poszczególnych faz, piece pracują zwykle równymi, symetrycznymi prądami elektrod.

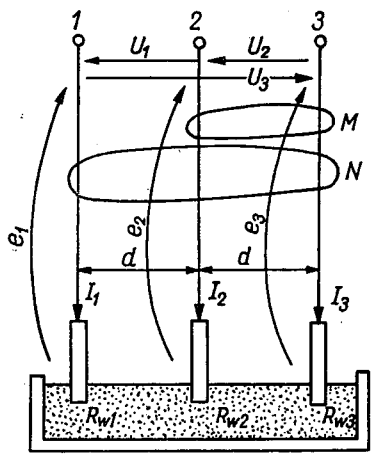
Jeżeli w praktyce pieców redukcyjnych, np. przy wyborze odpowiedniego ich punktu pracy względnie parametrów ich pracy, stosuje się charakterystyki zewnętrzne, wówczas charakterystyki te powinny uwzględniać zachodzące w nich zjawiska asymetrii. Zostało to rozpatrzone poniżej, dla pieca o obwodzie zasilania przedstawionym na rys. 8 i zasilanym napięciami przewodowymi U_1, U_2, U_3, przy czym mogą to być napięcia symetryczne w przypadku zasilania pieca trójfazowego transformatorem o równoczesnej regulacji napięć w trzech fazach lub napięcia różne w przypadku niezależnej regulacji napięć transformatora. W obu jednak przypadkach zakłada się, że prądy elektrod I_1, I_2, I_3 są symetryczne, następstwa zgodnego, a zatem można napisać:

$$\begin{aligned} I_1 &= aI_2 = a^2 I_3, \\ I_2 &= a^2 I_1 = aI_3, \\ I_3 &= aI_1 = a^2 I_2, \end{aligned} \tag{19}$$

przy czym a jest wersorem obrotowym:

$$\begin{aligned} a^2 &= -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3}, \\ a &= -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3}. \end{aligned} \tag{20}$$

Tor wielkoprądowy jest płaski, o równych odległościach d między fazą *1—2* i *2—3*, oraz o równych długościach l poszczególnych faz. W każdej



Rys. 8. Obwód zasilania trójfazowego pieca redukcyjnego

fazie toru, niezależnie od własnych, czynnych i indukcyjnych spadków napięć, powstają indukowane napięcia pochodzące od sprzężeń magnetycznych między fazami i wywołane sąsiednimi prądami. Dla uproszczenia rozpatrywanych zjawisk przyjęto, że rezystancja każdej fazy toru

jest jednakowa i wynosi r, podobnie indukcja własna każdej fazy jest równa L, natomiast indukcja wzajemna faz *1* i *2*, oraz *2* i *3* wynosi M, a faz *1* i *3* wynosi N.

Spadki napięć w poszczególnych fazach toru o długości l wynoszą:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_1}{\partial x} l &= I_1 r + I_1 j\omega L + I_2 j\omega M + I_3 j\omega N, \\
\frac{\partial e_2}{\partial x} l &= I_2 r + I_2 j\omega L + I_1 j\omega M + I_3 j\omega M, \\
\frac{\partial e_3}{\partial x} l &= I_3 r + I_3 j\omega L + I_2 j\omega M + I_1 j\omega N.
\end{aligned} \tag{21}$$

Jeżeli w powyższych równaniach uwzględni się zależność (19) i (20), wówczas otrzyma się kolejno:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_1}{\partial x} l &= I_1 r + I_1 j\omega L + I_1\left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) j\omega M + \\
&+ I_1\left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) j\omega N = I_1\left[r + \frac{1}{2}\omega\sqrt{3}(M-N) + j\omega\left(L - \frac{M+N}{2}\right)\right], \\
\frac{\partial e_2}{\partial x} l &= I_2 r + I_2 j\omega L + I_2\left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) j\omega M + \\
&+ I_2\left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) j\omega M = I_2[r + j\omega(L-M)], \\
\frac{\partial e_3}{\partial x} l &= I_3 r + I_3 j\omega L + I_3\left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) j\omega M + I_3\left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) j\omega N = \\
&= I_3\left[r - \frac{1}{2}\omega\sqrt{3}(M-N) + j\omega\left(L - \frac{M+N}{2}\right)\right].
\end{aligned} \tag{22}$$

Na podstawie powyższych równań można określić fazowe impedancje toru, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
Z_{t1} &= r + \frac{1}{2}\omega\sqrt{3}(M-N) + j\omega\left(L - \frac{M+N}{2}\right), \\
Z_{t2} &= r + j\omega(L-M), \\
Z_{t3} &= r - \frac{1}{2}\omega\sqrt{3}(M-N) + j\omega\left(L - \frac{M+N}{2}\right)
\end{aligned} \tag{23}$$

oraz jego fazowe reaktancje i rezystancje:

$$\begin{aligned}
X_{t1} &= X_{t3} = \omega\left(L - \frac{M+N}{2}\right), \\
X_{t2} &= \omega(L-M), \\
R_{t1} &= r + \frac{1}{2}\omega\sqrt{3}(M-N),
\end{aligned} \tag{24}$$

$$R_{t2} = r, \tag{25}$$

$$R_{t3} = r - \frac{1}{2}\omega\sqrt{3}(M - N)$$

Jak długo nie zmienia się konstrukcja toru wielkoprądowego oraz jego geometryczne ukształtowanie, wielkości (23), (24) i (25) pozostają stałe.

Analizując równania (23), (24) i (25) można stwierdzić, że rozpatrywany piec o obwodzie zasilania przedstawionym na rys. 8 jest asymetryczny, ponieważ różne są fazowe impedancje, reaktancje i rezystancje jego toru wielkoprądowego. Jeżelibyśmy piec zasilali symetrycznymi napięciami U_1, U_2, U_3 i obciążali go równymi fazowymi rezystancjami wewnętrznymi $R_{w1} = R_{w2} = R_{w3}$, wówczas prądy pobierane z sieci będą nierówne: $I_{e1} \neq I_{e2} \neq I_{e3}$. Jeżeli natomiast chcielibyśmy utrzymać równe prądy $I_{e1} = I_{e2} = I_{e3}$, to przy symetrycznych napięciach zasilania jest to możliwe wówczas, gdy $R_{w1} \neq R_{w2} \neq R_{w3}$. Wtedy jednak będą różne moce użyteczne w poszczególnych fazach, ogólnie $P_g = I_e^2 R_w$; piec więc pod względem elektrotermicznym jest asymetryczny: $P_{g1} \neq P_{g2} \neq P_{g3}$, natomiast pod względem energetycznym, jako odbiornik energii elektrycznej jest symetryczny: $I_{e1} = I_{e2} = I_{e3}$.

Jest to właśnie pierwszy sposób, poprzednio wymieniony, zasilania pieca. Ponieważ sposób ten jest często stosowany do małych pieców redukcyjnych, został on poniżej bliżej rozpatrzony.

Jeżeli piec pobiera z sieci równe prądy, wówczas na podstawie równań (23) można określić całkowite fazowe impedancje pieca, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= r + R_{w1} + \frac{1}{2}\omega\sqrt{3}(M - N) + j\omega\left(L - \frac{M+N}{2}\right) = Z_{t1} + R_{w1},\\
Z_2 &= r + R_{w2} + j\omega(L - M) = Z_{t2} + R_{w2},\\
Z_3 &= r + R_{w3} - \frac{1}{2}\omega\sqrt{3}(M - N) + j\omega\left(L - \frac{M+N}{2}\right) = Z_{t3} + R_{w3},
\end{aligned} \tag{26}$$

przy czym R_{w1}, R_{w2}, R_{w3} są fazowymi, wewnętrznymi rezystancjami pieca, elektrod i wsadu piecowego, liczonymi od uchwytów elektrod do punktu zerowego pieca (kąpiel stopionego wsadu). Jeżeli prądy elektrod mają być równe, wówczas pomiędzy wewnętrznymi rezystancjami pieca muszą zachodzić pewne, określone związki matematyczne. Można je znaleźć na podstawie równań kół napięć obwodu przedstawionego na rys. 8, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
U_1 &= I_1 Z_1 - I_2 Z_2,\\
U_2 &= I_2 Z_2 - I_3 Z_3,\\
U_3 &= I_3 Z_3 - I_1 Z_1.
\end{aligned} \tag{27}$$

Jeżeli w powyższych równaniach uwzględni się założenie, że napięcia zasilające są symetryczne i zgodne, a więc:

$$U_2 = a^2 U_1, \qquad U_3 = a U_1 \tag{28}$$

oraz to, że prądy mają być również symetryczne wg relacji (19), wówczas otrzymuje się:

$$U_1 = I_1 Z - I_1 a^2 Z_2, \qquad U_1 = I_1 Z_2 - I_1 \frac{1}{a} Z_3, \qquad U_1 = I_1 Z_3 - I_1 Z_1 \frac{1}{a}, \tag{29}$$

z których to równań przez kolejne wzajemne porównanie z sobą otrzymuje się zależności zachodzące między fazowymi impedancjami:

$$Z_3 = Z_2(a+1) - aZ_1, \qquad Z_1 = Z_3(a+1) - aZ_2, \qquad Z_2 = Z_1(a+1) - aZ_3. \tag{30}$$

Uwzględniając w powyższych równaniach wartość wersora a wg (20) oraz podstawiając wielkości impedancji fazowych określonych równaniami (26) otrzymuje się po przekształceniach ostateczne zależności matematyczne pomiędzy rezystancjami fazowymi pieca:

$$R_{w2} - R_{w1} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\omega(M-N), \qquad R_{w3} - R_{w2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\omega(M-N), \qquad R_{w3} - R_{w1} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,\omega(M-N). \tag{31}$$

Powyższe różnice fazowych rezystancji wewnętrznych pieca zależą jedynie od różnicy indukcji wzajemnych, natomiast nie zależą od wielkości prądów elektrod, pod tym jednak warunkiem, że prądy te w poszczególnych fazach muszą być sobie równe.

Jeżeli zatem piec redukcyjny ma obciążać sieć energetyczną symetrycznie: $I_{e1} = I_{e2} = I_{e3}$, wówczas różne muszą być fazowe rezystancje wewnętrzne pieca, a różnice zachodzące pomiędzy nimi określają równania (31).

Dla ułatwienia operowania charakterystykami zewnętrznymi pieca korzystne jest wprowadzenie pojęcia średniej rezystancji wewnętrznej:

$$R_{ws} = \frac{1}{3}(R_{w1} + R_{w2} + R_{w3}). \tag{32}$$

Wówczas rezystancje fazowe wynoszą:

$$R_{w1} = R_{ws} - \frac{2}{3}\sqrt{3}\,(M - N)\,\omega,$$

$$R_{w2} = R_{ws}, \tag{33}$$

$$R_{w3} = R_{ws} + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,(M - N)\,\omega.$$

Są one różne, największa jest rezystancja fazy 3, najmniejsza jest fazy 1. Przy równych prądach elektrod otrzymuje się różne moce użyteczne w poszczególnych fazach, największa moc przypada na fazę *3*, najmniejsza na fazę *1*, faza *3* jest mocna, faza *1* jest słaba.

Pod względem elektrotermicznym piec jest asymetryczny, a jego stopień asymetrii można określić jako:

$$n = \frac{P_{g\,max} - P_{g\,min}}{P_{gśr}}\,100\% = \frac{I_e^2 R_{w3} - I_e^2 R_{w1}}{I_e^2 R_{ws}}\,100\% = \frac{4}{3}\,\frac{M - N}{R_{ws}}\,\omega\sqrt{3}\cdot 100\%. \tag{34}$$

Stopień ten jest zależny przede wszystkim od różnicy indukcji wzajemnej faz toru wielkoprądowego, a zatem od jego geometrycznego ukształtowania.

Po powyższym przygotowaniu można już omówić stosowanie charakterystyk zewnętrznych z uwzględnieniem asymetrii rozważanego pieca w układzie wg pierwszej możliwości. Na podstawie równań (23) i (24) można skonstatować, że należy operować fazowymi charakterystykami. Ponieważ $X_{t1} = X_{t3}$, wystarczy uwzględnić dwa rodzaje charakterystyk zewnętrznych: jedne dla faz skrajnych i drugie dla fazy środkowej.

Najlepiej będzie pokazać stosowanie charakterystyk zewnętrznych asymetrycznych pieców redukcyjnych na przykładzie z praktyki. Mamy np. piec redukcyjny, zasilany z trójfazowego transformatora piecowego o mocy znamionowej $P = 5{,}5$ MVA, o napięciu pierwotnym $U_1 = 6000$ V i czterech napięciach wtórnych $U_2 = 120, 110, 100, 90$ V, zmienianych przełącznikiem zaczepów, równocześnie w trzech fazach. Wtórny prąd znamionowy wynosi $I_e = 26\,400$ A na wszystkich czterech zaczepach, napięcie zwarcia na pierwszym zaczepie wynosi $e = 4\%$. Tor wielkoprądowy jest płaski, o następujących parametrach otrzymanych z pomiarów, a mianowicie: z pomiarów fazowych mocy biernych toru otrzymano jego reaktancje fazy *1* i *3:*

$$X_{t1} = X_{t3} = 0{,}85 \cdot 10^{-3}\,\Omega \text{ i fazy } 2: X_{t2} = 0{,}56 \cdot 10^{-3}\,\Omega.$$

Natomiast z pomiarów fazowych strat mocy czynnych toru otrzymano:

$$\sqrt{3}\,\omega(M - N) = 0{,}3 \cdot 10^{-3}\,\Omega, \text{ a stąd:}$$

$$M - N = \frac{0{,}3}{314\sqrt{3}} \cdot 10^{-3} = 0{,}55 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H}.$$

oraz fazowe rezystancje toru: $R_{t1} = 0{,}35 \cdot 10^{-3}\Omega$, $R_{t2} = 0{,}20 \cdot 10^{-3}\Omega$, $R_{t3} = 0{,}05 \cdot 10^{-3}\Omega$.

W celu uzyskania korzystnego współczynnika mocy pieców redukcyjnych dobiera się ich transformatory piecowe z małym napięciem zwarcia. Wskutek tego reaktancje ich uzwojeń pierwotnych i wtórnych są małe w stosunku do reaktancji toru wielkoprądowego. Występuje to zazwyczaj w piecach redukcyjnych średnich i dużych mocy, od 3 MVA począwszy, w których prąd elektrod wynosi od 20.000 do 100.000 A i nawet więcej.

Obliczona w naszym przykładzie reaktancja transformatora odniesiona do jego wtórnej strony wynosi $X_{tr} = 1{,}01 \cdot 10^{-4}\Omega$. Przyjęto ją jako wartość średnią jednakową na wszystkich zaczepach transformatora i obliczoną z napięcia zwarcia z pominięciem rezystancji uzwojeń transformatora, jako zbyt małej.

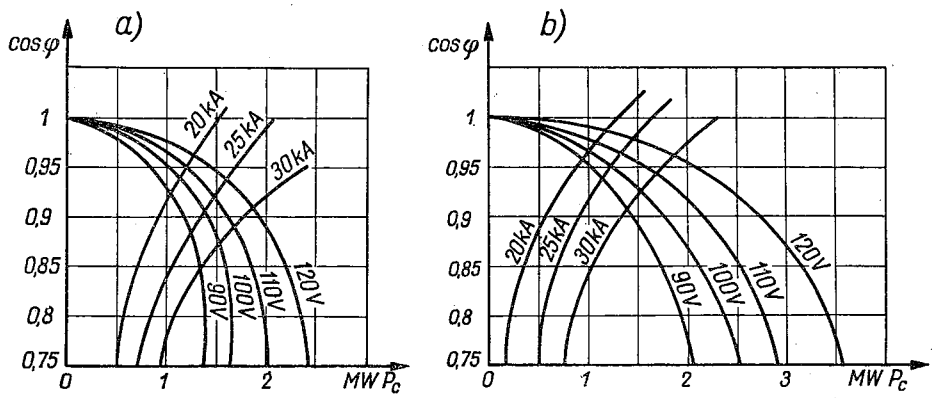
Wobec powyższego reaktancja obwodu zasilania pieca dla fazy *1* i *3* wynosi:

$$X_{c1} = X_{c3} = X_{t1} + X_{tr} = 0{,}95 \cdot 10^{-3}\Omega,$$

a dla fazy *2* wyniesie:

$$X_{c2} = X_{t2} + X_{tr} = 0{,}66 \cdot 10^{-3}\Omega.$$

W oparciu o tablice współrzędnych podstawowych wykresów Bergeona sporządzamy charakterystyki zewnętrzne dla fazy *1* i *3* i oddzielnie dla fazy *2*. Uwidoczniono je na rys. 9; są to funkcje $P_c = f(\cos\varphi)$ przy $U =$ = const i $P_c = f(\cos\varphi)$ przy $I_e =$ const, przy czym na wykresach oznaczono wartości napięć przewodowych, jakkolwiek do obliczeń przyjęto napięcia fazowe.



Rys. 9. Charakterystyki zewnętrzne pieca redukcyjnego a) fazy *1* i *3* i b) fazy *2*

Ze względu na zadaną przelotność pieca i jego proces technologiczny chcemy prowadzić jego pracę przy całkowitej mocy grzewczej, np. $P_g =$ = 4,5 MW, i przy równych prądach elektrod, $I_e = 26.000$ A. Wówczas jego średnia rezystancja wewnętrzna musi wynosić:

$$R_{wśr} = \frac{4{,}5 \cdot 10^6}{3 \cdot 26\,000^2} = 2{,}23 \cdot 10^{-3}\Omega.$$

Rezystancje wewnętrzne poszczególnych faz będą wynosić w myśl równań (33):

$$R_{w1} = \left(2{,}23 - \frac{2}{3}0{,}3\right)10^{-3} = 2{,}03 \cdot 10^{-3}\,\Omega,$$

$$R_{w2} = 2{,}23 \cdot 10^{-3}\,\Omega,$$

$$R_{w3} = \left(2{,}23 + \frac{2}{3}0{,}3\right)10^{-3} = 2{,}43 \cdot 10^{-3}\,\Omega.$$

Na tej podstawie obliczone fazowe moce grzewcze wynoszą:

$$P_{g1} = I_e^2 \cdot R_{w1} = 26\,000^2 \cdot 2{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} = 1{,}36 \text{ MW},$$

$$P_{g2} = 26\,000^2 \cdot 2{,}23 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} = 1{,}5 \text{ MW},$$

$$P_{g3} = 26\,000^2 \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} = 1{,}64 \text{ MW}.$$

Moce te są różne i stopień asymetrii pieca wynosi:

$$n = \frac{1{,}64 - 1{,}36}{1{,}5}\,100 = 19\%.$$

Przy pomocy wykreślonych na rys. 9 charakterystyk zewnętrznych można wyznaczyć punkty pracy pieca oraz jego parametry. W tym celu należy wyznaczyć fazowe współczynniki mocy wybranego punktu pracy, a mianowicie:

$$\operatorname{ctg}\varphi_1 = \frac{R_{w1} + R_{t1}}{X_{c1}} = \frac{2{,}03 + 0{,}35}{0{,}95} = 2{,}5,\ \cos\varphi_1 = 0{,}93,$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_2 = \frac{2{,}23 + 0{,}20}{0{,}66} = 3{,}7;\ \cos\varphi_2 = 0{,}96,$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_3 = \frac{2{,}43 + 0{,}05}{0{,}95} = 2{,}62;\ \cos\varphi_3 = 0{,}94.$$

Z wykresów na rys. 9 odczytujemy: $P_{c1} = 1{,}5$ MW, $P_{c2} = 1{,}63$ MW, $P_{c3} = 1{,}78$ MW; całkowita pobrana moc czynna wynosi: $P_c = 4{,}91$ MW,

$$\cos\varphi_{śr} = \frac{4{,}91 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 120 \cdot 26\,000} = 0{,}945.$$

Sprawność elektryczna pieca wynosi:

$$\eta_{el} = \frac{4{,}5}{4{,}91}\,100 = 91{,}5\%.$$

Odczytujemy również, że chcąc otrzymać prąd $I_e = 26000$ A należy transformator piecowy przełączyć na zaczep 120 V. Z wykresów widać jednak, że napięcia fazowe na skutek asymetrii nie będą równe: napięcie fazy *1* będzie nieco mniejsze od $\frac{120}{\sqrt{3}}$ V, fazy *2* większe, fazy *3* zaś mniejsze; przez interpolację można by określić ich wielkości.

Omówimy obecnie stosowanie charakterystyk zewnętrznych w drugim przypadku, kiedy piec wykazuje dużą stosunkowo asymetrię i dla jej zniesienia jest zasilany z transformatora piecowego o niezależnej regulacji napięć w poszczególnych fazach. Otrzymujemy wówczas po jego stronie wtórnej $U_1 \neq U_2 \neq U_3$, natomiast ze względu na sieć energetyczną piec pracuje równymi prądami elektrod: $I_{e1} = I_{e2} = I_{e3}$.

Wtórne napięcia transformatora regulujemy w ten sposób, że równe są fazowe moce użyteczne, a więc równe są również fazowe, wewnętrzne rezystancje pieca: $R_{w1} = R_{w2} = R_{w3}$.

Jeżeli zatem ze względu na wielkość produkcji i jej technologię chcemy prowadzić piec przy pewnej całkowitej mocy grzewczej P_g, wówczas wewnętrzna rezystancja każdej fazy wynosi

$$R_{w1} = R_{w2} = R_{w3} = R_w = \frac{P_g}{I_2^2}.$$

Jeżeli tor wielkoprądowy jest w układzie płaskim, wówczas można do niego zastosować równania (19)÷(25) i pomiarami można określić jego parametry potrzebne do wyznaczenia charakterystyk zewnętrznych.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie obliczeniowym będziemy mieć dwa rodzaje charakterystyk: jeden dla fazy *1* i *3*, oraz drugi dla fazy środkowej *2*.

Jak poprzednio obliczamy $\operatorname{ctg}\varphi_1$, $\operatorname{ctg}\varphi_2$ i $\operatorname{ctg}\varphi_3$ i stąd dalej $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$ i $\cos\varphi_3$. Na charakterystykach fazowych na krzywych $P_c = f(\cos\varphi)$ przy $I_e = \text{const}$ można już wyznaczyć punkty pracy pieca i następnie fazowe napięcie pieca e_1, e_2, e_3.

Przy pomocy rys. 10 można ustalić zaczepy transformatora piecowego, a zatem jego wtórne napięcia przewodowe, a mianowicie:

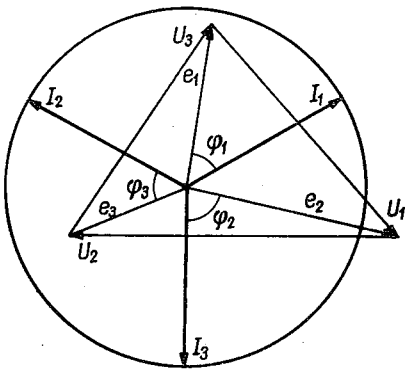
$$\begin{aligned} U_1^2 &= e_1^2 + e_2^2 - 2\,e_1, e_2 \cos(120° - \varphi_2 + \varphi_1), \\ U_2^2 &= e_2^2 + e_3^2 - 2\,e_2, e_3 \cos(120° - \varphi_3 + \varphi_2), \\ U_3^2 &= e_1^2 + e_3^2 - 2\,e_1, e_3 \cos(120° - \varphi_1 + \varphi_3). \end{aligned} \tag{35}$$

Mając wybrany punkt pracy pieca można z jego charakterystyk zewnętrznych odczytać pobierane moce czynne fazowe:
P_{c1}, P_{c2}, P_{c3} oraz na tej podstawie obliczyć całkowitą moc ΣP_c, $\cos\varphi_{śr}$ i η_{el}, a zatem wszystkie znamiona elektryczne wybranego punktu pracy.

Jak wynika z przytoczonych powyżej wywodów, wyznaczenie charakterystyk zewnętrznych pieca redukcyjnego z uwzględnieniem jego asymetrii polega przede wszystkim na określeniu parametrów jego toru wielkoprądowego: *r*, *L*, *M*, *N*. Wielkości te mogą być znane z konstrukcji pieca, z jego obliczeń albo — jeżeli chodzi o piec już zbudowany, pracujący — z pomiarów toru. Ze względu na trudności przeprowadzenia do-

kładnych obliczeń parametrów toru wielkoprądowego metoda pomiarowa jest pod tym względem korzystniejsza.

Na podstawie powyżej podanych równań (23), (24) i (25) można wyciągnąć wnioski, że dla wyznaczenia charakterystyk zewnętrznych zbędna jest znajomość poszczególnych wartości samoindukcji i indukcji wza-



Rys. 10. Wektorowy wykres napięć i prądów pieca

jemnej: L, M, N. Wystarczy bowiem, jeżeli drogą pomiarową określi się następujące wielkości:

rezystancję rzeczywistą toru r,

rezystancję sprzężoną toru $r_{sp} = \frac{1}{2}\omega\sqrt{3}\cdot(M-N)$,

reaktancję faz skrajnych $X_1 = X_3 = \left(L - \frac{M+N}{2}\right)\omega$

i reaktancję fazy środkowej $X_2 = \omega(L-M)$.

Przeprowadzić to można w następujący sposób. Wykonujemy podczas normalnej pracy pieca redukcyjnego, przy równych prądach elektrod, przy pomocy watomierza, waromierza i amperomierza pomiary prądów, mocy czynnych i biernych toru wielkoprądowego między wtórnymi zaciskami transformatora a uchwytami elektrod w trzech fazach. Z pomiarów mocy czynnych i prądu: $I_e^2 R_{t1}$, $I_e^2 R_{t2}$, $I_e^2 R_{t3}$ otrzymujemy rezystancje toru: R_{t1}, R_{t2}, R_{t3}, a korzystając z równań (25) obliczymy rzeczywistą rezystancję toru:

$$r = \frac{R_{t1} + R_{t3}}{2}.$$

Powinna ona równać się co do wartości rezystancji obliczonej z pomiaru mocy czynnej środkowej fazy toru wielkoprądowego.

Rezystancję sprzężoną obliczymy również z pomiarów mocy czynnych toru:

$$r_{sp} = \frac{R_{t1} - R_{t2}}{2} = \frac{1}{2}\omega\sqrt{3}\cdot(M-N).$$

Natomiast fazowe reaktancje obwodu zasilania pieca wyznaczymy z pomiarów fazowych mocy biernych pieca między wtórnymi zaciskami transformatora a kąpielą stopionego wsadu lub też wykładziną węglową pieca:

$$X_1 = X_3 = \frac{P_{b1}}{I_e^2}; \qquad X_2 = \frac{P_{b2}}{I_e^2}.$$

W ten sposób wyznaczone reaktancje fazowe nie są całkowitymi fazowymi reaktancjami, ponieważ nie uwzględniają reaktancji transformatora piecowego. Te ostatnie jednak można obliczyć z danych znamionowych transformatora.

Wyznaczone powyższym sposobem parametry toru wielkoprądowego względnie obwodu zasilania pieca są niezmienne przy jakichkolwiek prądach elektrod, z tym jednak zastrzeżeniem, że prądy te będą równe.

Na podstawie powyższych teoretycznych wywodów oraz przykładów obliczeniowych można stwierdzić, że zjawisko asymetrii, które zazwyczaj przejawia się w trójfazowych piecach redukcyjnych, nie jest przeszkodą w stosowaniu charakterystyk zewnętrznych. Asymetrię pieca można łatwo w nich uwzględnić, jeżeli założy się w praktyce stosowany warunek pracy pieców, że prądy elektrod mają być równe. Charakterystyki zewnętrzne oraz powyżej wyprowadzone relacje matematyczne pozwalają dla produkcji i technologii procesu elektrotermicznego wybrać odpowiedni punkt pracy pieca i jego parametry, jak napięcia wtórne transformaora piecowego, współczynnik mocy pieca, stopień asymetrii, prądy elektrod.

5. WNIOSKI

Dla praktyki pracy elektrycznych pieców redukcyjnych i dla określenia jej racjonalnych warunków jest konieczna znajomość charakterystyk pieców. Wśród znanych charakterystyk, wyprowadzone w niniejszej pracy przez autora i przez niego nazwane charakterystyki zewnętrzne są bardzo przydatne i operatywne. Na jednym bowiem rysunku wykreślone pęki krzywych określają całą płaszczyznę pracy pieca redukcyjnego dla wszystkich jego napięć i prądów elektrod. Przy ich pomocy można wybrać odpowiedni punkt pracy pieca uwzględniając przy tym wymagania energetyczne, technologiczne i techniczno-ekonomiczne. Pozwalają one również uwzględnić asymetrię pieca, jeżeli założy się w praktyce powszechnie stosowany warunek jego pracy, że prądy elektrod mają być równe. Są one zatem bardziej operatywne i łatwiejsze w stosowaniu aniżeli charakterystyki robocze stosowane do stalowniczych pieców łukowych.

Wyznaczenie charakterystyk zewnętrznych jest łatwe, polega bowiem na proporcjonalnym przeliczeniu współrzędnych podstawowych wykresów Bergeona, przedstawionych w tablicy 1, wg podanych powyżej związ-

ków matematycznych. Do ich wyznaczenia potrzebna jest znajomość parametrów obwodu zasilania, a przede wszystkim znajomość R_t — rezystancji toru wielkoprądowego i reaktancji obwodu zasilania pieca. Wielkości te najłatwiej można określić pomiarami podczas normalnej pracy pieca.

Akademia Górniczo-Hutnicza
w Krakowie
Zakład Elektrotermii

WYKAZ LITERATURY

1. Mainardis Mario: Forni Electrici, 1953.
2. Walter Fr.: Die Grundlagen der Elektrischen Lichtbogen und Widerstandsofens. 1951.
3. Paschkis V.: Industrial Electric Furnaces. 1960.
4. Dürrer R., Volkert G.: Metallurgie der Ferrolegierungen. 1953.
5. Horoszko E.: Asymetria pieców łukowych. — Przegląd Elektrot., 1961.

E. HOROSZKO

EXTERNAL CHARACTERISTICS OF ELECTRIC REDUCTION FURNACES

Summary

External characteristics of reduction furnaces, based on Bergeon's diagrams have been arrived at in the paper. The terminology is also the author's. The way to determine them for one-phase furnaces, for three-phase symmetric and asymmetric furnaces has been described as well as the way to make use of them when defininig rational working conditions of the furnace has been explained on numeric examples.

The motives that convince one of the simplicity and effectiveness of these characteristics when applied in practice are given in the final conclusions.

E. HOROSZKO

CARACTÉRISTIQUES EXTÉRIEURS DES FOURNEAUX ÉLECTRIQUES DE RÉDUCTION

Résumé

Dans l'oeuvre l'auteur a déduit, nommés par lui même, les caractéristiques extérieures des fourneaux de réduction, en se basant sur les diagrammes de Bergeon. On a décrit la méthode de les déterminer en cas des fourneaux monophases ainsi qu'en cas des fourneaux symètriques et asymètriques triphasés. On a montré

à l'aide des exemples numériques l'utilisation de ces caractéristiques à déterminer les conditions rationnelles du travail du fourneau.

Dans les conclusions finales on a présenté des motifs, qui persuadent de la simplicité et habilité d'utilisation de ces caractéristiques en pratique.

E. HOROSZKO

KENNLINIEN DER ELEKTRISCHEN REDUKTIONSÖFEN

Zusammenfassung

Im nachstehenden Aufsatz wurden vom Verfasser abgeleitet und benannt: die Kennlinien der Reduktionsöfen auf Grund von Bergeon-Diagrammen. Beschrieben wurde die Bestimmungsmethode für die Einphasigenöfen und für die symmetrischen und unsymmetrischen Dreiphasigenöfen. Erläutert wurde ferner, and Hand von Zahlenbeispielen, die Bedienungsmethode beim Definieren der rationellen Arbeitsbedingungen des Ofens. In den Schlussfolgerungen wurden die Beweggründe angegeben, welche für eine Einfachkeit und Handhabung der Kennlinien praktisches anwendung überzeugend sind.

Е. ГОРОШКО

ВНЕШНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОФАЗНЫХ РУДНОТЕРМИЧЕСКИХ ПЕЧЕЙ

Резюме

В настоящей работе выведены, названные автором внешние характеристики руднотермических печей, основанные на характеристиках Бергеона. Описана методика их построения для однофазных печей, для симметрических и асимметрических 3-х фазных печей. Приведены числовые примеры их использования для определения рационального режима работы печи.

В заключении обосновывается простоту и оперативность применения характеристик на практике.

621.394.11

ANDRZEJ KARCZMAREWICZ

Sprzężenie zwrotne informacji dla transmisji binarnej Przegląd zagadnień

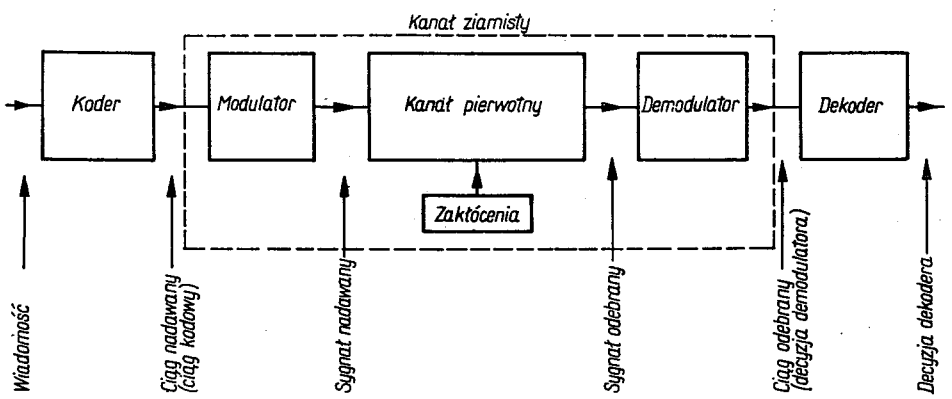
Rękopis dostarczono 1.7.1963

Przedstawiono w skrócie następujące zagadnienia związane ze stosowaniem sprzężenia zwrotnego informacji w transmisji binarnej: Modele matematyczne najczęściej spotykanych binarnych dróg transmisyjnych. Stosowanie kodów korekcyjnych, sprzężenia zwrotnego decyzji i sprzężenia zwrotnego informacji w celu usuwania błędów. Stopień zwiększenia wiarygodności przesłanej wiadomości przy stosowaniu sprzężenia zwrotnego informacji. Kodowanie dla sprzężenia zwrotnego informacji.

Zakres i sposób ujęcia poruszonych zagadnień odzwierciedla aktualny stan piśmiennictwa dotyczącego omawianej dziedziny.

1. DROGI PRZESYŁOWE TRANSMISJI BINARNEJ

Przesyłanie sygnałów binarnych jest ważną dziedziną współczesnej telekomunikacji. Zapoczątkowane przez telegrafię, jest obecnie centralnym zagadnieniem transmisji danych. Schemat połączenia pokazany na



Rys. 1.

rys. 1 uwidacznia podział problemów związanych z transmisją binarną na dwie grupy: 1) zagadnienia transmisji sygnału elementarnego; 2) zagadnienie transmisji ciągów binarnych.

W niniejszej pracy nie będziemy w zasadzie interesowali się pierwszą grupą zagadnień. Część środkową schematu z rys. 1 traktować będziemy jako jeden blok — kanał ziarnisty (w naszym przypadku binarny) posiadający określone parametry wiążące jego wyjście z wejściem. Ze względu na złożoność przyczyn wpływających na transmisję sygnałów elementarnych musimy zrezygnować ze statycznych zależności między wyjściem a wejściem kanału ziarnistego i zadowolić się zależnościami statystycznymi podającymi jedynie prawdopodobieństwo powstania określonego stanu wyjścia, gdy dany jest stan wejścia.

Tak więc kanał binarny charakteryzujemy przez podanie macierzy prawdopodobieństw warunkowych [21]:

$$\| P(\vec{y}/\vec{s}) \|, \tag{1.1}$$

gdzie:

$\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ — ciąg odebrany (decyzja demodulatora);

$\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ — ciąg nadany.

$$s_l = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad l = 1, 2, \ldots, n.$$

$$y_l = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Zakładamy przy tym, że elementy ciągów (pozycje) podawane są na wejście kanału binarnego w rytmie będącym ważnym parametrem charakterystycznym tego kanału. To ostatnie założenie pozwoli nam w dalszym ciągu rozważań nie brać pod uwagę zagadnień związanych z szerokością pasma kanału pierwotnego. Trzeba tylko pamiętać, że dane statystyczne kanału $P(\vec{y}/\vec{s})$ odnoszą się zawsze do konkretnego rytmu przesyłania sygnałów elementarnych — szybkości modulacji.

Jak łatwo się zorientować, zbiór elementów macierzy (1.1) jest w ogólnym przypadku nieprzydatny do celów praktycznych ze względu na swą objętość. Stosując pewne założenia i uproszczenia możemy uzyskać matematyczne modele kanałów binarnych, które są dostatecznie proste, a przy tym w dużym stopniu zbliżone do kanałów występujących w praktyce. Najczęściej spotykane w literaturze modele to:

— kanał bez zakłóceń,

— kanał symetryczny (o błędach niezależnych),

— kanał o błędach seryjnych (kanał Gilberta).

Określamy następująco operację sumowania ciągów:

$$\vec{a} = \vec{b} \oplus \vec{c},$$

gdzie:

$$\vec{a} = (\ldots a_l, \ldots),$$
$$\vec{b} = (\ldots b_l, \ldots), \tag{1.2}$$
$$\vec{c} = (\ldots c_l, \ldots),$$

jeżeli $a_l = b_l \oplus c_l$ dla każdego l.

Jeżeli oznaczyć

$$\vec{y} = \vec{s} \oplus \vec{z}, \tag{1.3}$$

gdzie:

$\oplus$ — oznacza dodawanie modulo 2,

$\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — ciąg błędów, to znaczy

$$z_l \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} 0, & \text{gdy } y_l = s_l, \\ 1, & \text{gdy } y_l \neq s_l, \end{cases}$$

to prawdopodobieństwo warunkowe (1.1) można zapisać w postaci:

$$P(\vec{y}/\vec{s}) = P(\vec{s} \oplus \vec{z}/\vec{s}) = P_z(\vec{z} = \vec{y} \oplus \vec{s}/\vec{s}), \tag{1.4}$$

gdzie: P_z — prawdopodobieństwo wystąpienia błędów.

Przy tworzeniu trzech modeli, które będziemy omawiać, robi się upraszczające założenie, że ciągi błędów nie zależą od ciągów nadawanych, a więc, że:

$$P_z(\vec{z}/\vec{s}) = P_z(\vec{z}). \tag{1.5}$$

Podstawiając (1.5) do (1.4) otrzymujemy:

$$P(\vec{y}/\vec{s}) = P_z(\vec{z} = \vec{y} \oplus \vec{s}). \tag{1.6}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\vec{y} \oplus \vec{s} = \vec{s} \oplus \vec{y}, \tag{1.7}$$

możemy stwierdzić, że macierz (1.1) rozpatrywanych przez nas kanałów binarnych jest symetryczna, a więc wśród swych 2^{2n} wyrazów może posiadać przy spełnionym (1.5) co najwyżej

2^n wyrazów różnych.

Kanał bez zakłóceń. Jest to model kanału idealnego, który w praktyce rzadko występuje, jednak jest użyteczny w wielu rozważaniach. Macierz (1.1) tego kanału jest jednostkowa:

$$\| P(\vec{y}/\vec{s}) \| = \| \mathbf{1} \|, \tag{1.8}$$

co oznacza, że wyrazy macierzy (1.8) dla $\vec{y} = \vec{s}$ są jedynkami, a wszystkie pozostałe wyrazy są zerami.

Z (1.6) widać, że warunek (1.8) jest równoważny warunkowi

$$P_z(\vec{z} = \vec{0}) = 1, \tag{1.9}$$

gdzie: $\vec{z} = \vec{0}$ oznacza, że $\vec{z}$ jest ciągiem samych zer.

Kanał symetryczny. Tą nazwą najczęściej oznacza się kanał binarny o błędach niezależnych i spełniający (1.5). Zakładamy, że błędy poszczególnych pozycji są niezależne, a więc, że:

$$P_z(\vec{z}) = P(z_1)P(z_2)\ldots P(z_n). \tag{1.10}$$

Założenie takie jest uzasadnione, gdy przyczyny powodujące błędy mają np. charakter szumu białego. Jeżeli do tego założymy stacjonarność procesu, a więc przyjmiemy, że $P_z(z_k)$ nie zależy od k a tylko od wartości z_k, i oznaczymy:

$$\begin{aligned} P_z(z_k = 1) &= p, \\ P_z(z_k = 0) &= q = 1 - p, \end{aligned} \tag{1.11}$$

to otrzymamy model kanału symetrycznego. Tak więc kanał symetryczny można scharakteryzować przez podanie prawdopodobieństwa bezwarunkowego p będącego prawdopodobieństwem błędu pojedynczego elementu nadanego ciągu. Oczywiście dla $p = 0$ otrzymujemy kanał bez zakłóceń. Wyrazy macierzy (1.1) możemy przedstawić w postaci:

$$P(\vec{y} = \vec{s} \oplus \vec{z}/\vec{s}) = p^{w(\vec{z})}(1-p)^{n-w(\vec{z})}, \tag{1.12}$$

gdzie: $w(\vec{z}) \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{n} z_i$ — waga ciągu $\vec{z}$ równa ilości jedynek tego ciągu [21]. Macierz kanału symetrycznego może więc mieć najwyżej $n + 1$ różnych wyrazów.

Kanał o błędach seryjnych. Pomiary przeprowadzane w związku z transmisją danych (np. [1]) wykazały, że fizycznie istniejące kanały bardzo często daleko odbiegają od modelu kanału symetrycznego. Wiele przyczyn powodujących błędy, takich jak zakłócenia od urządzeń komutacyjnych, od wyładowań atmosferycznych, od włączników sieciowych czy też nagłych zmian zasilania obejmuje swym czasem trwania szereg sąsiednich elementów przesyłanych ciągów. Błędy występują w seriach. Zakładanie niezależności błędów poszczególnych elementów staje się nieuzasadnione. Gilbert [10] zaproponował następujący model matematyczny kanału o błędach seryjnych:

Kanał może znajdować się w jednym z dwu stanów — D (dobry) lub Z (zły). Stany te tworzą łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$\begin{Vmatrix} P(D \to D) = 1 - \Lambda & P(D \to Z) = \Lambda \\ P(Z \to D) = \Pi & P(Z \to Z) = 1 - \Pi \end{Vmatrix}. \tag{1.13}$$

Stany są scharakteryzowane następująco:

Kanał w stanie D jest kanałem bez zakłóceń

$$P_z(z_l = 1/D) = 0. \tag{1.14}$$

Kanał w stanie Z jest kanałem symetrycznym o prawdopodobieństwie błędu elementu:

$$P_z(z_l = 1/Z) = p. \tag{1.15}$$

Jeżeli prawdopodobieństwa Λ i Π będą niewielkie, to model opisany przez (1.13) będzie generował serie błędów o przeciętnej długości stanu $Z - \frac{1}{\Pi}$, a stanu $D - \frac{1}{\Lambda}$.

Bezwarunkowe prawdopodobieństwo błędu elementu wynosi wobec spełnienia założeń twierdzenia ergodycznego [9] przez (1.13):

$$P_z(z = 1) = pP(Z) = p\frac{\Lambda}{\Lambda + \Pi}. \tag{1.16}$$

Wyprowadzimy wyrazy macierzy (1.1) dla kanału Gilberta, dla zilustrowania, że korzystanie z tego modelu związane jest ze skomplikowanymi obliczeniami. W ogólnym przypadku, przy spełnieniu założenia (1.5)

$$P(\vec{y}/\vec{s}) = P_z(\vec{z}) = P_z(z_1)P_z(z_2/z_1)P_z(z_3/z_1z_2) \ldots\ldots P_z(z_n/z_1, \ldots, z_{n-1}). \tag{1.17}$$

Jeżeli $z_i = 1$, to kanał znajduje się w tym momencie w stanie Z ($z_i = 0$ nie określa jednoznacznie stanu kanału) i z właściwości procesu Markowa:

$$P_z(z_n/z_1, \ldots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}) = P_z(z_n/1, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}). \tag{1.18}$$

Załóżmy, że

$$\begin{aligned} z_i &= 1, \\ z_{i+j} &= 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \\ z_{i+k+1} &= 1, \end{aligned}$$

wtedy korzystając z (1.18) możemy przedstawić $P_z(\vec{z})$ w postaci:

$$\begin{aligned} P_z(\vec{z}) &= P_z(z_1, \ldots, z_{i-1}, 1)P_z(z_{i+1}, \ldots, z_{i+k}, 1/1)P_z(z_{i+k+2}, \ldots, z_n/1) = \\ &= P_z(z_1, \ldots, z_{i-1}, 1)P_z(0^k 1/1)P_z(z_{i+k+2}, \ldots, z_n/1), \end{aligned} \tag{1.19}$$

gdzie: 0^k oznacza serię k zer.

Jak widać z (1.19), o prawdopodobieństwie ciągu decydują jedynie ilości zer między jedynkami. Zapiszmy więc ciąg

$$\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

w postaci:

$$K_0, K_1, K_2, \ldots, K_{l-1}, K_l,$$

gdzie:

K_0 — ilość zer przed pierwszą jedynką,

K_1 — ilość zer między pierwszą a drugą jedynką,

.

.

.

K_l — ilość zer za ostatnią jedynką.

Prawdopodobieństwo (1.17) możemy teraz wyrazić:

$$P_z(\vec{z}) = P_z(z=1)P_z(0^{K_0}/1)\prod_{\nu=1}^{l-1} P_z(0^{K_\nu}1/1)\,P_z(0^{K_l}/1), \tag{1.20}$$

gdzie:

$P_z(0^K/1)$ — prawdopodobieństwo warunkowe, że za jedynką wystąpi K lub więcej zer;

$P_z(0^K1/1)$ — prawdopodobieństwo warunkowe, że za jedynką wystąpi dokładnie K zer.

Oczywiście:

$$P_z(0^K1/1) = P_z(0^K/1) - P_z(0^{K+1}/1). \tag{1.21}$$

Prawdopodobieństwo $P_z(0^K/1)$ można otrzymać dla $K \geqslant 2$ ze wzoru rekurencyjnego [10]:

$$\begin{aligned} P_z(0^K/1) = {} & [(1-A)+(1-\Pi)(1-p)]P_z(0^{K-1}/1) + \\ & + (1-p)(\Pi + A - 1)P_z(0^{K-2}/1) \end{aligned} \tag{1.22}$$

znając wartości dla $K = 0,\ 1,$

$$\begin{aligned} P_z(0^0/1) &= 1, \\ P_z(0^1/1) &= \Pi p + 1 - p. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Kończąc powyższe rozważania wspomnimy tylko, że Gilbert sprawdzał zaproponowany model porównując obliczone teoretycznie i uzyskane z pomiarów istniejących kanałów krzywe częstotliwości występowania serii elementów bezbłędnych o długości nie mniejszej od danej

$$P_z(0^K/1) = f(K)$$

i uzyskał niewielkie różnice w przebiegu obu krzywych.

Podane trzy modele kanałów stanowią kolejno coraz lepsze przybliżenia w stosunku do kanałów fizycznych. Każdy następny model zawiera w sobie poprzedni jako przypadek szczególny. Chociaż model Gilberta osiąga daleko idącą zgodność z rzeczywistością, nie obejmuje niektórych istotnych problemów, które występują w związku z fizycznymi kanałami, np. nie obejmuje zagadnienia powolnych zmian warunków transmisji (np. powolnych zaników). Trzeba jednak zauważyć, że dokładność aproksymacji musi być na ogół okupiona komplikacją obliczeń i wiele prac

dotyczących zabezpieczenia transmisji binarnej przed błędami nadal całkiem świadomie opiera się na modelu kanału symetrycznego, chociaż znany jest od dawna kanał Gilberta. Tam, gdzie trzeba wziąć pod uwagę zaniki, przyjmuje się często dla uproszczenia, że w czasie zaniku wszystkie wyrazy macierzy (1.1) są równe i wynoszą:

$$P(\vec{y}/\vec{s}) = 2^{-n}, \tag{1.24}$$

czyli, że odebranie każdego ciągu jest równoprawdopodobne i to niezależnie od tego, jaki ciąg został nadany.

2. METODY KORYGOWANIA BŁĘDÓW

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

x_k — wiadomość,

$\vec{s}_k$ — ciąg kodowy odpowiadający wiadomości x_k,

$\vec{y}_l$ — ciąg odebrany ($\vec{y}_l = \vec{s}_k$, gdy $l = k$),

$\vec{z}_i$ — ciąg błędów ($\vec{z}_i = \vec{s}_k = \vec{y}_l$, gdy $i = k = l$),

x_k^* — decyzja dekodera po otrzymaniu ciągu $\vec{y}_k$,

$P_k(b)$ — prawdopodobieństwo błędu po nadaniu ciągu $\vec{s}_k$.

Jeżeli nadany został ciąg $\vec{s}_k$, to odebrany zostanie jakiś ciąg $\vec{y}_l$ różniący się od $\vec{s}_k$ o ciąg błędów $\vec{z}_i$:

$$\vec{y}_l = \vec{s}_k \oplus \vec{z}_i .$$

W szczególnym przypadku może wystąpić $\vec{z}_i = \vec{0}$ i wtedy odebrany zostanie ciąg $\vec{y}_k = \vec{s}_k$.

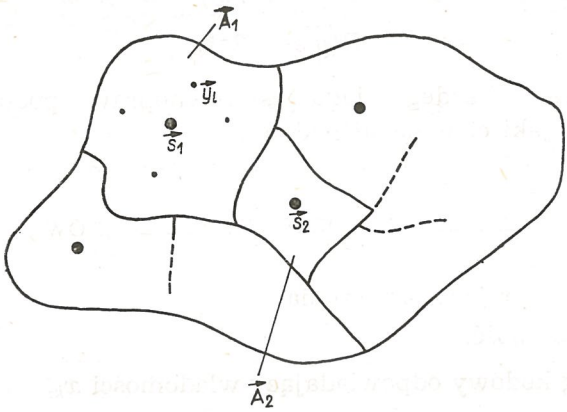
Od odbiornika (dekodera) żądamy, aby wysłał do odbiorcy decyzję x_l^* z określonym prawdopodobieństwem $1 - P_k(b)$, że decyzja ta nie jest błędna:

$$\begin{aligned} 1 - P_k(b) &= P(x_l^* = x_k/\vec{s}_k), \\ P_k(b) &= P(x_l^* \neq x_k/\vec{s}_k). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sposób spełnienia tego zadania zależy głównie od środków technicznych, jakimi dysponujemy, a przede wszystkim od rodzaju połączenia. Gdy między nadajnikiem a odbiornikiem istnieje połączenie jednokierunkowe, możliwa jest jedynie korekcja błędów przez zastosowanie kodów korekcyjnych. Gdy połączenie jest dwukierunkowe, możliwe jest zastosowanie sprzężenia zwrotnego. Omówimy powyższe metody.

2.1. Kody korekcyjne

Ciągi odbierane możemy zinterpretować jako punkty pewnej przestrzeni (rys. 2).



Rys. 2.

Przyjmujemy dla dekodera następującą regułę decyzyjną:

jeżeli ciąg odebrany $\vec{y}_l \in \vec{A}_k$, (2.2)

to decyzja $x_l^* = x_k$.

Zbiory ciągów

$$\vec{A}_k = \bigcup_{\vec{z}_i \in \vec{Z}_k} \vec{s}_k \oplus \vec{z}_i \tag{2.3}$$

nazwiemy obszarami akceptacji ciągów $\vec{s}_k$. Zbiory $\vec{Z}_k$ są to zbiory tych ciągów błędów, które zostają skorygowane po nadaniu ciągu $\vec{s}_k$. Jeżeli ciąg odebrany $\vec{y}$ należy od obszaru akceptacji jakiegoś ciągu nadanego $\vec{s}$ i tylko jednego $\vec{s}$, to zbiór ciągów $\vec{s}$ jest kodem korekcyjnym. Błędna decyzja zostanie podjęta, gdy po nadaniu $\vec{s}_k$ zostanie odebrany

$$\vec{y}_l = \vec{s}_k \oplus \vec{z}_j,$$

gdzie: $\vec{z}_j \notin \vec{Z}_k$.

Warunkowe prawdopodobieństwo błędnej decyzji [zakładamy spełnienie (1.5)] przy warunku, że nadany został $\vec{s}_k$:

$$P_k(b) = \sum_{\vec{z}_j \notin \vec{z}_k} P_z(\vec{z}_j) = 1 - \sum_{\vec{z}_j \in \vec{Z}_k} P_z(\vec{z}_j). \tag{2.4}$$

Bezwarunkowe (średnie) prawdopodobieństwo błędnej decyzji wynosi:

$$P(b) = \sum_k P(\vec{s}_k) \sum_{\vec{z}_j \notin \vec{Z}_k} P_z(\vec{z}_j). \tag{2.5}$$

Jak widać z (2.5), średnie prawdopodobieństwo błędnej decyzji zależy nie tylko od własności kanału wyrażonych przez $P_z(\vec{z}_j)$ i kodu wyrażonych przez obszary sumowania, ale także i od przesyłanego tekstu, od którego zależy $P(\vec{s}_k)$. Dla przykładu można wspomnieć, że przy takich samych zbiorach wiadomości x_k prawdopodobieństwo $P(\vec{s}_k)$ dla każdego k może być inne przy przesyłaniu komunikatów prasowych niż przy przesyłaniu danych meteorologicznych lub lotniczych. Dlatego też wygodniej jest na ogół posługiwać się prawdopodobieństwem warunkowym (2.4). Można zauważyć, że $P_k(b)$ dane przez (2.4) pokrywa się z $P(b)$ danym przez (2.5), gdy obszary akceptacji są przystające, to znaczy zbiory $\vec{Z}_k$ są identyczne dla wszystkich k. Wielkość $P_k(b)$ jest ważnym kryterium oceny jakości kodu korekcyjnego zastosowanego w konkretnym kanale. Oceniać kody niezależnie od kanału można na podstawie obszarów akceptacji $\vec{A}_k$. W zbiorze wszystkich ciągów binarnych o długości n jest

$$\binom{n}{w} \text{ ciągów o wadze } w.$$

Oznaczmy $\vec{z}^{(w)}$ ciąg o wadze w. Jeżeli zbiór $\vec{Z}_k$ dla kodu korekcyjnego dla każdego k obejmuje wszystkie ciągi $\vec{z}$ o wadze $w \leqslant v$:

$$\vec{Z}_k \supset \bigcup_{w(\vec{z}_i) \leqslant v} \vec{z}_i, \tag{2.6}$$

to mówimy, że kod ten koryguje wszystkie błędy aż do v-krotnych. Obszary akceptacji takiego kodu korygującego v-krotne błędy możemy przedstawić w postaci:

$$\vec{A}_k \supset \bigcup_{w(\vec{z}_i) \leqslant v} \vec{s}_k \oplus \vec{z}_i. \tag{2.7}$$

Wagę sumy modulo 2 dwóch ciągów często nazywa się odległością [21] tych ciągów

$$d(\vec{s}_k, \vec{s}_i) \overset{\text{df}}{=} w(\vec{s}_k \oplus \vec{s}_i). \tag{2.8}$$

Hamming [11] dał prostą interpretację geometryczną tej odległości. Korzystając z pojęcia odległości możemy sformułować następujący wniosek:

Jeżeli kod binarny ma korygować wszystkie błędy aż do v-krotnych, to odległość dwóch dowolnych ciągów kodowych nie może być mniejsza niż $2v + 1$:

$$d_{min} = 2v + 1. \tag{2.9}$$

Oczywiście ograniczenie od dołu odległości między ciągami kodowymi daje w efekcie rozwlekłość [21] kodu, a więc i spadek szybkości przesyłania informacji. Ciągi kodowe nie posiadające rozwlekłości nazywamy *ciągami informacyjnymi*. W większości przypadków wiadomości są podawane na wejście kodera właśnie w postaci ciągów informacyjnych. Jeżeli zamiana ciągów informacyjnych na ciągi kodowe odbywa się według reguł niezależnych od ciągów informacyjnych, to mamy do czynienia z kodem systematycznym. Wydaje się, że tylko takie kody mają szanse na szersze stosowanie w praktyce. Dla wielu kodów systematycznych ciągi kodowe tworzy się przez dodanie do niezmienionego ciągu informacyjnego *ciągu kontrolnego*. W dalszych rozważaniach będziemy korzystali z pojęcia ciągu kontrolnego nie stosując żadnych ograniczeń co do kodu. Jest to uzasadnione tym, że każdy kod systematyczny jest równoważny [18] kodowi, którego ciągi dadzą się jawnie rozdzielić na informacyjne i kontrolne.

2.2. Sprzężenie zwrotne — Pojęcia podstawowe

Kanał przenoszący sygnały w kierunku od źródła wiadomości do odbiorcy nazwiemy *kanałem podstawowym*, a kanał przenoszący sygnały w kierunku przeciwnym — *kanałem zwrotnym*. Wykorzystanie kanału zwrotnego do poprawy transmisji jest możliwe dzięki wprowadzeniu obok *decyzji punktowych*, będących wiadomościami, *decyzji neutralnej*, mającej sens: „zaszedł nie skorygowany błąd". W przypadku decyzji neutralnej nadajnik wysyła dodatkową informację o błędnym ciągu, którą nazwiemy *retransmisją*, ponieważ na ogół bywa to powtórzenie tego ciągu. Decyzja neutralna może być podjęta po stronie odbiorczej (kanału podstawowego), i wtedy mówimy o *sprzężeniu zwrotnym decyzji*, lub po stronie nadawczej, i wtedy mamy *sprzężenie zwrotne informacji*. Oczywiście decyzja neutralna musi być znana po obu stronach połączenia. Informacje o decyzji neutralnej nazywamy *sygnalizacją*.

Dla sprzężenia zwrotnego decyzji typowy będzie następujący schemat obiegu informacji:

— w kanale podstawowym zostaje przesłany ciąg informacyjny wraz z ciągiem kontrolnym. Dekoder podejmuje decyzję i powoduje wysłanie do nadajnika ciągu sygnalizacyjnego niosącego co najwyżej 1 bit informacji[1)] i mającego sens: „akceptuję" lub „powtórz". Możliwy jest także system nie przesyłający ciągu kontrolnego. Decyzja neutralna mająca sens: „jest dosyć prawdopodobne, że zaszedł błąd" zostaje podjęta wtedy przez demodulator na podstawie analizy odebranego sygnału.

— kanał zwrotny przenosi ciąg sygnalizacyjny z pewnym prawdo-

[1)] bit jest tu użyty w sensie jednostki miary ilości informacji.

podobieństwem błędu,

— nadajnik po otrzymaniu akceptu kontynuuje nadawanie, a po otrzymaniu „powtórz" retransmituje odpowiedni ciąg,

— odbiornik kontroluje, czy nie zaszedł nieskorygowany błąd w retransmitowanym ciągu, i powoduje wysłanie odpowiedniego ciągu sygnalizacyjnego.

Dla sprzężenia zwrotnego informacji typowy będzie następujący schemat:

— w kanale podstawowym zostaje przesłany ciąg informacyjny, odbiornik wytwarza ciąg kontrolny,

— ciąg kontrolny zostaje przesłany przez kanał zwrotny do nadajnika,

— nadajnik na podstawie otrzymanego ciągu kontrolnego podejmuje decyzję i powoduje przesłanie do odbiornika ciągu sygnalizacyjnego niosącego co najwyżej 1 bit informacji i mającego sens: „akceptuję" lub „wymaż",

— ciąg sygnalizacyjny zostaje przesłany przez kanał podstawowy i powoduje przesłanie wiadomości do odbiorcy lub jej wymazanie,

— po sygnale „akceptuję" nadajnik wysyła następną wiadomość, a po „wymaż" retransmituje odpowiedni ciąg informacyjny.

Jak widać z powyższych schematów, przy sprzężeniu zwrotnym decyzji kanał zwrotny przenosi najwyżej 1 bit, a kanał podstawowy całą część kontrolną sygnału wraz z częścią informacyjną, natomiast przy sprzężeniu zwrotnym informacji kanał podstawowy poza częścią informacyjną przenosi najwyżej 1 bit, natomiast część kontrolna jest przenoszona przez kanał zwrotny. Dla racjonalnego wykorzystania danej w konkretnym przypadku pojemności obu kanałów może być celowe stosowanie *sprzężenia zwrotnego decyzyjno-informacyjnego*. Schemat obiegu informacji przedstawia się wtedy następująco:

— w kanale podstawowym zostaje przesłany ciąg informacyjny wraz z pierwszym ciągiem kontrolnym, odbiornik podejmuje decyzję i wytwarza drugi ciąg kontrolny,

— w kanale zwrotnym jest przesyłana decyzja „powtórz" lub drugi ciąg kontrolny,

— nadajnik po otrzymaniu sygnału „powtórz" retransmituje ciąg; po otrzymaniu drugiego ciągu kontrolnego nadajnik podejmuje decyzję i przesyła do odbiornika sygnał „akceptuję" lub „wymaż"; po akcepcie nadajnik przesyła następną wiadomość, a po „wymaż" retransmituje odpowiedni ciąg.

Jak widać, ostateczne zaakceptowanie wiadomości ma miejsce wówczas, gdy i w odbiorniku i w nadajniku zostały podjęte decyzje akceptujące. Decyzja neutralna na dowolnym końcu połączenia powoduje retransmisję.

Systemy sprzężenia zwrotnego z punktu widzenia wykorzystania informacji dzielimy na *wymazujące* i *kumulujące*. Systemy wymazujące usuwają z pamięci część wiadomości, w której został wykryty błąd i traktują każdą retransmisję jako nowo przesłaną wiadomość. Systemy kumulujące wykorzystują informację zawartą w błędnie przyjętym ciągu i w przypadku retransmisji przesłana wiadomość jest obliczana na podstawie odebranych ciągów pierwszego przesłania i wszystkich powtórzeń. Wymaga to na ogół poważnego skomplikowania aparatury końcowej, ale pozwala na zmniejszenie liczby retransmisji w wypadku znacznych zakłóceń.

Dotychczas omawialiśmy zastosowanie sprzężenia zwrotnego jedynie do usuwania błędów. Trzeba więc wspomnieć, że pojawiło się kilka interesujących prac, np. [17], [24], na temat dopasowania chwilowej szybkości transmisji informacji do aktualnych parametrów kanału.

3. SPRZĘŻENIE ZWROTNE DECYZJI

3.1. Zagadnienia kodowe

Regułę decyzyjną zawierającą decyzję neutralną nazywamy regułą z wykrywaniem błędu, a kod związany z taką regułą — kodem detekcyjnym. Kod detekcyjny różni się od kodu korekcyjnego opisanego w rozdz. 2.1 tym, że nie wszystkie ciągi odebrane należą do obszarów akceptacji ciągów kodowych. Jeżeli przedstawimy ciągi jako punkty pewnej przestrzeni (rys. 3), to pomiędzy obszarami akceptacji uzyskamy strefę neutralną.

Regułę decyzyjną kodu detekcyjnego można napisać w postaci:

$$x_l^* = \begin{cases} x_k, & \text{gdy } \vec{y}_l \in \vec{A}_k, \\ R, & \text{gdy } \vec{y}_l \notin \bigcup\limits_k \vec{A}_k \end{cases} \tag{3.1}$$

gdzie:

$\vec{y}_l$ — ciąg odebrany,

$\vec{A}_k$ — obszar akceptacji ciągu kodowego $\vec{s}_k$,

R — oznacza „błąd nieskorygowany".

Zbiór dopełniający do obszarów akceptacji

$$\{1 - \bigcup_k \vec{A}_k\} = \vec{R} \tag{3.2}$$

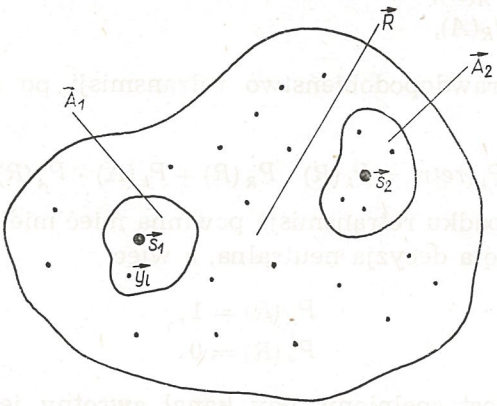
nazwiemy obszarem wątpliwości. W szczególnym przypadku obszary akceptacji kodu detekcyjnego mogą zawierać po jednym ciągu:

$$\vec{A}_k = \vec{s}_k. \tag{3.3}$$

Błędna decyzja zostanie podjęta, gdy odebrany ciąg należy do obszaru akceptacji innego ciągu kodowego niż ciąg nadany:

$$\vec{y}_l = \vec{s}_k \oplus \vec{z}_j = (\vec{s}_m \oplus \vec{z}_i) \in \vec{A}_m, \qquad (3.4)$$

$m \neq k$; $\vec{s}_k$ — ciąg nadany.



Rys. 3.

Warunkowe prawdopodobieństwo błędu detekcji wyniesie:

$$P_k(\mathrm{b}) = \sum_m P(x^* = x_m/\vec{s}_k)\,\overline{\delta_{mk}}, \qquad (3.5)$$

gdzie:

$P(x^* = x_m/\vec{s}_k)$ — prawdopodobieństwo odebrania ciągu w obszarze akceptacji $\vec{A}_m$, gdy nadany został ciąg $\vec{s}_k$,

$$\overline{\delta_{mk}} \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} 0, & \text{gdy } m = k, \\ 1, & \text{gdy } m \neq k. \end{cases}$$

Poza prawdopodobieństwem błędu detekcji interesujące są również prawdopodobieństwa akceptacji i decyzji neutralnej. Prawdopodobieństwo akceptacji:

$$P_k(A) = \sum_m P(x^* = x_m/\vec{s}_k) = \qquad (3.6)$$
$$= P_k(\mathrm{b}) + P(x^* = x_k/\vec{s}_k).$$

Prawdopodobieństwo decyzji neutralnej:

$$P_k(R) = 1 - P_k(A). \qquad (3.7)$$

Jeżeli wziąć pod uwagę, że kanał zwrotny może być z szumami, i określić prawdopodobieństwa

$$\left.\begin{aligned} &P_A(R) \text{ — warunkowe prawdopodobieństwo otrzymania z kanału zwrotnego decyzji neutralnej, gdy została podjęta decyzja punktowa,}\\ &P_R(A) \text{ — warunkowe prawdopodobieństwo otrzymania z kanału zwrotnego decyzji punktowej, gdy została podjęta decyzja neutralna,}\\ &P_A(A) = 1 - P_A(R),\\ &P_R(R) = 1 - P_R(A), \end{aligned}\right\} \quad (3.8)$$

to warunkowe prawdopodobieństwo retransmisji po nadaniu ciągu $\vec{\varepsilon}_k$ wyniesie:

$$P_k(retr) = P_k(R) \cdot P_R(R) + P_k(A) \cdot P_A(R). \quad (3.9)$$

W idealnym przypadku retransmisja powinna mieć miejsce zawsze i tylko gdy zostanie podjęta decyzja neutralna, a więc:

$$\begin{aligned} P_R(R) &= 1,\\ P_A(R) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Warunek (3.10) jest spełniony, gdy kanał zwrotny jest bez zakłóceń. W ogólnym przypadku można uzyskać przybliżone spełnienie (3.10) w granicach wyznaczonych przez pojemność kanału zwrotnego, dzięki stosowaniu dla ciągów sygnalizacyjnych kodu korekcyjnego.

Rozważając zagadnienie kodowania ciągów sygnalizacyjnych trzeba wziąć pod uwagę, że kanał zwrotny jest często wykorzystany jako kanał podstawowy dla przeciwnego kierunku transmisji. Wymienimy 3 możliwe sposoby kodowania sygnałów zwrotnych [5]:

Kodowanie niezależne. Sygnały zwrotne są kodowane zupełnie niezależnie od kodu stosowanego dla kanału podstawowego. Wyróżnienie tych sygnałów odbywa się na zasadzie podziału czasowego.

Kodowanie szeregowe. Określone pozycje każdego ciągu kodowego kanału podstawowego służą do przesyłania sygnałów zwrotnych. Jeżeli dekoder daje dla sygnału zwrotnego decyzję neutralną, to interpretuje się ją jako żądanie retransmisji.

Kodowanie równoległe. Sygnał „powtórz" jest jednym z ciągów kodowych kanału podstawowego. Przesłanie każdego innego ciągu uważa się za akceptację. Wokół ciągu „powtórz" tworzy się strefę buforową dla zmniejszenia prawdopodobieństwa przekłamania „powtórz" na „akceptuję". Jeżeli zostanie odebrany ciąg leżący w strefie buforowej, to interpretuje się go jako „powtórz". Strefa buforowa może dać znaczne zwiększenie pewności pracy systemu kosztem niewielkiego powiększenia rozwlekłości. Na przykład powiększenie rozwlekłości nie przekroczy jednego elementu na ciąg kodowy, jeżeli promień strefy buforowej będzie mniejszy od połowy długości ciągu.

3.2. Błędy w systemach sprzężenia zwrotnego decyzji

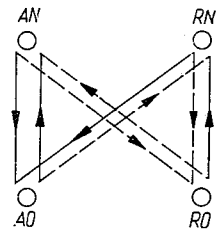
Przeprowadzając analizę błędów dogodnie jest posłużyć się diagramem stanów układu [5] — rys. 4. Układ może znajdować się w jednym z czterech stanów:

AN — nadajnik otrzymał z kanału zwrotnego akceptację i wyśle następny ciąg,

RN — nadajnik otrzymał sygnał „powtórz" i powtórzy ostatnio wysłany ciąg,

AO — odbiornik otrzymał z kanału podstawowego sygnał w obszarze akceptacji i wyśle sygnał „akceptuję" do nadajnika,

RO — odbiornik otrzymał sygnał w obszarze wątpliwości i wyśle sygnał „powtórz".



Rys. 4.

Można przyjąć, że proces transmisji każdego ciągu zaczyna się od stanu *AN* i kończy z chwilą powrotu do tego stanu. Można scharakteryzować ten proces przez drogę przebytą na diagramie stanów — rys. 4. Drogę tę możemy rozłożyć na zamknięte pętle. Pętla może przechodzić przez ten sam punkt (stan) tylko jeden raz. Można znaleźć 4 różne pętle główne, to jest takie, które obejmują stan *AN* i wobec tego mogą tylko raz wystąpić w procesie transmisji ciągu i 2 pętle poboczne, które tej własności nie posiadają.

Pętle główne:

1. $AN \longrightarrow AO \longrightarrow AN$,
2. $AN \longrightarrow AO \dashrightarrow RN \dashrightarrow RO \dashrightarrow AN$,
3. $AN \dashrightarrow RO \longrightarrow RN \longrightarrow AO \longrightarrow AN$,
4. $AN \dashrightarrow RO \dashrightarrow AN$.

Pętle poboczne:

5. $AO \dashrightarrow RN \longrightarrow AO$,
6. $RO \longrightarrow RN \dashrightarrow RO$.

Proces transmisji ciągu może więc składać się z jednej pętli głównej i dowolnej ilości pętli pobocznych z tym, że do pętli

1	może	włączyć	się	pętla	5	w punkcie	AO,
2	„	„	„	„	5	„	RN,
2	„	„	„	„	6	„	RO,
3	„	„	„	„	5	„	AO,
3	„	„	„	„	6	„	RN,
4	„	„	„	„	6	„	RO,
5	„	„	„	„	6	„	RN,
6	„	„	„	„	5	„	RN.

Prawdopodobieństwa dróg diagramu z rys. 4 są określone przez (3.6), (3.7) i (3.8). Mianowicie:

$$\begin{aligned}
&P(AN \longrightarrow AO) = P_k(A),\\
&P(RN \longrightarrow AO) = P_k(A),\\
&P(AN \dashrightarrow RO) = P_k(R),\\
&P(RN \dashrightarrow RO) = P_k(R),\\
&P(AO \longrightarrow AN) = P_A(A),\\
&P(RO \dashrightarrow AN) = P_R(A),\\
&P(AO \dashrightarrow RN) = P_A(R),\\
&P(RO \longrightarrow RN) = P_R(R).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Dla kanału o błędach niezależnych można uznać drogi diagramu za zdarzenia niezależne i w prosty sposób obliczyć prawdopodobieństwa pętli i procesów transmisji ciągów. Na przykład:

$$P(\text{pętli } 3) = P_k(R) \cdot P_R(R) \cdot P_k(A) \cdot P_A(A). \tag{3.12}$$

Prawdopodobieństwo, że proces transmisji ciągu ma postać:

początek pętli 1, pętla 5, początek pętli 5, pętla 6, zamknięcie pętli 5, pętla 5, zamknięcie pętli 1

wyniesie

$$P(\text{pętli } 1) \cdot P^3(\text{pętli } 5) \cdot P(\text{pętli } 6). \tag{3.13}$$

Z każdą pętlą są związane określone błędy. Jeżeli pętla przechodzi przez punkt AO, to możliwy jest błąd detekcji z prawdopodobieństwem

$$P_k(b/A) = \frac{P_k(b)}{P_k(A)}. \tag{3.14}$$

Dotyczy to pętli 1, 2, 3 i 5. Jeżeli pętla zawiera drogę $AO \dashrightarrow RN$ (przyjęcie po stronie nadawczej akceptu jako żądania retransmisji), to w odebranej wiadomości pojawia się (z prawdopodobieństwem równym 1) dodatkowy ciąg. Ciąg ten będzie powtórzeniem akceptowanego ciągu, o ile

nie zajdzie w tej samej pętli błąd detekcji. Dotyczy to pętli 2 i 5. Jeżeli pętla zawiera drogę $RO \cdots\!\rightarrow AN$ (przyjęcie żądania retransmisji jako akceptu), to w odebranej wiadomości zostanie stracony jeden ciąg. Dotyczy to pętli 2 i 4. Pętla 2 obejmuje drogi $AO \cdots\!\rightarrow RN$ i $RO \cdots\!\rightarrow AN$ dające efekty pojawienia się dodatkowego ciągu i zaniku jednego ciągu, które na wzajem się znoszą. Z poszczególnymi pętlami są więc związane następujące błędy:

pętla 1 może dać błąd detekcji,
pętla 2 może dać błąd detekcji,
pętla 3 może dać błąd detekcji,
pętla 4 daje stratę ciągu,
pętla 5 może dać błąd detekcji oraz daje dodatkowy ciąg,
pętla 6 nie daje żadnych błędów.

Pojawienie się dodatkowego ciągu lub strata ciągu nazywa się ogólnie niezachowaniem długości wiadomości. Przytoczymy dwa systemy pozwalające zmniejszyć prawdopodobieństwo niezachowania długości.

System warunkowego sprzężenia zwrotnego decyzji [5] skonstruowany jest następująco:

— prawdopodobieństwo wystąpienia pętli 4 staje się bardzo małe, jeżeli się przyjmie taką niesymetryczną regułę decyzyjną w kanale zwrotnym, aby

$$P_R(A) \ll P_A(R), \tag{3.15}$$

— możliwość błędnego powtórzenia tego samego ciągu w pętli 5 eliminuje się udzielając dodatkowych instrukcji odbiornikowi i nadajnikowi.

Dodatkowa instrukcja dla odbiornika: po zaakceptowaniu przyjętego ciągu sprawdź, czy nie jest on identyczny z poprzednim. Jeżeli tak, to odrzuć go, jak gdyby był w strefie wątpliwości i wyślij do nadajnika sygnał „akceptuję". Po zaakceptowaniu sygnału β_n nie umieszczaj go w zaakceptowanej wiadomości i powtórz jeszcze n razy ostatnio zaakceptowany ciąg.

Dodatkowa instrukcja dla nadajnika: po otrzymaniu akceptu sprawdź, czy przeznaczone do nadania ciągi są identyczne z poprzednio przesłanym. Jeżeli n kolejnych przeznaczonych do nadania ciągów jest identycznych z poprzednio przesłanym, to zamiast nich nadaj specjalny sygnał β_n.

System korekcji blokowej dla sprzężenia zwrotnego decyzji [15] jest skonstruowany następująco:

— nadajnik wysyła blok kolejnych M ciągów magazynując w pamięci nadchodzące sygnały zwrotne,

— po przesłaniu bloku nadajnik wysyła w stałym czasie C informacje korekcyjne dla błędnie odebranych ciągów,

— jeżeli informacje korekcyjne nie zmieściły się w czasie C, to koryguje się jedynie najbardziej wątpliwe ciągi; w tym celu reguła decyzyjna odbiornika musi być tak rozbudowana, żeby dla decyzji neutralnej można było uzyskać „stopień wątpliwości".

W przypadku gdy błędy w kanale podstawowym są duże, a w kanale zwrotnym bardzo małe (np. dzięki kodowaniu sygnału zwrotnego), jest dosyć prawdopodobne wystąpienie bardzo długich procesów transmisji ciągu przebiegających według schematu:

początek pętli 3, pętla 6, pętla 6, ..., pętla 6, koniec pętli 3.

Taki przebieg procesu może grozić przepełnieniem pamięci buforowej urządzenia nadawczego. Aby tego uniknąć, przeważnie konieczne jest ograniczenie dopuszczalnej liczby retransmisji [12]. Ograniczenie takie limituje od dołu końcowe prawdopodobieństwo błędnych decyzji systemu.

3.3. Zalety sprzężenia zwrotnego decyzji

Chcąc korygować błędy bez sprzężenia zwrotnego, trzeba każdy ciąg odebrany umieścić w obszarze akceptacji jakiegoś ciągu kodowego (rys. 2). Objętość (liczba ciągów) oraz struktura obszarów akceptacji muszą być odpowiednie do warunków transmisji i żądanego prawdopodobieństwa błędu decyzji, gdyż błąd nie mieszczący się w obszarze akceptacji nadanego ciągu spowoduje błąd decyzji. Prawdopodobieństwo błędu decyzji jest dane wzorem (2.4). Praktycznie zdarza się, że warunki transmisyjne kanału wahają się w pewnych granicach. Wtedy, aby nie przekroczyć żądanego prawdopodobieństwa błędu decyzji, trzeba powiększyć obszary akceptacji odpowiednio do najgorszych występujących w kanale warunków. Powiększenie obszarów akceptacji oczywiście zmniejsza ilość ciągów kodowych (przy ustalonej długości ciągów n), a więc i szybkość transmisji.

Przy zastosowaniu sprzężenia zwrotnego decyzji tylko pewne ciągi odebrane należą do obszarów akceptacji ciągów kodowych (rys. 3). Prawdopodobieństwo błędu decyzji można otrzymać przez pomnożenie wzoru (3.5) przez średnią liczbę przesłań każdej wiadomości. Prawdopodobieństwo, że wiadomość x_k zostanie akceptowana po r-tym przesłaniu wynosi:

$$[1 - \overline{P_k(A)}]^{(r-1)} \cdot \overline{P_k(A)},$$

gdzie: $\overline{P_k(A)}$ — długoczasowa średnia warunkowego prawdopodobieństwa akceptacji.

Jak widać, liczba przesłań każdej wiadomości ma geometryczny rozkład prawdopodobieństwa z wartością średnią

$$\frac{1}{\overline{P_k(A)}}.$$

Prawdopodobieństwo błędu decyzji wynosi więc:

$$P_k(b) = \frac{\sum_m P(x^* = x_m/\vec{s}_k)\,\overline{\delta_{mk}}}{\overline{P_k(A)}}. \tag{3.16}$$

Można wybrać obszary akceptacji dla kodu detekcyjnego tak małe, że wartość (3.5) będzie znacznie mniejsza od (2.4) (przy tej samej liczbie ciągów kodowych i ich długości), a mianownik wyrażenia (3.16) jeszcze pozostanie bliski jedności

$$\overline{P_k(A)} \approx 1.$$

Wahania warunków transmisji uwidocznią się głównie w zmianach chwilowej szybkości transmisji (ilości przesyłanych i akceptowanych wiadomości w jednostce czasu), podczas gdy przy korekcji kodowej uwidaczniały się w zmianach prawdopodobieństwa błędu decyzji. W ten sposób sprzężenie zwrotne w pewnym stopniu dopasowuje szybkość transmisji do warunków transmisyjnych kanału. Najwyraźniej widać tę zaletę sprzężenia zwrotnego, gdy rozpatruje się przykład zaniku własności transmisyjnych kanału (black-out). Można przyjąć [zob. (1.24)], że w zaniku

$$P(\vec{y}/\vec{s}) = \text{const} \tag{3.17}$$

dla dowolnych $\vec{y}$ i $\vec{s}$. Dla kodu korekcyjnego przy założeniu obszarów akceptacji o równych objętościach prawdopodobieństwo błędu decyzji wyniesie

$$P_{zanik}(b) = \frac{N-1}{N} \approx 1, \tag{3.18}$$

gdzie: N — liczba ciągów kodowych,
a średnie prawdopodobieństwo błędu decyzji

$$P(b) \approx \frac{\textit{czas trwania zaników}}{\textit{sumaryczny czas transmisji}}. \tag{3.19}$$

Dla kodu detekcyjnego o dostatecznie małych obszarach akceptacji

$$P_{zanik}(A) = \frac{\text{objętość } \bigcup_k \vec{A}_k}{2^n} \approx 0. \tag{3.20}$$

Oczywiście prawdopodobieństwo błędnego ciągu *wśród ciągów zaakceptowanych w czasie zaniku* nie może być inne niż prawdopodobieństwo błędu decyzji kodu korekcyjnego, ale ponieważ prawdopodobieństwo akceptacji jest bardzo małe, a zaniki na ogół nie trwają długo, to średnie

prawdopodobieństwo błędnej akceptacji wzrośnie nieznacznie, a szybkość transmisji zmaleje wg wzoru:

$$\frac{\textit{szybkość transmisji w obecności zaników}}{\textit{szybkość transmisji bez zaników}} = 1 - \frac{\textit{czas trwania zaników}}{\textit{sumaryczny czas transmisji}}. \tag{3.21}$$

Praktycznie biorąc, w czasie trwania zaniku żadna akceptacja nie zachodzi.

Za stosowaniem sprzężenia zwrotnego przemawia nie tylko mniejsze na ogół prawdopodobieństwo błędnej decyzji niż dla kodu korekcyjnego (przy tych samych n i N) oraz znaczna odporność na zmiany warunków transmisji, ale także stopień skomplikowania aparatury końcowej. Korekcja kodowa, szczególnie przy długich ciągach i wyższych krotnościach korygowanych błędów wymaga bardzo obszernych obliczeń, a w związku z tym i bardzo rozbudowanych układów przeprowadzających te obliczenia. Natomiast potrzebne dla sprzężenia zwrotnego kody detekcyjne mogą być operowane przez proste i niewielkie układy nawet przy długich ciągach kodowych, o ile tylko zastosuje się odpowiednie kody. Bardzo obiecująca pod tym względem jest klasa kodów cyklicznych [20], [19], [18]. Dla sprzężenia zwrotnego potrzebny jest wprawdzie dodatkowy kanał, ale przepustowość jego może być niewielka, mniejsza niż dodatkowa przepustowość kanału potrzebna do przesłania (w tym samym czasie) ciągów kontrolnych kodu korekcyjnego.

4. SPRZĘŻENIE ZWROTNE INFORMACJI

Ogólny model geometryczny sprzężenia zwrotnego informacji przedstawiony jest na rys. 5.

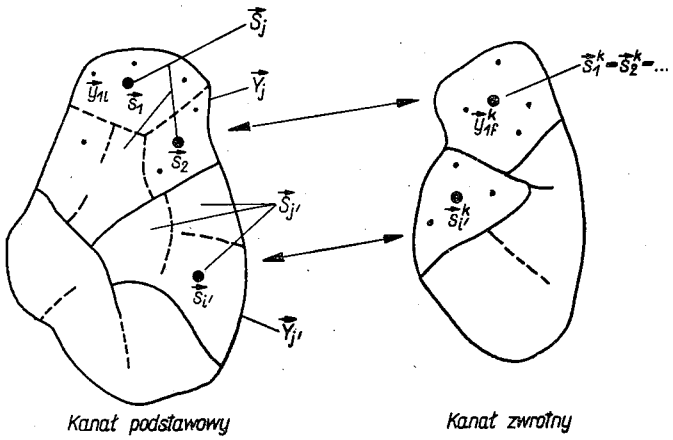
Każdemu ciągowi kodowemu $\vec{s}_i$ w kanale podstawowym odpowiada jeden ciąg kontrolny $\vec{s}_i^k$ w kanale zwrotnym. Ten sam ciąg kontrolny może odpowiadać kilku ciągom kodowym. Ciągi kodowe można więc tak podzielić na zbiory $\vec{S}_j$, by każdemu takiemu zbiorowi odpowiadał inny ciąg kontrolny. Oznaczmy ciąg odebrany: $\vec{y}_{i'l'}$ — gdzie pierwszy wskaźnik oznacza, że ciąg ten należy do obszaru akceptacji $\vec{s}_{i'}$, a drugi wskaźnik odróżnia go od pozostałych ciągów należących do obszaru akceptacji tego samego ciągu kodowego. Oczywiście, gdy obszary akceptacji zawierają po jednym ciągu, to drugi wskaźnik staje się zbędny. Po nadaniu $\vec{s}_i \in \vec{S}_j$ przez nadajnik, odbiornik otrzymuje wskutek błędów kanału podstawowego ciąg

$$\vec{y}_{i'l'} = \vec{s}_i \oplus \vec{z}_l$$

leżący w obszarze akceptacji ciągu $\vec{s}_{i'} \in \vec{S}_{j'}$. Odbiornik po otrzymaniu ciągu $\vec{y}_{i''l'}$ wysyła do nadajnika ciąg kontrolny $\vec{s}_i^k$. Zbiory ciągów odebranych $\vec{Y}_j$, którym odpowiadają takie same ciągi kontrolne $\vec{s}_i^k$, pokrywają się ze zbiorami S_j, gdy obszary akceptacji ciągów odebranych zawierają po jednym ciągu. Nadajnik otrzymuje z kanału zwrotnego ciąg

$$\vec{y}_{i''f'}^k = \vec{s}_{i'}^k \oplus \vec{z}_f$$

leżący w obszarze akceptacji ciągu $\vec{s}_{i''}^k$. Jeżeli $\vec{s}_{i''}^k = \vec{s}_i^k$, to nadajnik akceptuje przesłaną wiadomość i kontynuuje transmisję. W przeciwnym przypadku nadajnik poleca wymazać wiadomość, po czym ją retransmituje.



Rys. 5.

4.1. Wpływ sprzężenia zwrotnego na szybkość transmisji informacji

Sygnalizacja (akceptuję — wymaż) niesie dodatkową informację zwiększając szybkość przesyłania informacji. Entropia sygnalizacji po otrzymaniu ciągu $\vec{y}_{il}$ wynosi [4]:

$$H_{il}(AR) = -P_{il}(A)\log P_{il}(A) - P_{il}(R)\log P_{il}(R), \tag{4.1}$$

gdzie: $P_{il}(A)$ — warunkowe prawdopodobieństwo otrzymania akceptacji przy warunku, że został przyjęty ciąg $\vec{y}_{il}$;

$P_{il}(R)$ — warunkowe prawdopodobieństwo otrzymania „wymaż" przy warunku, że został przyjęty ciąg $\vec{y}_{il}$.

Zysk informacji dzięki sprzężeniu zwrotnemu wyniesie:

$$\Delta H_{il} = H_{il}(\vec{s}) - \{P_{il}(A)\,H_{Ail}(\vec{s}) + P_{il}(R)\,H_{Ril}(\vec{s})\}, \tag{4.2}$$

gdzie:

$H_{il}(\vec{s})$ — entropia wiadomości po przyjęciu ciągu $\vec{y}_{il}$ bez sprzężenia zwrotnego;

$H_{Ail}(\vec{s})$ — entropia wiadomości po przyjęciu ciągu $\vec{y}_{il}$ i akceptacji tego ciągu przez sprzężenie zwrotne;

$H_{Ril}(\vec{s})$ — entropia wiadomości po przyjęciu ciągu $\vec{y}_{il}$ i wymazaniu tego ciągu przez sprzężenie zwrotne,

ponieważ jest to różnica między entropią wiadomości bez sprzężenia zwrotnego a średnią entropią po zamknięciu cyklu sprzężenia zwrotnego.

$$H_{il}(\vec{s}) = -\sum_{i'} P_{il}(\vec{s}_{i'}) \log P_{il}(\vec{s}_{i'}), \tag{4.3}$$

gdzie:

$P_{il}(\vec{s}_{i'})$ — warunkowe prawdopodobieństwo, że nadany został ciąg $\vec{s}_{i'}$ przy warunku, że przyjęty został ciąg $\vec{y}_{il}$.

$$H_{Ail}(\vec{s}) = -\sum_{i'} P_{Ail}(\vec{s}_{i'}) \log P_{Ail}(\vec{s}_{i'}), \tag{4.4}$$

gdzie:

$P_{Ail}(\vec{s}_{i'})$ — warunkowe prawdopodobieństwo, że nadany został ciąg $\vec{s}_{i'}$ przy warunku, że przyjęty i następnie zaakceptowany przez sprzężenie zwrotne został ciąg $\vec{y}_{il}$.

$$H_{Ril}(\vec{s}) = -\sum_{i'} P_{Ril}(\vec{s}_{i'}) \log P_{Ail}(\vec{s}_{i'}), \tag{4.5}$$

gdzie:

$P_{Ril}(\vec{s}_{i'})$ — warunkowe prawdopodobieństwo, że został nadany ciąg $\vec{s}_{i'}$ przy warunku, że został przyjęty i następnie wymazany przez sprzężenie zwrotne ciąg $\vec{y}_{il}$.

Oznaczmy przez $P_{j'j}(A)$ prawdopodobieństwo warunkowe akceptacji przy warunku, że został nadany ciąg $\vec{s} \in \vec{S}_{j'}$, a odebrany ciąg $\vec{y} \in \vec{Y}_j$. Można teraz wyrazić prawdopodobieństwa $P_{Ail}(\vec{s}_{i'})$ i $P_{Ril}(\vec{s}_{i'})$ w postaci (4.6) i (4.7):

$$P_{Ail_j}(\vec{s}_{i'j'}) = \frac{P_{j'j}(A) P_{ilj}(\vec{s}_{i'j'})}{P_{ilj}(A)}, \tag{4.6}$$

ponieważ prawdopodobieństwo, że został nadany ciąg $\vec{s}_{i'} \in \vec{S}_{j'}$ przy warunku, że nastąpiła akceptacja, równa się prawdopodobieństwu jednoczesnego nadania ciągu $\vec{s}_{i'}$ i akceptacji, podzielonemu przez prawdopodobieństwo akceptacji.

$$P_{Ril_j}(\vec{s}_{i'j'}) = \frac{[1 - P_{j'j}(A)] P_{ilj}(\vec{s}_{i'j'})}{P_{ilj}(R)}, \tag{4.7}$$

ponieważ prawdopodobieństwo nadania określonego ciągu przy warunku wymazania równa się ilorazowi prawdopodobieństwa nadania tego ciągu i wymazania oraz prawdopodobieństwa wymazania.

Indeksy j, j' przypominają, że $\vec{s}_{i'} \in \vec{S}_{j'}$ oraz $\vec{y}_{il} \in \vec{Y}_j$. Podstawiając (4.6) do (4.4) oraz (4.7) do (4.5) i korzystając z zależności:

$$P_{il_j}(A) = \sum_{i'} P_{j'j}(A) P_{il_j}(\vec{s}_{i'j'}), \tag{4.8}$$

$$P_{il_j}(R) = \sum_{i'} [1 - P_{j'j}(A)] P_{il_j}(\vec{s}_{i'j'}), \tag{4.9}$$

otrzymujemy:

$$H_{Ail_j}(\vec{s}) = \log P_{il_j}(A) - \sum_{i'} P_{Ail_j}(\vec{s}_{i'j'}) \{\log P_{j'j}(A) + \log P_{il_j}(\vec{s}_{i'j'})\}, \tag{4.10}$$

$$H_{Ril_j}(\vec{s}) = \log P_{il_j}(R) - \sum_{i'} P_{Ril_j}(\vec{s}_{i'j'}) \{\log [1 - P_{j'j}(A)] + \log P_{il_j}(\vec{s}_{i'j'})\}. \tag{4.11}$$

Zauważmy, że sumując po wszystkich i' sumujemy również po wszystkich j', gdyż j' jest indeksem zbioru, do którego należy $\vec{s}_{i'}$. Podstawiając (4.10), (4.11), (4.3) do (4.2) i korzystając z (4.1) otrzymujemy:

$$\Delta H_{il_j} = H_{il_j}(AR) - \sum_{i'} P_{il_j}(\vec{s}_{i'j'}) H_{j'j}, \tag{4.12}$$

gdzie:

$$H_{j'j} = -P_{j'j}(A) \log P_{j'j}(A) - [1 - P_{j'j}(A)] \log [1 - P_{j'j}(A)]; \tag{4.13}$$

$H_{j'j}$ — jest miarą „niepewności" sprzężenia zwrotnego.

Jak widać z (4.13), przyrost informacji uzyskany dzięki sprzężeniu zwrotnemu jest mniejszy od entropii sygnalizacji o wielkość

$$\Delta_{il_j} = H_{il_j}(AR) - \Delta H_{il_j} = \sum_{i'} P_{il_j}(\vec{s}_{i'j'}) H_{j'j}. \tag{4.14}$$

Uśredniając (4.14) dla wszystkich sygnałów odbieranych otrzymujemy średnią stratę informacji [vide uwagę pod wzorem (4.11)]:

$$\bar{\Delta} = \sum_{il} P(\vec{y}_{il_j}) \Delta_{il_j} = \sum_{ili'} P(\vec{y}_{il_j}) P_{il_j}(\vec{s}_{i'j'}) H_{j'j'}. \tag{4.15}$$

Zauważmy, że

$$P(\vec{y}_{il_j}) \cdot P_{il_j}(\vec{s}_{i'j'}) = P(\vec{s}_{i'j'}, \vec{y}_{il_j}) \tag{4.16}$$

oraz że

$$\sum_{ili'} P(\vec{s}_{i'j'}, \vec{y}_{il_j}) = \sum_{i'i} P(\vec{s} \in \vec{S}_{j'}; \vec{y} \in \vec{Y}_j). \tag{4.17}$$

Po podstawieniu (4.17) do (4.15) mamy:

$$\bar{\Delta} = \sum_{j'j} P(\vec{s} \in \vec{S}_{j'}; \vec{y} \in \vec{Y}_j) H_{j'j}. \tag{4.18}$$

Dla przedyskutowania średniej straty informacji (4.18) przedstawiamy $P_{j'j}(A)$ w postaci:

$$P_{j'j}(A) = P_j(\vec{y}^k_{j'}) P_A(A) + [1 - P_j(\vec{y}^k_{j'})] P_R(A), \tag{4.19}$$

gdzie:

$P_j(\vec{y}^k_{j'})$ — prawdopodobieństwo otrzymania z kanału zwrotnego ciągu w obszarze akceptacji $\vec{s}^k_{i'}$, gdzie $\vec{s}_{i'} \in \vec{S}_j$, przy warunku, że nadany został ciąg kontrolny $\vec{s}^k_i$, gdzie $\vec{s}_i \in \vec{S}_j$.

$P_A(A)$ — prawdopodobieństwo otrzymania z kanału podstawowego akceptacji przy warunku, że nadajnik wysłał akceptację;

$P_R(A)$ — prawdopodobieństwo otrzymania z kanału podstawowego akceptacji przy warunku, że nadajnik wysłał „wymaż".

W przypadku gdy kanał zwrotny jest bez zakłóceń, a więc

$$P_j(\vec{y}^k_{j'}) = \delta_{jj'}, \tag{4.20}$$

gdzie:

$$\delta_{jj'} \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq j', \\ 1, & \text{gdy } j = j', \end{cases}$$

otrzymujemy podstawiając (4.20) do (4.19):

$$P_{j'j}(A) = \delta_{jj'} P_A(A) + [1 - \delta_{jj'}] P_R(A); \tag{4.21}$$

dla $j = j'$

$$P_{jj}(A) = P_A(A), \tag{4.22}$$

dla $j \neq j'$

$$P_{j'j}(A) = P_R(A). \tag{4.23}$$

Po podstawieniu (4.22) i (4.23) do (4.13) dostajemy:

dla $j = j'$

$$H_{jj} = -P_A(A) \log P_A(A) - P_A(R) \log P_A(R), \tag{4.24}$$

gdzie: $P_A(R) = 1 - P_A(A)$ — prawdopodobieństwo otrzymania z kanału podstawowego „wymaż" przy warunku, że nadajnik wysłał akceptację.

dla $j \neq j'$

$$H_{j'j} = -P_R(R) \log P_R(R) - P_R(A) \log P_R(A), \tag{4.25}$$

gdzie: $P_R(R) = 1 - P_R(A)$.

Średnią stratę (4.18) można — korzystając z (4.24) i (4.25) i pamiętając o (4.20) — przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}\bar{\Delta} &= \sum_j P(\vec{s}\in\vec{S}_j;\vec{y}\in\vec{Y}_j)H_{jj} + \sum_{j'j} P(\vec{s}\in\vec{S}_{j'};\vec{y}\in\vec{Y}_j)H_{j'j}\bar{\delta}_{j'j} = \\ &= H_{jj}\sum_j P(\vec{s}\in\vec{S}_j;\vec{y}\in\vec{Y}_j) + H_{j'j}\sum_{j'j} P(\vec{s}\in\vec{S}_{j'};\vec{y}\in\vec{Y}_j)\bar{\delta}_{j'j} = \\ &= H_{jj}P(A) + H_{j'j}P(R),\end{aligned} \tag{4.26}$$

gdzie:

$P(A)$ — średnie prawdopodobieństwo akceptacji,
$P(R)$ — średnie prawdopodobieństwo wymazania.

Reasumując: gdy kanał zwrotny jest bez zakłóceń, to średnia strata informacji jest równa średniej entropii sygnalizacji, wnoszonej przez zakłócenia kanału podstawowego w stosunku do ciągów sygnalizacyjnych. A więc średni zysk informacji równy jest informacji czystej (netto) niesionej przez sygnalizację.

Jeżeli założyć, że kanał podstawowy jest bez zakłóceń względem sygnalizacji, a więc że

$$\begin{aligned}P_A(R) &= P_R(A) = 0,\\ P_A(A) &= P_R(R) = 1,\end{aligned} \tag{4.27}$$

i podstawić (4.27) do (4.19), to otrzymamy

$$P_{j'j}(A) = P_j(\vec{y}^k_{j'}). \tag{4.28}$$

Stąd:

$$H_{j'j} = -P_j(\vec{y}^k_{j'})\log P_j(\vec{y}^k_{j'}) - [1 - P_j(\vec{y}^k_{j'})]\log[1 - P_j(\vec{y}^k_{j'})]. \tag{4.29}$$

Jak widać z (4.29) i (4.18), średnia strata informacji jest przy założeniu (4.27) równa średniej entropii ciągów kontrolnych związanej z zakłóceniami kanału zwrotnego.

Spośród przyczyn wpływających na ograniczenie szybkości transmisji w systemie ze sprzężeniem zwrotnym informacji największą rolę odgrywają zakłócenia kanału zwrotnego. Powodują one nie tylko stratę informacji niesionej przez sprzężenie zwrotne, ale zwiększają również prawdopodobieństwo wymazania i retransmisji. Częste retransmisje oprócz bezpośredniego zmniejszenia szybkości dają w efekcie większe straty informacji zawartej w wymazanych ciągach (w systemach wymazujących) oraz większy wpływ zakłóceń kanału podstawowego. Szybkość transmisji może spaść do zera nawet przy umiarkowanym prawdopodobieństwie błędu [12].

4.2. Porównanie sprzężenia zwrotnego informacji ze sprzężeniem zwrotnym decyzji

Ciekawym przyczynkiem do porównania sprzężenia zwrotnego informacji ze sprzężeniem zwrotnym decyzji są rozważania Bishopa i Buchanana [2]. Autorzy [2] porównują procesy wykrywania błędów w obu systemach. Oznaczymy $\vec{s}_i$ ciągi informacyjne (bez redundancji) przesyłane od nadajnika do odbiornika.

W sprzężeniu zwrotnym decyzji (*SZD*) ciągi kodowe składają się z ciągów informacyjnych $\vec{s}_i$ oraz ciągów kontrolnych $\vec{s}_i^k$. Odbiornik po otrzymaniu ciągu informacyjnego $\vec{y}_j$ wytwarza jego ciąg kontrolny $\vec{y}_j^k$ i porównuje z otrzymanym ciągiem kontrolnym $\vec{y}_i^k$. W przypadku zgodności akceptuje otrzymany ciąg informacyjny.

W sprzężeniu zwrotnym informacji (*SZI*) nadajnik wysyła tylko ciągi informacyjne $\vec{s}_i$, odbiornik otrzymuje ciąg $\vec{y}_j$ i wysyła ciąg kontrolny $\vec{s}_j^k$.

Nadajnik otrzymuje ciąg $\vec{y}_i^k$ i porównuje go z wytworzonym przez siebie ciągiem kontrolnym $\vec{s}_i^k$. W wypadku zgodności ciągów kontrolnych nadajnik akceptuje wysłany ciąg informacyjny.

Przyjmujemy, że dla *SZD* i *SZI* takie same są:

— ciągi $\vec{s}_i$,

— prawdopodobieństwo otrzymania ciągu $\vec{y}_j$, gdy nadany został $\vec{s}_i$ — $P(\vec{y}_j/\vec{s}_i)$.

— ciągi kontrolne $\vec{s}_i^k = \vec{y}_i^k$ ciągów $\vec{s}_i = \vec{y}_i$

oraz że zakłócenia kanału zwrotnego są takie same jak kanału podstawowego, a więc że prawdopodobieństwo otrzymania z kanału zwrotnego ciągu $\vec{y}_j^k$, gdy odbiornik wysłał ciąg $\vec{s}_i^k$, jest równe prawdopodobieństwu otrzymania z kanału podstawowego ciągu $\vec{y}_j^k$, gdy nadajnik wysłał ciąg $\vec{s}_i^k$

$$P'(\vec{y}_j^k/\vec{s}_i^k) = P(\vec{y}_j^k/\vec{s}_i^k), \tag{4.30}$$

a również, że zakłócenia ciągu kontrolnego i informacyjnego są niezależne (np. w kanałach o błędach niezależnych) oraz że spełnione jest założenie (1.5).

Możliwe są cztery rozłączne przypadki:

1) ciąg informacyjny został przekazany prawidłowo, ciąg kontrolny prawidłowo;

2) ciąg informacyjny został przekazany prawidłowo, ciąg kontrolny błędnie;

3) ciąg informacyjny został przekazany błędnie, ciąg kontrolny prawidłowo;

4) ciąg informacyjny został przekazany błędnie, ciąg kontrolny błędnie; o prawdopodobieństwach warunkowych przy warunku, że został nadany ciąg informacyjny $\vec{s}_i$:

$$P_{SZD}(1) = P(\vec{y}_i/\vec{s}_i)P(\vec{y}_i^k/\vec{s}_i^k), \tag{4.31}$$

$$P_{SZI}(1) = P(\vec{y}_i/\vec{s}_i)P'(\vec{y}_i^k/\vec{s}_i^k), \tag{4.32}$$

$$P_{SZD}(2) = P(\vec{y}_i/\vec{s}_i)[1 - P(\vec{y}_i^k/\vec{s}_i^k)], \tag{4.33}$$

$$P_{SZI}(2) = P(\vec{y}_i/\vec{s}_i)[1 - P'(\vec{y}_i^k/\vec{s}_i^k)], \tag{4.34}$$

$$P_{SZD}(3) = \sum_j P(\vec{y}_j/\vec{s}_i)\,\bar{\delta}_{ij} \cdot P(\vec{y}_i^k/\vec{s}_i^k), \tag{4.35}$$

$$P_{SZI}(3) = \sum_j P(\vec{y}_j/\vec{s}_i)P'(\vec{y}_j^k/\vec{s}_j^k)\,\bar{\delta}_{ij}, \tag{4.36}$$

$$P_{SZD}(4) = \sum_j P(\vec{y}_j/\vec{s}_i)\,\bar{\delta}_{ij}[1 - P(\vec{y}_i^k/\vec{s}_i^k)], \tag{4.37}$$

$$P_{SZI}(4) = \sum_j P(\vec{y}_j/\vec{s}_i)[1 - P'(\vec{y}_j^k/\vec{s}_j^k)]\,\bar{\delta}_{ij}. \tag{4.38}$$

Ciąg $\vec{s}_i$ zostanie zaakceptowany:

a) w przypadku 1) z prawdopodobieństwem

$$P_{SZD}(1) \text{ i } P_{SZI}(1).$$

Opierając się na przyjętych założeniach łatwo zauważyć, że:

$$P_{SZD}(1) = P_{SZI}(1) = P(1) \tag{4.39}$$

b) W przypadku 3), jeżeli odebrany ciąg $\vec{y}_j$ ma taki sam ciąg kontrolny jak nadany ciąg $\vec{s}_i$. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia:

$$P_{SZD}(3)_A = \sum_j P(\vec{y}_j/\vec{s}_i)\,\bar{\delta}_{ij}\,\delta_{\vec{s}_i^k \vec{y}_j^k} P(\vec{y}_i^k/\vec{s}_i^k), \tag{4.40}$$

$$P_{SZI}(3)_A = \sum_j P(\vec{y}_j/\vec{s}_i)P'(\vec{y}_j^k/\vec{s}_j^k)\,\bar{\delta}_{ij}\,\delta_{\vec{s}_i^k \vec{y}_j^k}, \tag{4.41}$$

gdzie:

$$\delta_{\vec{s}_i^k \vec{y}_j^k} \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} 1, \text{ gdy } \vec{s}_i^k = \vec{y}_j^k, \\ 0, \text{ gdy } \vec{s}_i^k \neq \vec{y}_j^k. \end{cases}$$

Ponieważ $P_{SZD}(3)_A = P_{SZI}(3)_A = 0$ zawsze, gdy $\vec{s}_i^k \neq \vec{y}_j^k$, można wzajemnie zmieniać $\vec{s}_i^k$ i $\vec{y}_j^k$ w (4.40). Możemy więc napisać (4.40) w postaci:

$$P_{SZD}(3)_A = \sum_j P(\vec{y}_j/\vec{s}_i)\,\bar{\delta}_{ij}\,\delta_{\vec{s}_i^k \vec{y}_j^k} P(\vec{y}_j^k/\vec{s}_j^k). \tag{4.42}$$

Opierając się na przyjętych założeniach łatwo zauważyć, że:

$$P_{SZD}(3)_A = P_{SZI}(3)_A = P(3)_A. \tag{4.43}$$

c) w przypadku 4), jeżeli odebrany ciąg kontrolny będzie pokrywał się z ciągiem kontrolnym odebranego ciągu informacyjnego w przypadku *SZD* lub nadanego ciągu informacyjnego w przypadku *SZI*. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia:

$$P_{SZD}(4)_A = \sum_j P(\vec{y}_j/\vec{s}_i) P(\vec{y}_j^k/\vec{s}_i^k)\,\bar{\delta}_{ij}\,\bar{\delta}_{\vec{s}_i^k \vec{y}_j^k}, \tag{4.44}$$

$$P_{SZI}(4)_A = \sum_j P(\vec{y}_j/\vec{s}_i) P'(\vec{y}_i^k/\vec{s}_j^k)\,\bar{\delta}_{ij}\,\bar{\delta}_{\vec{s}_i^k \vec{y}_j^k}. \tag{4.45}$$

Z założenia (4.30) i (1.5)

$$P(\vec{y}_j^k/\vec{s}_i^k) = P'(\vec{y}_i^k/\vec{s}_j^k). \tag{4.46}$$

Wtedy

$$P_{SZD}(4)_A = P_{SZI}(4)_A = P(4)_A. \tag{4.47}$$

Prawdopodobieństwo, że ciąg $\vec{s}_i$ zostanie zaakceptowany wyniesie:

$$P_{SZD}(A) = P_{SZI}(A) = P(A) = P(1) + P(3)_A + P(4)_A, \tag{4.48}$$

a prawdopodobieństwo, że ciąg $\vec{s}_i$ będzie prawidłowo przyjęty i zostanie zaakceptowany wyniesie:

$$P(1).$$

Stąd prawdopodobieństwo, że ciąg $\vec{s}_i$ został prawidłowo przesłany, jeżeli został zaakceptowany, wyniesie:

$$P(\vec{y}_i/\vec{s}_i, A) = \frac{P(1)}{P(A)} \tag{4.49}$$

i „niepewność" wiadomości, czyli prawdopodobieństwo, że ciąg $\vec{s}_i$ został przesłany nieprawidłowo, jeżeli został zaakceptowany:

$$P(\text{błąd}/\vec{s}_i A) = 1 - P(\vec{y}_i/\vec{s}_i A). \tag{4.50}$$

Reasumując: jeżeli kanały podstawowy i zwrotny mają takie samo prawdopodobieństwo błędu, to dla sprzężenia zwrotnego decyzji i sprzę-

żenia zwrotnego informacji otrzymujemy równe niepewności wiadomości przy równych ilościach przesłanej informacji i równych redundancjach. Oczywiście dla *SZI* do redundancji wliczamy ciągi przesyłane w kanale zwrotnym. Trzeba przy tym zwrócić uwagę na to, że badana niepewność wiadomości odnosi się dla *SZD* do ciągu akceptowanego w punkcie odbiorczym, a dla *SZI* — w punkcie nadawczym (kanału podstawowego).

5. ITERACYJNE WYMAZUJĄCE SPRZĘŻENIE ZWROTNE INFORMACJI

Proste (nieiteracyjne) wymazujące sprzężenie zwrotne informacji działające według reguły:

»jeżeli nadajnik nie akceptuje poprzednio wysłanego ciągu, to wysyła sygnał „wymaż" i powtarza wątpliwy ciąg«

obarczone jest dość dużym prawdopodobieństwem niezachowania długości wiadomości. Jeżeli na przykład przesyłany jest tekst:

STOI—NA—STACJI

i szósty znak zostanie błędnie przyjęty jako „wymaż", to odbiornik zanotuje

STOI$\not\phi$

Nadajnik zostanie powiadomiony, że zaszedł błąd, więc wyśle sygnał „wymaż" i powtórzy N:

STOI$\not\phi\not\phi$NA

a więc jeżeli nie zajdą inne błędy tekst odebrany będzie:

STONA—STACJI

Jeżeli natomiast szósty znak zostanie błędnie przyjęty jako np. F, nadajnik wyśle sygnał „wymaż", który zostanie przekłamany np. na literę B, po czym powtórzy literę N, to otrzymamy tekst:

STOI—FBNA—STACJI

Jak widać, istnieje możliwość zarówno straty, jak i generacji dwu znaków.

Aby zmniejszyć prawdopodobieństwo niezachowania długości wiadomości kosztem niewielkiego skomplikowania urządzeń, został stworzony system iteracyjnego wymazującego sprzężenia zwrotnego informacji [4]. Zasady, na których opiera się ten system, są następujące:

1) Zbiór ciągów $\{\vec{s}_i\}$ które nadajnik przesyła do odbiornika składa się z jednego ciągu $\vec{s}_0$ oznaczającego „wymaż" oraz L-1 ciągów $\vec{s}_1,\ldots,\vec{s}_{L-1}$ odpowiadających wiadomościom.

2) Odbiornik po otrzymaniu ciągu $\vec{y}_0$ usuwa całkowicie z pamięci ostatnio odebrany ciąg

3) Nadajnik po zaakceptowaniu przez sprzężenie zwrotne ostatnio wysłanej wiadomości (ściślej: ciągu odpowiadającego wiadomości) wysyła następną wiadomość.

4) Jeżeli z sygnału zwrotnego wynika, że odbiornik otrzymał „wymaż", a wysłana była wiadomość, to nadajnik kontynuuje nadawanie zaczynając od wiadomości poprzedzającej wiadomość przekłamaną.

5) Jeżeli nadajnik nie akceptuje wysyłanej wiadomości, to wysyła „wymaż" i powtarza tę wiadomość.

6) Jeżeli nadajnik nie akceptuje wysłanego sygnału „wymaż", to wysyła dwa sygnały „wymaż".

Zasady pracy systemu ilustruje poniższa tablica:

Sprzężenie zwrotne wskazuje, że odbiornik odebrał / Nadajnik wysłał	A	B	ϕ
A	nast. wiadomość	ϕ A	poprz. wiadomość; A
B	ϕ B	nast. wiadomość	poprz. wiadomość; B
ϕ (wymaż)	$\phi\ \phi$	$\phi\ \phi$	ostatnia wiadomość lub ϕ

Na przykład przesłanie tekstu:

S T O I - N A - S T A C J I - L O K O M O T Y W A

może odbywać się następująco:

nadajnik S T ϕ T O I $\phi\ \phi\ \phi\ \phi\ \phi$ I ϕ I — N — N A.....

odbiornik S ϕ T O K M $\phi\ \phi\ \phi\ \phi$ I ϕ I ϕ — N A....,

Nadajnik nie musi czekać z wysłaniem następnego ciągu aż przyjdzie sygnał zwrotny poprzedniego ciągu. Można np. wiadomość układać w wiersze po kilka znaków i stosować proces korekcji dla każdej kolumny oddzielnie. Na przykład:

Wiadomość do nadania:	Nadajnik	Odbiornik	Wiadomość odebrana:
S T O I	S T O I	S T O I	S T O I
— N A —	— N ϕ —	ϕ N ϕ $\emptyset$	— N A —
S T A C	S T O ϕ	S T O $\emptyset$	S T A C
J I — L	— I A ϕ	— M A ϕ	J I — L
O K O M	S ϕ A ϕ	S ϕ A ϕ	O K O M
O T Y W	J I — —	J ϕ — —	O T Y W
A	O T O C	O T O C	A
	O I Y L	O I Y L	
	A K M	A K M	
	T W	T W	

Jeżeli jakiś ciąg został przesłany błędnie, to gdy kanał zwrotny jest bez zakłóceń oraz każdemu ciągowi kodowemu odpowiada inny ciąg kontrolny, zostanie przesłany sygnał „wymaż". Przesłanie każdego innego ciągu oznacza akceptację. A więc przy powyższych założeniach prawdopodobieństwo błędnej akceptacji wyniesie:

$$P(bł.A) = P_{\vec{y}_{i\neq 0}}(\vec{s}_0), \tag{5.1}$$

gdzie: $P_{\vec{y}_{i\neq 0}}(\vec{s}_0)$ — prawdopodobieństwo warunkowe po przyjęciu ciągu będącego wiadomością, że wysłany został sygnał „wymaż".

W systemie iteracyjnym, gdy zajdzie przypadek, którego prawdopodobieństwo wyraża prawa strona równania (5.1), zostanie wysłany następny sygnał „wymaż". Prawdopodobieństwo błędnej akceptacji po odbiorze n kolejnych ciągów nie zawierających „wymaż" wyniesie więc:

$$P_n(bł.A) = \prod_{k=1}^{n} P_{\vec{y}^{(k)}_{i\neq 0}}(\vec{s}_0), \tag{5.2}$$

gdzie: $\vec{y}^{(k)}_{i\neq 0}$ — k-ta kolejna odebrana wiadomość.

Przeprowadzimy dość prymitywną, ale wystarczającą ocenę zachowania się $P_n(bł.A)$, gdy n rośnie.

Ponieważ

$$P_{\vec{y}_{i\neq 0}}(\vec{s}_0) < 1,$$

to można znaleźć takie a i b większe od zera, że

$$a \geqslant -\ln P_{\vec{y}_{i\neq 0}}(\vec{s}_0) \geqslant b. \tag{5.3}$$

Korzystając z (5.3) można napisać

$$e^{-a} \leqslant P_{\vec{y}_{i\neq 0}}(\vec{s}_0) \leqslant e^{-b}. \tag{5.4}$$

Podstawiając (5.4) do (5.2) otrzymujemy:

$$e^{-na} \leqslant P_n(bł.A) \leqslant e^{-nb}. \tag{5.5}$$

Jak widać z (5.5), prawdopodobieństwo błędnej akceptacji maleje wykładniczo do zera z ilością później odebranych ciągów, gdy kanał zwrotny jest bez zakłóceń i gdy każdemu ciągowi kodowemu odpowiada inny ciąg kontrolny.

Prawdopodobieństwo błędnej akceptacji jest ograniczone od dołu zakłóceniami i pojemnością kanału zwrotnego, a także ilością ciągów, które mogą być użyte w procesie korekcji jednego ciągu. Ilość ta na ogół [12] musi być ograniczona ze względu na niebezpieczeństwo przepełnienia pamięci buforowej urządzenia.

6. KODOWANIE DLA SPRZĘŻENIA ZWROTNEGO INFORMACJI

6.1. Wykorzystanie kodów detekcyjnych

Zagadnienia związane z kodowaniem sprzężenia zwrotnego decyzji posiadają dosyć rozbudowaną teoretyczną bazę w postaci teorii kodów detekcyjnych. Teoria kodowania dla sprzężenia zwrotnego informacji znajduje się natomiast w zalążku. Przedstawimy próbę [5] wykorzystania teorii kodów detekcyjnych dla sprzężenia zwrotnego informacji opartego o zasadę równoważności systemów sprzężenia zwrotnego decyzji i sprzężenia zwrotnego informacji.

Przyjmujemy następujące określenie równoważności:
dwa systemy są równoważne, gdy:

1) zachodzi odpowiedniość jeden do jednego między ciągami kodowymi obu systemów;
2) warunkowe prawdopodobieństwa błędów przy warunku, że nadane zostały odpowiednie ciągi, są równe;
3) warunkowe prawdopodobieństwa akceptacji przy warunku, że nadane zostały odpowiednie ciągi, są równe.

Udowodnimy poniższe twierdzenie: (6.1)

System sprzężenia zwrotnego informacji ze zbiorem ciągów $\{\vec{s}_i\}$ w kanale podstawowym i $\{\vec{s}_i^k\}$ w kanale zwrotnym jest równoważny systemowi sprzężenia zwrotnego decyzji z kodem $\{\vec{s}_i^d\}$,

jeżeli:

— sygnalizacja jest bezbłędna (6.2)

— obszary akceptacji $\vec{A}_i^k$ ciągów $\vec{s}_i^k$ są przystające,

to znaczy:

$$\vec{A}_i^k = \bigcup_{\vec{z}_j^k \in \vec{Z}^k} \vec{s}_i^k \oplus \vec{z}_j^k, \tag{6.3}$$

$$— \vec{s}_i^d = (\vec{s}_i, \vec{s}_i^k), \tag{6.4}$$

$$— \vec{A}_i^d = (\vec{A}_i, \vec{A}_i^k), \tag{6.5}$$

gdzie:

$\vec{A}_i^d$ — obszary akceptacji ciągów $\vec{s}_i^d$,

$\vec{A}_i$ — obszary akceptacji ciągów $\vec{s}_i$;

$$— P_{\vec{s}_i^d}(\vec{A}_l^d) = P_{\vec{s}_i}(\vec{A}_l) \cdot P_{\vec{s}_i^k}(\vec{A}_l^k), \tag{6.6}$$

gdzie:

$P_{\vec{s}_i^d}(\vec{A}_l^d)$ — warunkowe prawdopodobieństwo otrzymania ciągu w obszarze akceptacji $\vec{A}_l^d$ przy warunku, że nadany był $\vec{s}_i^d$;

$P_{\vec{s}_i}(\vec{A}_l)$ — warunkowe prawdopodobieństwo otrzymania ciągu w obszarze akceptacji $\vec{A}_l$ przy warunku, że nadany był $\vec{s}_i$;

$P_{\vec{s}_i^k}(\vec{A}_l^k)$ — warunkowe prawdopodobieństwo otrzymania ciągu w obszarze akceptacji $\vec{A}_l^k$ przy warunku, że nadany był $\vec{s}_i^k$.

— kanał spełnia założenia (1.5).

Dowód:

Spełnienie pierwszego warunku na równoważność systemów wynika w sposób oczywisty z założenia (6.4).

Wykażemy, że spełnione są również dwa pozostałe warunki. Warunkowe prawdopodobieństwa błędu (błędnej akceptacji) i akceptacji dla sprzężenia zwrotnego decyzji, przy warunku, że nadany został $\vec{s}_i$, gdy spełnione jest założenie (6.2), wynoszą:

$$P_{SZDi}(b) = \sum_l P_{\vec{s}_i^d}(\vec{A}_l^d)\,\bar{\delta}_{il}, \tag{6.7}$$

$$P_{SZDi}(A) = \sum_l P_{\vec{s}_i^d}(\vec{A}_l^d). \tag{6.8}$$

Te same wielkości dla sprzężenia zwrotnego informacji przy spełnionym (6.2) wynoszą:

$$P_{SZIi}(b) = \sum_l P_{\vec{s}_i}(\vec{A}_l) P_{\vec{s}_l^k}(\vec{A}_i^k)\,\bar{\delta}_{il}, \tag{6.9}$$

$$P_{SZIi}(A) = \sum_l P_{\vec{s}_i}(\vec{A}_l) P_{\vec{s}_l^k}(\vec{A}_i^k). \tag{6.10}$$

Przy spełnionym (6.3):

$$P_{\vec{s}_l^k}(\vec{A}_i^k) = \sum_{\vec{z}_j^k \in \vec{Z}^k} P_{\vec{s}_l^k}(\vec{s}_i^k \oplus \vec{z}_j^k) = \sum_{\vec{z}_j^k \in \vec{Z}^k} P_z(\vec{s}_i^k \oplus \vec{s}_l^k \oplus \vec{z}_j^k) =$$

$$= \sum_{\vec{z}_j^k \in \vec{Z}^k} P_{\vec{s}_i^k}(\vec{s}_l^k \oplus \vec{z}_j^k) = P_{\vec{s}_i^k}(\vec{A}_l^k), \tag{6.11}$$

gdzie: $P_z(\vec{s}_i^k \oplus \vec{s}_l^k \oplus \vec{z}_j^k)$ — prawdopodobieństwo wystąpienia w kanale zwrotnym ciągu błędów:

$$(\vec{s}_i^k \oplus \vec{s}_l^k \oplus \vec{z}_j^k).$$

Po podstawieniu (6.11) do (6.9) i (6.10) otrzymujemy:

$$P_{SZIi}(b) = \sum_l P_{\vec{s}_l}(\vec{A}_l) P_{\vec{s}_i^k}(\vec{A}_l^k) \bar{\delta}_{il}, \tag{6.12}$$

$$P_{SZIi}(A) = \sum_l P_{\vec{s}_l}(\vec{A}_l) P_{\vec{s}_i^k}(\vec{A}_l^k). \tag{6.13}$$

Biorąc pod uwagę założenie (6.6) i porównując (6.12) z (6.7) i (6.13) z (6.8) widzimy, że

$$P_{SZDi}(b) = P_{SZIi}(b), \tag{6.14}$$

$$P_{SZDi}(A) = P_{SZIi}(A), \tag{6.15}$$

a więc wszystkie warunki na równoważność systemów są spełnione.

Szczególnie interesujący przypadek twierdzenia (6.1) występuje, gdy $\{\vec{s}_i\}$ oraz $\{\vec{s}_i^k\}$ są kodami grupowymi Slepiana [22]. Oznaczmy przez:

n — długość ciągów $\vec{s}_i$,

l — liczbę pozycji informacyjnych ciągów $\vec{s}_i$,

$\vec{c}_j$ — ciągi korekcyjne (coset leader) kodu $\{\vec{s}_i\}$,

n_k — długość ciągów $\vec{s}_i^k$,

l_k — liczbę pozycji informacyjnych ciągów $\vec{s}_i^k$ rozumianą w tym sensie, że różnych ciągów $\vec{s}_i^k$ jest 2^{l_k},

$\vec{c}_j^k$ — ciągi korekcyjne kodu $\{\vec{s}_i^k\}$.

Załóżmy, że zbiory $\{\vec{s}_i\}$ oraz $\{\vec{s}_i^k\}$ są izomorficzne, a więc że każdemu ciągowi $\vec{s}_i^k$ odpowiada 2^{l-l_k} ciągów $\vec{s}_i$, oraz że odpowiedniość ciągów

$$\vec{s}_i - \vec{s}_i^k$$

oraz

$$\vec{s}_j - \vec{s}_j^k$$

pociąga za sobą odpowiedniość ciągów

$$\vec{s}_i \oplus \vec{s}_j - \vec{s}_i^k \oplus \vec{s}_j^k.$$

Założenie (6.3) staje się wtedy zbędne. Założenie (6.5) można zastąpić założeniem:

$$\vec{c}^{d}_{jm} = (\vec{c}_j, \vec{c}^{k}_{m}), \tag{6.16}$$

gdzie: $\vec{c}^{k}_{jm}$ — ciągi korekcyjne kodu $\{\vec{s}^{d}_{i}\}$

gdyż — jak niżej wykażemy (6.19) — kod $\{\vec{s}^{d}_{i}\}$ jest grupowy, a założenie (6.6) założeniem:

$$P_z(\vec{s}^{d}_{i} \oplus \vec{c}^{d}_{jm}) = P_z(\vec{s}_i \oplus \vec{c}_j) P_z(\vec{s}^{k}_{i} \oplus \vec{c}^{k}_{m}). \tag{6.17}$$

W tym przypadku kod

$$\{\vec{s}^{d}_{i}\} = \{\vec{s}_i, \vec{s}^{k}_{i}\} \tag{6.4a}$$

jest kodem grupowym o długości $n + n_k$ oraz l pozycjach informacyjnych, gdyż z założenia izomorfizmu wynika, że w wyrażeniu

$$\vec{s}^{d}_{i} \oplus \vec{s}^{d}_{j} = (\vec{s}_i, \vec{s}^{k}_{i}) \oplus (\vec{s}_j, \vec{s}^{k}_{j}) = (\vec{s}_l, \vec{s}^{k}_{l'}) \tag{6.18}$$

zachodzi

$$l = l',$$

a więc

$$\vec{s}^{d}_{i} \oplus \vec{s}^{d}_{j} = (\vec{s}_l, \vec{s}^{k}_{l}) = \vec{s}^{d}_{l}, \tag{6.19}$$

czyli suma modulo 2 dowolnych dwu ciągów kodu $\{\vec{s}^{d}_{i}\}$ jest ciągiem tego kodu. Zbiór ciągów $\{\vec{c}^{d}_{jm}\}$ określonych przez (6.16) spełnia warunki na zbiór ciągów korekcyjnych kodu grupowego, a mianowicie:

1) wszystkie ciągi w zbiorze

$$\{\vec{s}^{d}_{i} \oplus \vec{c}^{d}_{jm}\} \tag{6.20}$$

są różne dla niejednakowych i, j, m. Zauważmy, że

$$\vec{s}^{d}_{i} \oplus \vec{c}^{d}_{jm} = (\vec{s}_i, \vec{s}^{k}_{i}) \oplus (\vec{c}_j, \vec{c}^{k}_{m}) = (\vec{s}_i \oplus \vec{c}_j, \vec{s}^{k}_{i} \oplus \vec{c}^{k}_{m}). \tag{6.21}$$

Dla różnych i oraz j ciągi (6.21) nie mogą mieć pierwszych n pozycji wspólnych, gdyż wszystkie ciągi w zbiorze

$$\{\vec{s}_i \oplus \vec{c}_j\}$$

są różne dla niejednakowych i, j (ponieważ $\vec{c}_j$ są ciągami korekcyjnymi kodu grupowego). Dla różnych m ciągi (6.21) nie mogą mieć pozostałych n_k pozycji wspólnych.

2) $$w(\vec{s}^{d}_{i} \oplus \vec{c}^{d}_{jm}) \geqslant w(\vec{c}^{d}_{jm}). \tag{6.22}$$

Z (6.16) i (6.21) wynika, że

$$w(\vec{c}^d_{jm}) = w(\vec{c}_j) + w(\vec{c}^k_m), \tag{6.23}$$

$$w(\vec{s}^d_i \oplus \vec{c}^d_{jm}) = w(\vec{s}_i \oplus \vec{c}_j) + w(\vec{s}^k_i \oplus \vec{c}^k_m). \tag{6.24}$$

Ponieważ $\vec{c}_j$ i $\vec{c}^k_m$ są ciągami korekcyjnymi kodów grupowych, to:

$$w(\vec{s}_i \oplus \vec{c}_j) \geqslant w(\vec{c}_j), \tag{6.25}$$

$$w(\vec{s}^k_i \oplus \vec{c}^k_m) \geqslant w(\vec{c}^k_m). \tag{6.26}$$

A więc

$$w(\vec{s}^d_i \oplus \vec{c}^d_{jm}) \geqslant w(\vec{c}^d_{jm}) \tag{6.22}$$

Założenie (6.17), jak wykażemy, zawiera w sobie założenie (6.6). Dla kodu grupowego mamy:

$$P_{\vec{s}^d_i}(\vec{A}^d_l) = \sum_{jm} P_{\vec{s}^d_i}(\vec{s}^d_l \oplus \vec{c}^d_{jm}) = \sum_{jm} P_z(\vec{s}^d_i \oplus \vec{s}^d_l \oplus \vec{c}^d_{jm}). \tag{6.27}$$

Pisząc (6.17) w postaci:

$$P_z(\vec{s}^d_i \oplus \vec{s}^d_l \oplus \vec{c}^d_{jm}) = P_z(\vec{s}_i \oplus \vec{s}_l \oplus \vec{c}_j) \cdot P_z(\vec{s}^k_i \oplus \vec{s}^k_l \oplus \vec{c}^k_m) \tag{6.28}$$

i podstawiając (6.28) do (6.27) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P_{\vec{s}^d_i}(\vec{A}^d_l) &= \sum_{jm} P_z(\vec{s}_i \oplus \vec{s}_l \oplus \vec{c}_j) \cdot P_z(\vec{s}^k_i \oplus \vec{s}^k_l \oplus \vec{c}^k_m) = \\ &= \sum_j P_{\vec{s}_i}(\vec{s}_l \oplus \vec{c}_j) \cdot \sum_m P_{\vec{s}^k_i}(\vec{s}^k_l \oplus \vec{c}^k_m) = \\ &= P_{\vec{s}_i}(\vec{A}_l) \cdot (P_{\vec{s}^k_i}(\vec{A}^k_l), \end{aligned} \tag{6.29}$$

a więc z (6.17) wynika (6.6) i dowód twierdzenia (6.1) pozostaje w mocy.

Przy spełnieniu pewnych założeń twierdzenie (6.1) umożliwia ocenę jakości systemu sprzężenia zwrotnego informacji z kodem, którego ciągi utworzone zostały z podziału ciągów kodu detekcyjnego.

6.2. Przykłady kodowania dla sprzężenia zwrotnego informacji

1. Najprostszy przykład kodowania dla sprzężenia zwrotnego informacji — to przesyłanie w kanale zwrotnym tych samych ciągów, które nadeszły do odbiornika z kanału podstawowego, a więc:

$$\vec{s}^k_i = \vec{s}_i. \tag{6.30}$$

Gdy kanał zwrotny jest bez zakłóceń, to możliwe jest bezbłędne przesyłanie informacji, nawet gdy kod $\{\vec{s}_i\}$ w kanale podstawowym nie ma redundancji, to znaczy $\vec{s}_i$ są ciągami informacyjnymi. Szybkość przesyłania będzie obniżona, ponieważ po każdym błędnym ciągu trzeba wysłać sygnał „wymazać", a więc błąd powoduje stratę dwóch ciągów.

Błędna akceptacja nastąpi, gdy w obu kanałach, podstawowym i zwrotnym wystąpią takie same błędy (ciągi błędów będą identyczne). Jeżeli kanały podstawowy i zwrotny mają równe prawdopodobieństwa błędu p (kanały symetryczne o błędach niezależnych), to prawdopodobieństwo akceptacji błędnego ciągu wyniesie:

$$P(b) = \frac{\sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} p^{2v} (1-p)^{2(n-v)}}{P(A)}. \tag{3.31}$$

2. Zakłócenia kanału zwrotnego powodują wzrost ilości retransmisji, gdyż niektóre retransmisje są skutkiem błędów ciągu kontrolnego przy prawidłowym ciągu informacyjnym. Można zmniejszyć prawdopodobieństwo błędów ciągu kontrolnego skracając długość tego ciągu. Konsekwentną realizacją takiej tendencji jest stosowanie jednoelementowych ciągów kontrolnych. Ciągi te uzupełniają ilość jedynek ciągu informacyjnego do liczby parzystej. Prawdopodobieństwo błędnej akceptacji przy założeniu kanałów o błędach niezależnych:

$$P(b) = \frac{p''}{P(A)}, \tag{6.32}$$

gdzie: p'' — prawdopodobieństwo błędów parzystych

$$p'' = \sum_{\mu=1}^{\mu \leqslant \frac{n+1}{2}} \binom{n+1}{2\mu} p^{2\mu} (1-p)^{n+1-2\mu}, \tag{6.33}$$

gdzie:

n — długość ciągu informacyjnego,

p — prawdopodobieństwo błędu elementu.

Korzystając z wzorów na dwumian Newtona możemy uprościć (6.33) do postaci:

$$p'' = \frac{[(1-p)+p]^{n+1} + [(1-p)-p]^{n+1}}{2} - (1-p)^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2}[1 - 2(1-p)^{n+1} + (1-2p)^{n+1}]. \tag{6.34}$$

3. Zastosowanie kodu Hamminga (kod grupowy, minimalna odległość między ciągami wynosi 4) [11] pozwala na wykrywanie błędów podwójnych oraz wszystkich błędów nieparzystych. Wykrywane są także niektóre błędy poczwórne. Mówiąc o krotności błędów traktujemy ciąg informacyjny i kontrolny jako jeden ciąg kodowy.

Kod Hamminga [11] konstruuje się następująco. Pozycje informacyjne w ilości n przydziela się do n_k-1 zespołów kontrolnych dodając do każdego z nich jedną pozycję kontrolną. Symbole w pozycjach kontrolnych dopełniają ilość jedynek w każdym zespole do liczby parzystej. Podziału pozycji kodu na zespoły kontrolne dokonuje się tak, aby wyniki sprawdzenia parzystości w tych zespołach wykazały pozycję, w której zaszedł błąd pojedynczy. Błąd może zajść w każdej z $n + n_k$-1 pozycji lub w żadnej, a więc ilość potrzebnych pozycji kontrolnych można wyliczyć z nierówności:

$$n + n_k \leqslant 2^{n_k - 1}. \tag{6.35}$$

Do tak skonstruowanego kodu dodaje się jeszcze jedną pozycję kontrolną taką, aby ilość jedynek w całym ciągu kodowym była parzysta.

Błędna akceptacja zajdzie, gdy wystąpi ciąg błędów, który spowoduje zmianę ciągu kodowego na inny ciąg kodowy

$$(\vec{z}_s, \vec{z}_t^k) = (\vec{s}_i, \vec{s}_i^k) \oplus (\vec{s}_j, \vec{s}_j^k), \tag{6.36}$$

gdzie: $(\vec{z}_s, \vec{z}_t^k)$ — ciąg błędów składający się z ciągu błędów kanału podstawowego oraz ciągu błędów kanału zwrotnego.

Ponieważ kod Hamminga jest kodem grupowym [18], równanie (6.36) jest spełnione tylko wtedy i zawsze wtedy, gdy ciąg błędów jest identyczny z dowolnym ciągiem kodowym, a więc:

$$(\vec{z}_s, \vec{z}_t^k) = (\vec{s}_s, \vec{s}_s^k). \tag{6.37}$$

Najmniejsza waga ciągów kodowych wynosi 4 (pomijając ciąg samych zer), gdyż inaczej nie byłby to kod o minimalnej odległości wynoszącej 4. Błędna akceptacja jest więc możliwa, gdy zajdzie błąd co najmniej poczwórny. Prawdopodobieństwo błędnej akceptacji można oszacować przy założeniu kanałów o błędach niezależnych i prawdopodobieństwie błędu elementu p następująco:

$$P(b) \leqslant \frac{(2^n - 1)p^4(1-p)^{n+n_k-4}}{P(A)}. \tag{6.38}$$

Interesujący przypadek zachodzi dla $n = 4$. Wtedy również $n_k^{\bullet} = 4$ i każdemu ciągowi informacyjnemu odpowiada inny ciąg kontrolny.

i	$\overrightarrow{s_i}$	$\overrightarrow{s_i}^k$
0	0 0 0 0	0 0 0 0
1	0 0 0 1	0 1 1 1
2	0 0 1 0	1 0 1 1
3	0 0 1 1	1 1 0 0
4	0 1 0 0	1 1 0 1
5	0 1 0 1	1 0 1 0
6	0 1 1 0	0 1 1 0
7	0 1 1 1	0 0 0 1
8	1 0 0 0	1 1 1 0
9	1 0 0 1	1 0 0 1
10	1 0 1 0	0 1 0 1
11	1 0 1 1	0 0 1 0
12	1 1 0 0	0 0 1 1
13	1 1 0 1	0 1 0 0
14	1 1 1 0	1 0 0 0
15	1 1 1 1	1 1 1 1

Łatwo przy tym zauważyć, że odległości ciągów informacyjnych i odpowiadających im ciągów kontrolnych przedstawiają się następująco:

$d\left(\overrightarrow{s_i}, \overrightarrow{s_j}\right)$	$d\left(\overrightarrow{s_i}^k, \overrightarrow{s_j}^k\right)$
1	3
2	2
3	1
4	4

Politechnika Warszawska
Katedra Urządzeń Teletransmisyjnych i Telegraficznych

WYKAZ LITERATURY

1. Alexander, Gryb, Nast: Capabilities of the Telephone Network for Data Transmission. — Bell System Techn. J., v. 39, 1960.
2. Bishop, Buchanan: Message Redundancy vs. Feedback for Reducing Message Uncertainty. — IRE Conv. Rec., p. 2, 1957.
3. Brown, Meyers: Evaluation of Some Error Correction Methods Applicable to Digital Data Transmission. — IRE Conv. Rec., p. 4, 1958.
4. Chang: Theory of Information Feedback Systems. — IRE Trans. on I.T., No 3, 1956.
5. Chang: Improvement of Two-way Communication by Means of Feedback. — IRE Conv. Rec., p. 4, 1961.

6. Cowell, Burton: Computer Simulation of the Use of Group Codes with Retransmission on a Gilbert Burst Channel. — AIEE Trans., p. I, Jan. 1962.
7. Elias: Error Free Coding. — IRE Trans on I.T., No 4, 1956.
8. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. 1, J. Willey a. s. N.Y. 1957.
9. Fisz: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1958.
10. Gilbert: Capacity of a Burst-Noise Channel. — Bell System Tech. J., vol. 39, sept. 1960.
11. Hamming: Error Detecting and Error Correcting Codes. — Bell System Tech. J., vol. 29, apr. 1950.
12. Harris Hauptschein, Morgan, Schwartz: Binary Communication Feedback Systems. — AIEE Trans., p. I, 1958.
13. Harris, Hauptschein, Schwartz: Optimum Decision Feedback Systems. — IRE Conv. Rec., p. 2, 1957.
14. Harris, Morgan: Binary Symmetric Decision Feedback Systems. — AIEE Trans., p. I, 1958.
15. Metzner, Morgan: Coded Binary Decision Feedback Communication Systems. — IRE Trans. on Comm. Syst., june 1960.
16. Metzner, Morgan: Coded Feedback Communication Systems. — AIEE Trans., p. I, 1961.
17. Perry, Wozencraft: SECO — A Self-Regulating Error Correcting Coder-Decoder. — IRE Trans. on I.T., No 5, sept. 1962.
18. Peterson: Error-Correcting Codes. J. Willey a. s. N.Y. 1961.
19. Peterson: Binary Controls for Error Control. — AIEE Trans., p. I, 1962.
20. Peterson, Brown: Cyclic Codes for Error Detection. — Proc. of IRE, vol. 49, No 1, 1961.
21. Seidler: Zarys teorii kodów. Warszawa 1962 (rękopis).
22. Slepian: A Class of Binary Signalling Alphabets. — Bell System Tech J., vol. 35, 1956.
23. Wood: Optimum Block Length for Data Transmission with Error Checking. — AIEE Trans., p. I, 1958.
24. Wozencraft, Horstein: Coding for Two-way Channels, w książce „Information Theory", Butterworth, London 1961.

A. KARCZMAREWICZ

INFORMATION FEEDBACK FOR BINARY TRANSMISSION — REVIEW OF PROBLEMS

Summary

The following problems connected with the application of information feedback in binary transmission have been briefly presented: Mathematical models of binary transmission ways most commonly met with. The application of correcting codes, decision feed-back and information feed-back in order to remove errors. The degree of credibility increase of transmitted messages when applying information feed-back. Encoding for information feed-back.

The scope and the way of expressing the problems in question reflect the contemporary state of works available on the subject.

A. KARCZMAREWICZ

RÉACTION D'INFORMATION DANS LA TRANSMISSION BINAIRE — RÉVUE DES PROBLÈMES

Résumé

On a présenté en résumé les problémes suivants concernant l'utilisation de la réaction d'information dans la transmission binaire: Modèles mathématiques de plus souvent rencontrés trajets binaires de transmission. Utilisation des codes de correction, de réaction de décision et de réaction d'information en élimination des erreurs. Degré d'augmentation d'authenticité d'information transmise en cas d'utilisation de réaction d'information.

Étendue et maniére de concevoir des problèmes nommés ci-dessus reflète le bagage actuel concernant le domaine présenté.

А. КАРЧМАРЕВИЧ

ИНФОРМАЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ДЛЯ БИНАРНОЙ ПЕРЕДАЧИ — ОБЗОР ВОПРОСОВ

Резюме

Представлено в сокращении следующие вопросы, связанные с применением информационной обратной связи в бинарной передаче:

1) Математические модели чаще всего встречаемых бинарных каналов.
2) Применение коррекционных кодов, обратной связи с перепросом и информационной обратной связи с целью устранения ошибок.
3) Степень повышения достоверности передаваемого сообщения при использовании информационной обратной связи.
4) Кодирование для информационной обратной связи.

Объём и способ представления вышеуказанных вопросов отображает современное состояние литературы, касающейся этой области.

621.317.39:621.317.733

JERZY SAWICKI

Właściwości odchyłowego mostka Thomsona

Rękopis dostarczono 13.11.1963

W pracy omówiono podstawowe właściwości odchyłowego (inaczej — niezrównoważonego) mostka Thomsona. Artykuł zawiera wyprowadzenie analitycznej charakterystyki pomiarowej, czyli zależności pomiędzy rozstrojeniem układu a odchyleniem miernika. Ustalono wzory wyznaczające wartości elementów charakterystyki dla czterech przypadków.

Odchyłowy mostek Thomsona może być bardzo przydatny w pomiarach wielkości nieelektrycznych za pośrednictwem przetworników oporowych. Zastosowanie tego układu pozwoli bowiem wydatnie zmniejszyć rozmiary przetwornika.

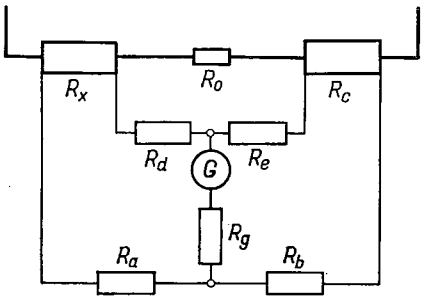
1. WSTĘP

Szybkie i dość dokładne pomiary oporności średnich wykonuje się często odchyłowym mostkiem Wheatstone'a. Zaletami tego układu są lepsza dokładność niż w przypadku metody technicznej oraz większa szybkość pomiaru niż w mostku zrównoważonym. Metodzie tej poświęcono już wiele publikacji. Odchyłowego mostka Wheatstone'a nie można jednak stosować do pomiaru oporności małych, szczególnie poniżej 1 oma. Pomiary oporności dochodzących do 10 omów mogą być obarczone znacznymi uchybami, wynikającymi z wpływu przewodów połączeniowych.

Niniejsza praca poświęcona jest zbadaniu właściwości odchyłowego mostka Thomsona, który nadaje się właśnie do mierzenia małych wartości oporności. Podobnie jak w odchyłowym mostku Wheatstone'a tak i tutaj nie sprowadza się galwanometru do wskazania zerowego; wartość oporności badanej określa się z odchylenia miernika na podstawie znanej charakterystyki pomiarowej układu.

Szybkość i dobra dokładność pomiaru, właściwe metodzie mostka odchyłowego, mają duże znaczenie praktyczne. Jest to szczególnie istotne w pomiarach wielkości nieelektrycznych za pomocą przetworników oporowych. W niektórych przypadkach wymaga się tam minimalnych rozmiarów przetwornika, co automatycznie ogranicza jego oporność. Układem pomiarowym powinien być wówczas odchyłowy mostek Thomsona. Dotychczasowa literatura nie zajmowała się tą metodą. Nie jest ona rozpatrywana nawet w fundamentalnej pracy [1].

Schemat mostka Thomsona przedstawiono na rys. 1. Oporniki R_a, R_b, R_c, R_d, R_e stanowią elementy układu, zaś R_o przedstawia oporność połączenia zawartego między zaciskiem napięciowym obiektu badanego R_x i odpowiednim zaciskiem opornika R_c. Na rysunku tym R_g symbolizuje oporność wewnętrzną galwanometru G.



Rys. 1. Mostek Thomsona

Układ pomiarowy może być zasilany bądź niezmiennym natężeniem (to znaczy $I_M = \text{const}$), bądź też niezmiennym napięciem ($U_M = \text{const}$). W charakterze galwanometru można użyć albo miernika typu napięciowego, albo typu prądowego. Do pierwszego z tych typów zaliczamy przyrządy reagujące na różnicę napięć i praktycznie nie pobierające przy tym prądu. Przykładami mogą być samoczynny kompensator i mierniki elektroniczne o wielkiej oporności wejściowej. Do drugiej grupy zaliczamy mierniki, w których przyczyną odchylenia jest natężenie prądu. Jako typowe przykłady wymienimy przyrządy magnetoelektryczne i pętlice oscylograficzne. Z powyższego widzimy, że właściwości rozpatrywanego układu należy zbadać w czterech przypadkach, określonych wybranymi warunkami zasilania i typem miernika.

W naszych rozważaniach będziemy posługiwać się wartościami oporności, wyrażonymi jako krotności oporności podstawowej (odniesienia). Za oporność odniesienia przyjmujemy tę wartość oporności obiektu badanego R_x, przy której mostek znajduje się w stanie równowagi; oznaczamy ją przez R. Inne wartości oporności tegoż opornika uzależniamy od podstawowej za pośrednictwem względnego rozstrojenia X. Zastosowane oznaczenia, analogiczne do przyjętych dla odchyłowego mostka Wheatstone'a w pracy [2], ujęto w poniższym zestawieniu definicji:

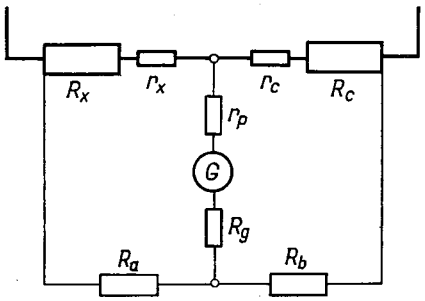
$$\left.\begin{array}{lll} R_x = (1+X)R; & R_a = m \cdot R; & R_b = m \cdot n \cdot R; \\ R_c = n \cdot R; & R_d = q \cdot R; & R_e = n \cdot q \cdot R; \\ R_g = p \cdot R; & R_o = s \cdot R; & \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Przeprowadzenie dalszych rozważań będzie znacznie ułatwione, jeżeli rozpatrywany układ sprowadzimy do zastępczego mostka Wheatstone'a,

który jest przedstawiony na rys. 2. Trójkąt oporności R_d, R_e, R_o został tu zamieniony na elektrycznie równoważną gwiazdę, złożoną z oporności r_x, r_c, r_p. Wartości tych oporności, przy wprowadzeniu oznaczeń (1), wyrażają się jako

$$r_x = \frac{q \cdot s}{q(1+n)+s} R; \qquad r_c = \frac{n \cdot q \cdot s}{q(1+n)+s} R;$$

$$r_p = \frac{n \cdot q^2}{q(1+n)+s} R.$$



Rys. 2. Zastępczy mostek Wheatstone'a

W celu uproszczenia dalszych wyrażeń wprowadzimy teraz oznaczenia

$$f = 1 + \frac{q \cdot s}{q(1+n)+s}; \qquad g = p + \frac{n \cdot q^2}{q(1+n)+s}; \tag{2}$$

przy zastosowaniu tych oznaczeń pomocniczych możemy napisać

$$r_x = (f-1)R; \qquad r_c = (f-1)n \cdot R; \qquad r_p = (g-p)R.$$

Napięcie e_g na zaciskach galwanometru typu napięciowego wiąże się z jego odchyleniem α wg zależności

$$e_g = C_u \cdot \alpha. \tag{3}$$

W przypadku miernika prądowego mamy odpowiednio wzór

$$i_g = C_i \cdot \alpha. \tag{4}$$

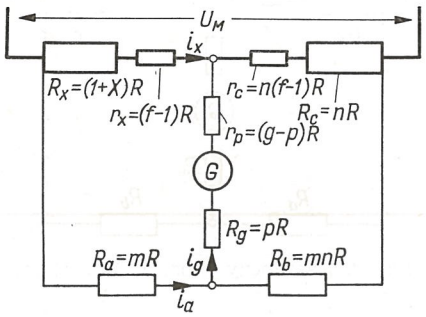
W rozważaniach naszych przyjmujemy stałość warunków zasilania. Założenie to w rzeczywistości nie jest dokładnie zachowane, gdyż wraz ze zmianą rozstrojenia zmienia się i oporność zastępcza układu widziana z zacisków zasilania. Wartość tej oporności i jej zmiany są ważnym czynnikiem prawidłowego zaprojektowania źródłowej części układu wg wytycznych podanych w pracy [2]. Zagadnienie to będzie przeanalizowane w rozdziale 4 niniejszego artykułu.

2. ODCHYŁOWY MOSTEK ZASILANY NIEZMIENNYM NATĘŻENIEM $I_M = \text{const}(X)$

2.1. Układ ze wskaźnikiem napięciowym

Schemat zastępczego mostka Wheatstone'a dla rozpatrywanego przypadku jest przedstawiony na rys. 3. Stosownie do zaznaczonych tam wartości prądów i oporności możemy ustawić poniższy układ równań:

$$\left.\begin{aligned} &i_x + i_a = I_M; \\ &i_x(R_x + r_x + r_c + R_c) = i_a(R_a + R_b); \\ &i_x(R_x + r_x) - i_a \cdot R_a - e_g = 0. \end{aligned}\right\}$$



Rys. 3. Układ ze wskaźnikiem napięciowym, zasilany niezmiennym natężeniem

Po wprowadzeniu oznaczeń (1) i (2) układ ten przybiera postać

$$\left.\begin{aligned} &i_x \cdot 1 + i_a \cdot 1 + e_g \cdot 0 = I_M; \\ &i_x[X + f(1+n)] - i_a \cdot m(1+n) + e_g \cdot 0 = 0; \\ &i_x(X+f)R - i_a \cdot m \cdot R + e_g \cdot 1 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Wyznaczamy stąd wartość napięcia na galwanometrze e_g i przy wykorzystaniu związku (3) otrzymujemy zależność

$$e_g = \frac{I_M \cdot R \cdot m \cdot n \cdot X}{X + (f+m)(1+n)} = C_u \cdot \alpha.$$

Z wyrażenia tego łatwo obliczyć, że

$$\lim_{X \to \infty} \alpha = \frac{I_M \cdot R}{C_u} m \cdot n.$$

Wykonujemy obecnie dalsze przekształcenia wzoru na e_g i otrzymujemy następującą charakterystykę pomiarową rozpatrywanej odmiany odchyłowego mostka Thomsona:

$$X = \frac{[(f+m)(1+n)]\alpha}{\left[\frac{I_M \cdot R}{C_u} m \cdot n\right] - \alpha}.$$

Mianownik tego wzoru przybiera wartość zerową tylko w przypadku, gdy $X \to \infty$; jest to widoczne z porównania z poprzednio obliczoną granicą.

Powyższą charakterystykę pomiarową można zapisać ogólnie w postaci uproszczonej, jak następuje:

$$X = \frac{k \cdot \alpha}{\alpha_\infty - \alpha}; \tag{5}$$

$$\frac{X}{k} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha_\infty}}{1 - \frac{\alpha}{\alpha_\infty}}; \tag{6}$$

$$\alpha = \alpha_\infty \frac{X}{X + k}. \tag{7}$$

Widzimy, że w obecnie rozpatrzonym przypadku obowiązują następujące wartości elementów charakterystyki k oraz α_∞:

$$k = (f + m)(1 + n), \qquad \alpha_\infty = \frac{I_M \cdot R}{C_u} m \cdot n. \tag{8}$$

Warto podkreślić, że dla danego układu mostka współczynnik k jest wartością absolutnie stałą, zależną jedynie od doboru stosunków poszczególnych oporności. Odchylenie graniczne α_∞ zależy natomiast nie tylko od wspomnianych stosunków, lecz również od wartości prądu zasilającego. Iloraz k/α_∞ daje pojęcie o czułości układu w pobliżu stanu równowagi.

2.2. Układ ze wskaźnikiem prądowym

Zastępczy układ połączeń dla obecnego przypadku ilustruje rys. 4. W oparciu o ten schemat napiszemy następujący układ równań wyjściowych:

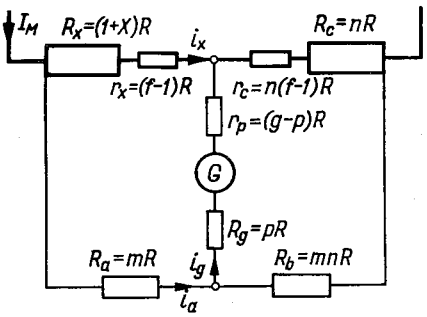
$$\left.\begin{aligned} &i_x + i_a = I_M; \\ &i_x(R_x + r_x) + (i_x + i_g)(R_c + r_c) = i_a \cdot R_a + (i_a - i_g) R_b; \\ &i_x(R_x + r_x) - i_a \cdot R_a - i_g(R_g + r_p) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Wprowadzając oznaczenia (1) i (2) przepiszemy ten zespół równań w nowej postaci jako

$$\left.\begin{aligned} &i_x \cdot 1 + i_a \cdot 1 + i_g \cdot 0 = I_M; \\ &i_x[X + f(1 + n)] - i_a \cdot m(1 + n) + i_g \cdot n(f + m) = 0; \\ &i_x(X + f) - i_a \cdot m - i_g \cdot g = 0. \end{aligned}\right\}$$

Rozwiązujemy przytoczony układ równań względem poszukiwanego prądu w galwanometrze i_g i przy wykorzystaniu zależności (4) otrzymujemy

$$i_g = \frac{I_M \cdot m \cdot n \cdot X}{X[n(f+m)+g]+(f+m)[n(f+m)+g(1+n)]} = C_i \cdot \alpha .$$



Rys. 4. Układ ze wskaźnikiem prądowym, zasilany niezmiennym natężeniem

Obliczmy wartość granicznego odchylenia w przypadku, gdy $X \to \infty$:

$$\lim_{X\to\infty} \alpha = \frac{I_M}{C_i} \cdot \frac{m}{f+m+\frac{g}{n}}.$$

Przekształcając dalej poprzedni wzór na prąd w galwanometrze dochodzimy do wyrażenia

$$X = \frac{\left[(f+m)\dfrac{f+m+g\dfrac{1+n}{n}}{f+m+\dfrac{g}{n}}\right]\alpha}{\left[\dfrac{I_M}{C_i}\cdot\dfrac{m}{f+m+\dfrac{g}{n}}\right]-\alpha}.$$

Porównanie powyższej zależności z ogólną postacią charakterystyki pomiarowej (5) wskazuje, że dla obecnie rozpatrywanego przypadku należy przyjąć następujące znaczenie elementów k oraz α_∞:

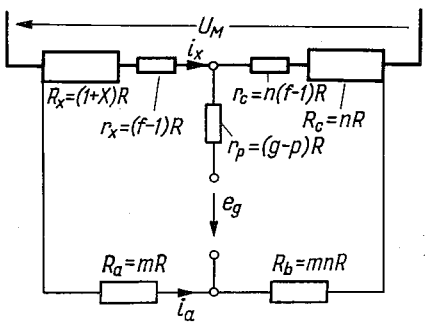
$$k = (f+m)\frac{f+m+g\dfrac{1+n}{n}}{f+m+\dfrac{g}{n}}, \qquad \alpha_\infty = \frac{I_M}{C_i}\cdot\frac{m}{f+m+\dfrac{g}{n}}. \tag{9}$$

3. ODCHYŁOWY MOSTEK ZASILANY NIEZMIENNYM NAPIĘCIEM $U_M = \text{const}\,(X)$

3.1. Układ ze wskaźnikiem napięciowym

Na rys. 5 przedstawiono zastępczy mostek Wheatstone'a, obowiązujący dla obecnego przypadku. Zgodnie z zaznaczonymi tam wartościami prądów, napięć i oporności ustalamy poniższy układ równań wyjściowych:

$$\left.\begin{aligned} &i_x(R_x + r_x + r_c + R_c) = U_M;\\ &i_a(R_a + R_b) = U_M;\\ &i_x(R_x + r_x) - i_a \cdot R_a - e_g = 0. \end{aligned}\right\}$$



Rys. 5. Układ ze wskaźnikiem napięciowym, zasilany niezmiennym napięciem

Zastosowanie oznaczeń (1) i (2) doprowadza ten układ do postaci

$$\left.\begin{aligned} &i_x[X + f(1+n)] + i_a \cdot 0 \qquad + e_g \cdot 0 = \frac{U_M}{R};\\ &i_x \cdot 0 \qquad\qquad + i_a(1+n) \; + e_g \cdot 0 = \frac{U_M}{m \cdot R};\\ &i_x(X+f)R \qquad - i_a \cdot m \cdot R - e_g \cdot 1 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Wyznaczamy stąd wartość napięcia na galwanometrze e_g i przy wykorzystaniu związku (3) dostajemy zależność

$$e_g = \frac{U_M \cdot n \cdot X}{X(1+n) + f(1+n)^2} = C_u \cdot \alpha.$$

Na podstawie tego wzoru możemy określić wartość granicznego odchylenia galwanometru, jakie wystąpiłoby w przypadku $X \to \infty$:

$$\lim_{X \to \infty} \alpha = \frac{U_M}{C_u} \cdot \frac{n}{1+n}.$$

Wykonujemy dalsze przekształcenia wzoru na e_g i otrzymujemy następujące wyrażenie charakterystyki pomiarowej:

$$X = \frac{[f(1+n)]\alpha}{\left[\frac{U_M}{C_u} \cdot \frac{n}{1+n}\right] - \alpha}.$$

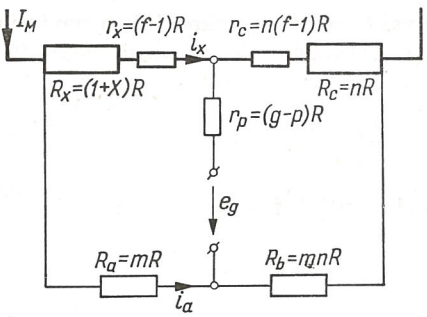
Wynika stąd, że w obecnie rozpatrywanym przypadku elementy charakterystyki wyrażają się jako

$$k = f(1+n), \qquad \alpha_\infty = \frac{U_M}{C_u} \cdot \frac{n}{1+n}. \tag{10}$$

3.2. Układ ze wskaźnikiem prądowym

Schemat połączeń, ważny dla obecnego przypadku, przedstawiono na rys. 6. Opierając się na nim ustawiamy następujące równania:

$$\left.\begin{aligned} &i_x(R_x + r_x) + (i_x + i_g)(R_c + r_c) = U_M; \\ &i_a \cdot R_a + (i_a - i_g)R_b = U_M; \\ &i_x(R_x + r_x) - i_a \cdot R_a - i_g(R_g + r_p) = 0. \end{aligned}\right\}$$



Rys. 6. Układ ze wskaźnikiem prądowym, zasilany niezmiennym napięciem

Wprowadzając oznaczenia (1) i (2) przepiszemy ten zespół równań w nowej postaci jako

$$\left.\begin{aligned} &i_x[X + f(1+n)] + i_a \cdot 0 + i_g \cdot f \cdot n = \frac{U_M}{R}; \\ &i_x \cdot 0 + i_a(1+n) - i_g \cdot n = \frac{U_M}{m \cdot R}; \\ &i_x(X+f) - i_a \cdot m - i_g \cdot g = 0. \end{aligned}\right\}$$

Rozwiązujemy przytoczony układ równań względem poszukiwanego prądu w galwanometrze i_g i przy wykorzystaniu zależności (4) otrzymujemy

$$i_g = \frac{\frac{U_M}{R} n \cdot X}{X[m \cdot n + f \cdot n(1+n) + g(1+n)] + f(1+n)[m \cdot n + f \cdot n + g(1+n)]} = C_i \cdot \alpha.$$

Obliczamy wartość granicznego odchylenia w przypadku, gdy $X \to \infty$:

$$\lim_{X \to \infty} \alpha = \frac{U_M}{C_i \cdot R} \cdot \frac{1}{f + m + f \cdot n + g\frac{1+n}{n}}.$$

Dalsze przekształcenia poprzedniego wzoru na prąd w galwanometrze prowadzą do wyrażenia

$$X = \frac{\left[f(1+n) \frac{f + m + g\frac{1+n}{n}}{f + m + f \cdot n + g\frac{1+n}{n}} \right] \alpha}{\left[\frac{U_M}{C_i \cdot R} \cdot \frac{1}{f + m + f \cdot n + g\frac{1+n}{n}} \right] - \alpha}.$$

Porównując powyższą zależność z ogólną postacią charakterystyki pomiarowej widzimy, że w obecnie rozpatrywanym przypadku symbole k oraz α_∞ reprezentują odpowiednio

$$\left.\begin{aligned} k &= f(1+n) \frac{f + m + g\frac{1+n}{n}}{f + m + f \cdot n + g\frac{1+n}{n}} \\ \alpha_\infty &= \frac{U_M}{C_i \cdot R} \cdot \frac{1}{f + m + f \cdot n + g\frac{1+n}{n}} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

4. PRZEBIEG CHARAKTERYSTYKI ODCHYŁOWEGO MOSTKA THOMSONA

Z rozważań przedstawionych w poprzedzających rozdziałach 2 i 3 wynika, że charakterystyka pomiarowa odchyłowego mostka Thomsona może być przedstawiona ogólnie przy pomocy zależności (5), (6) lub (7). Wyrażenia określające elementy charakterystyki k oraz α_∞ są zależne od warunków zasilania oraz rodzaju wskaźnika.

Ogólna postać charakterystyki odchyłowego mostka Thomsona jest taka sama, jak w przypadku niezrównoważonego mostka Wheatstone'a

[2]. Porównując odpowiednie wzory na współczynniki k oraz α_∞ dla obu rodzajów mostka widzimy ich wielkie podobieństwo. Fizycznym uzasadnieniem tego zjawiska jest fakt, że mostek Thomsona przechodzi w układ Wheatstone'a z chwilą, gdy przyjmiemy $q = 0$ oraz $s = 0$. Z definicji (2) wynika wówczas, że $f = 1$ oraz $g = p$. Przy takim założeniu osiąga się identyczność odpowiednich wzorów.

Najogólniejszą postacią charakterystyki pomiarowej jest zależność (6). Ilustracja graficzna i liczbowa tego wzoru jest podana w pracy [2] jako rys. 5 i tablica 1; nie będziemy zatem ich tu powtarzać.

5. OPORNOŚĆ ZASTĘPCZA MOSTKA WIDZIANA OD STRONY ZACISKÓW ZASILANIA

Oporność zastępcza mostka zależy oczywiście nie tylko od wartości mierzonego rozstrojenia X, lecz również od oporności wewnętrznej zastosowanego wskaźnika. Wynika stąd, że obliczenia należy wykonać dla dwu przypadków — zależnie od wybranego typu miernika.

5.1. Układ ze wskaźnikiem napięciowym

Do przeprowadzenia obliczeń posługujemy się schematem ideowym przedstawionym na rys. 3 lub 5. Przy uwzględnieniu oznaczeń (1) i (2) otrzymujemy bez trudności

$$R_M = m(1+n)\frac{X + f(1+n)}{X + (f+m)(1+n)}R.$$

Dla mostka znajdującego się w stanie równowagi (tj. $X = 0$) mamy

$$R_{M0} = f \cdot m\frac{1+n}{f+m}R. \tag{12}$$

Względna zmiana oporności zastępczej przy $X \neq 0$ wyniesie zatem

$$\delta_{RM} = \frac{R_M - R_{M0}}{R_{M0}} = \frac{X \cdot m}{f[X + (f+m)(1+n)]}. \tag{13}$$

5.2. Układ ze wskaźnikiem prądowym

Obliczenia opieramy na schemacie, który jest wyobrażony na rys. 4 lub 5. Oczywiście i tutaj korzystamy z oznaczeń (1) oraz (2). W rezultacie nieco bardziej złożonych przekształceń otrzymujemy

$$R_M = m\frac{\begin{array}{r}X(m \cdot n + f \cdot n + f \cdot n^2 + g \cdot n + g) + \\ + f(1+n)(m \cdot n + f \cdot n + g \cdot n + g)\end{array}}{X(m \cdot n + f \cdot n + g) + (f+m)(m \cdot n + f \cdot n + g \cdot n + g)}R.$$

Z powyższego wyrażenia wynika, że w stanie równowagi układu jest $R_{M0} = f \cdot m \frac{1+n}{f+m} R$. Rezultatu tego należało oczekiwać w świetle poprzednich rozważań [wzór (12)], gdyż w układzie zrównoważonym nie płynie prąd przez galwanometr, i to bez względu na rodzaj użytego przyrządu. Obliczamy teraz względną zmianę oporności zastępczej i znajdujemy

$$\delta_{RM} = \frac{X \cdot m}{X \frac{f(1+n)(m \cdot n + f \cdot n + g)}{n \cdot m + f \cdot n + g \cdot n + g} + f(f+m)(1+n)}. \tag{14}$$

Wykonywanie obliczeń wg wzoru (14) jest dość niewygodne. W zastosowaniach praktycznych można posługiwać się zależnością przybliżoną, która daje wyniki wystarczająco dokładne, a mianowicie:

$$\delta_{RM} = \frac{X \cdot m}{f[X(1+n) + (f+m)(1+n)]}. \tag{15}$$

6. REGULACJA I STABILIZACJA ZASILANIA MOSTKA

Charakterystyki pomiarowe, wyprowadzone poprzednio w rozdziałach 2 i 3, będą zachowane, o ile prąd lub napięcie zasilania utrzymywać będzie założoną wartość. Rozpatrywany układ pomiarowy zazwyczaj czerpie energię ze źródeł elektrochemicznych, które wykazują zmniejszanie się siły elektromotorycznej i wzrost oporności wewnętrznej w miarę postępującego procesu rozładowania.

Wynika stąd konieczność stosowania układu regulacyjnego, włączonego pomiędzy źródło i zaciski zasilania mostka. Układ ten powinien spełniać jednocześnie dwa cele: umożliwiać nastawienie żądanych warunków zasilania w pewnych granicach wartości *SEM* źródła oraz zmniejszać zmiany warunków zasilania wywołane zmianami oporności badanej.

W ten sposób ujęty problem regulacji i stabilizacji zasilania mostka był już rozpatrzony w pracy [2]. Nie ma zatem potrzeby powtarzania tutaj tych rozważań.

7. WPŁYW OPORNOŚCI POŁĄCZENIOWEJ R_o NA CHARAKTERYSTYKĘ POMIAROWĄ

Oporność połączenia R_o, zawartego pomiędzy opornikami R_x oraz R_c, została związana z opornością podstawową R przy pomocy współczynnika s wg definicji (1). Współczynnik ten wszedł z kolei do oznaczeń pomocniczych f oraz g wg określenia (2). Oznaczenia te występują zarówno we wzorach na k, jak i na α_∞. Ogólnie rzecz biorąc widzimy, że R_o wpływa na charakterystykę pomiarową układu.

Zagadnienie to warto rozważyć nieco dokładniej. Zasadnicze składniki mostka, czyli oporniki R_a, R_b, R_d, R_e oraz R_g, wykazują znaczne i stałe wartości oporności, normalnie rzędu co najmniej dziesiątków omów. W związku z tym ewentualne zmiany oporności połączeń do tych oporników wywierają znikomo mały wpływ na współczynniki m, n, p oraz q. Inaczej natomiast przedstawia się sprawa w odniesieniu do oporności R_o. Materiałem tego elementu jest zazwyczaj miedź, wykazująca znaczną zależność od temperatury. W przypadku układu rozłączalnego (dla wymiany różnych obiektów badanych) na wartość R_o składa się też oporność styku, wykazująca tendencję do zmian. Normalnie układ konstruuje się w taki sposób, by było $s \ll 1$. Jednak w przypadku bardzo małych wartości R trzeba się liczyć z faktem, że oporność połączenia R_o może być współmierna — a nawet większa od oporności badanego R_x. Zakładając, że $s \ll q$ (co zwykle jest spełnione), możemy oszacować w przybliżeniu wartości

$$f \approx 1 + \frac{s}{1+n}, \quad g \approx p + q\frac{n}{1+n}. \tag{16}$$

Z wyrażeń (16) wynika, że wartość współczynnika g przy dużych q niewiele zależy od oporności połączenia R_o. Pamiętając natomiast, że $n \approx 1$, stwierdzamy dość silną zależność parametru f od omawianej oporności połączenia.

We wzorach (8) i (9) na elementy charakterystyki mostka zasilanego niezmiennym natężeniem współczynnik f występuje zawsze w sumie z m; niekiedy dochodzą jeszcze dalsze składniki, niezależne od R_o. W należycie zaprojektowanym mostku Thomsona zawsze jest $R_a = m \cdot R$ dużo większe od $R_o = s \cdot R$. Widzimy zatem, że w tych układach zmiany oporności połączeniowej wywierają znikomo mały wpływ na wartości elementów charakterystyki k oraz α_∞.

Inaczej sprawa przedstawia się w odniesieniu od układów zasilanych niezmiennym napięciem. W wyrażeniach określających k współczynnik f występuje samodzielnie. Prowadzi to do niepomijalnej zależności charakterystyki pomiarowej od oporności połączenia R_o. Wynika stąd oczywisty wniosek, że układów tych należy unikać. Można je stosować pod warunkiem, że s będzie wartością niewielką lub o znacznej stałości.

8. ZAKOŃCZENIE

Przytoczone rozważania dowodzą, że charakterystyka pomiarowa odchyłowego mostka Thomsona we wszystkich rozpatrzonych przypadkach daje się przedstawić przy pomocy prostej zależności algebraicznej. Poza początkowym odcinkiem, odpowiadającym małym wartościom rozstrojenia, zależność ta jest zdecydowanie nieliniowa. Dochowanie ustalonej charakterystyki wymaga utrzymania stałości warunków zasilania.

Normalnie mostek Thomsona pracuje w układzie z niezmiennym prądem; jest to naturalną konsekwencją małych wartości oporności R_x oraz R_c. W szczególnych przypadkach, gdy oporność badana jest rzędu omów, może być również stosowany układ zasilany niezmiennym napięciem. Należy wówczas zapewnić małą i stałą wartość oporności połączenia R_o.

Ogólna postać charakterystyki pomiarowej wg wzorów (5), (6) i (7) jest taka sama, jak dla odchyłowego mostka Wheatstone'a. Wynika stąd, że rozważania nad skalowaniem układu i dokładnością pomiaru oraz nad liniowością charakterystyki, podane w publikacjach [3] i [4], są ważne również dla mostka Thomsona.

Uważamy, iż powyższa analiza właściwości odchyłowego mostka Thomsona, wykazująca nieskomplikowaną postać jego charakterystyki, przyczyni się do zaliczenia tego układu w poczet stosowanych metod pomiaru.

Politechnika Gdańska
Katedra Miernictwa Elektrycznego

WYKAZ LITERATURY

1. Niestierenko A. D.: Osnowy rasczeta elektroizmieritielnych schiem urawnowieszиwanija. — Izd. Akad. Nauk Ukrainskoj SSR, Kijew 1960.
2. Sawicki J.: Właściwości niezrównoważonego mostka Wheatstone'a. — Arch. El., t. X, zesz. 1, Warszawa 1961.
3. Sawicki J.: Skalowanie i dokładność mostka odchyłowego. — Arch. El., t. X, zesz. 1, Warszawa 1961.
4. Sawicki J.: Liniowe przybliżenie charakterystyki mostka odchyłowego. — Arch. El., t. XII, zesz. 2, Warszawa 1963.

J. SAWICKI

PROPRIÉTÉS DE PONT DOUBLE NON — EQUILIBRE DE THOMSON

Résumé

Le pont double non-équilibré de Thomson a quatre principales espèces. Il peut être alimenté par l'intensité constante de courant ou par la tension constate. Ça veut dire, que les conditions d'alimentation sont indépendantes de la valeur de la résistance mésurée R_x. Le dispositif peut avoir des indicateurs de deux types: tension ou courant. Aux indicateurs de prémier type appartiennent potentiomètres automatiques ainsi qu'appareils de mesure électroniques et oscillographes à grande résistance d'entrée. La déviation de tels appareils dépend de la différence de tensions sans prendre le courant du schéma de mesure. Aux indicateurs de deuxième type appartiennent les galvanomètres, millivoltmètres et oscillographes à boucles, la déviation de lesquels depend de la valeur du courant qui passe par eux.

Dans le chapitre 2 on étudié le pont alimenté par l'intensité constante avec indicateur du type tension et ensuite du courant. Le chapitre 3 est consacré au pont alimenté par la tension constante, aussi avec les indicateurs de deux types.

On a obtenu en général des formules essentielles (5), (6) et (7) dans lesquelles coéfficients k et α_∞ dépendent des conditions d'un cas particulier.

Le courant ou la tension d'alimentation dépendent dans un certain degré de la valeur d'un objet étudié. On a déduit les formules de la résistance équivalente du pont sur les bornes d'alimentation R_{Mo} dans l'état de l'équilibre. Ensuite on a donné des formules du changement rélatif de cette résistance δ_{RM} en cas du pont avec un indicateur de tension et de courant. Dans le chapitre 7 on a étudié l'influence de la résistance de connection R_o sur la caractéristique de mesure.

J. SAWICKI

EIGENSCHAFTEN DER UNABGEGLICHENEN THOMSON-BRÜCKE

Zusammenfassung

Die unabgeglichene Thomson-Brücke besitzt vier Hauptabarten. Sie kann entweder mit dem von der Grösse des Prüflings R_x unabhängigen Strom oder Spannung gespeist werden. Anderseits kann ein Anzeigeinstrument der Spannungs oder Stromtype angewendet werden. Als spannungsempfindliche Instrumente werden selbsttätige Kompensatoren, so wie elektronische Messinstrumente und Oszillographen mit hohem Eingangswiderstand gemeint. Die Ablenkung dieser Instrumente ist von der Spannungsunterschied abhängig, wobei sie keinen nennenswerten Strom von der Messchaltung entnehmen. Als stromempfindliche Instrumente bezeichnen wir Galvanometer, Milivoltmeter und oszillographische Schleifen, derer Ablenkung vom durchfliessenden Strom abhängt.

Im 2. Absatz wurde die mit konstantem Strom gespeiste Brücke erstens mit einem Spannungsinstrument und nachher mit einem stromepfindlichen behandelt. Der Absatz 3 ist der mit konstanter Spannung gespeisten Brücke mit Spannungs- und Stromanzeigeinstrument gewidmet.

Es wurden die allgemein gültigen Formeln (5), (6) und (7) erhalten, wobei k und α_∞ vom entsprechenden Fall abhängig sind.

Der Speisestrom oder die Speisespannung hängen in gewissem Grade vom Wert des Prüflings ab. Es wurden Formeln für den Ersatzwiderstand der Brücke an den Speisungsklemmen beim Gleichgewicht R_{Mo} abgeleitet. Ferner wurden Formeln für die relative Änderung dieses Widerstandes δ_{RM} bei einer Brücke mit Spannungs- oder Stromanzeigeinstrument angegeben. Im Absatz 7 ist der Einfluss des Verbindungswiderstandes R_o auf die Messcharakteristik erlautert.

Е. САВИЦКИ

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО МОСТА ТОМСОНА

Резюме

Неуравновешенный мост Томсона имеет четыре различные варианты. Он может действовать при питании током или напряжением не зависящими от

значения измеряемого сопротивления R_x. В качестве указательного прибора может быть применён прибор, реагирующий на напряжение или на ток. К первому типу зачисляются так автоматические потенциометры, как и электронные измерители и осциллографы, имеющие большое входное сопротивление. Отклонения этих приборов пропорционально разности потенциалов, причём они не получают тока из измерительной схемы. Приборами токового типа являются гальванометры, милливольтметры и осциллографические шлейфы, отклонения которых зависят от проходящего тока.

Во второй главе рассмотрен мост, питаемый постоянным током, сначала с измерителем первого типа, а затем с токовым. 3-я глава посвящёна мосту, питаемому постоянным напряжением с указателем чувствительным к напряжению и к току. Получаем общие формулы (5), (6) и (7) — где величины k и α_∞ являются выражениями зависимыми от конкретного случая.

Питающий ток или напряжение на зажимах моста зависят в некоторой степени от значения измеряемого сопротивления. В статье выведена формула для эквивалентного сопротивления моста на зажимах питания R_{Mo} при состоянии равновесия. Далее выведены формулы для относительного изменения этого сопротивления δ_{RM} при мосте с измерителем 1-го типа и токовым. Далее проанализировано влияние сопротивления соединения R_o на измерительную характеристику.

621.317.733

JERZY SAWICKI

Czułość i dobór elementów odchyłowego mostka Thomsona

Rękopis dostarczono 25.11.1963

Niniejszy artykuł jest poświęcony zasadom takiego doboru elementów układu odchyłowego mostka Thomsona, który pozwoli uzyskać założone wartości współczynników charakterystyki pomiarowej k oraz α_∞. Potrzebne wartości tych współczynników, zdefiniowanych w pracy [1], określa się w zależności od zakresu pomiaru i dopuszczalnego uchybu od nieliniowości, postępując według wytycznych zawartych w pracy [2].

1. WSTĘP

Dobór elementów układu odchyłowego mostka Thomsona przeprowadza się na podstawie żądanych wartości zakresu pomiarowego oraz dopuszczalnego (zredukowanego) uchybu od nieliniowości. Przez „elementy mostka" rozumiemy dane liczbowe określające poszczególne oporniki układu i użyty wskaźnik. W odniesieniu do miernika ważna jest nie tylko jego stała napięciowa lub prądowa, lecz także i oporność wewnętrzna. Trzeba również znać dopuszczalne natężenie prądu w obiekcie badanym, by przy projektowaniu układu nie spowodować przeciążenia tego opornika. Wypada tu zauważyć, że obciążalności pozostałych oporników mostka nie są z góry określone, a wyznacza się je po całkowitym obliczeniu układu.

Sposób wyznaczenia wartości współczynników charakterystyki mostka k oraz α_∞, stosownych dla założonego zakresu pomiaru i dopuszczalnego uchybu od nieliniowości, jest przedstawiony w publikacji [2]. Wymienione współczynniki, jak to wynika z ich wzorów definicyjnych w artykule [1], nie określają jeszcze jednoznacznie wartości elementów układu. Praca niniejsza jest właśnie poświęcona rozpatrzeniu zagadnienia doboru tych wielkości na podstawie znanych k oraz α_∞.

Tok rozwiązywania postawionego problemu jest zależny od przebiegu charakterystyki pomiarowej. Niektóre układy wykazują niejako samorzutnie praktycznie liniową zależność odchylenia miernika od rozstrojenia mierzonego. Zjawisko to występuje w tych przypadkach, gdy zredukowany uchyb od nieliniowości δ jest pomijalnie mały wobec uchybu podstawowego użytego wskaźnika. Ten ostatni uchyb można określić ze znanej klasy dokładności $\varkappa$, przy czym wartość tę rozumiemy jako licz-

bę oderwaną, a nie wyrażamy w procentach. Stosownie do poglądów prof. Trzetrzewińskiego [4] przyjmujemy, że uchyb δ jest pomijalnie mały wobec klasy miernika, jeżeli jest spełniona nierówność $\delta \leqslant \varkappa/3$.

Zredukowany uchyb od nieliniowości był obliczony w artykule [2], gdzie oprócz wzoru ścisłego (23) wyprowadzono zależność przybliżoną (28), charakteryzującą się bardzo dobrą zgodnością z wyrażeniem dokładnym. Opierając się na tym wzorze przybliżonym oraz poprzedniej nierówności możemy utworzyć wymaganie

$$X_M \leqslant k \frac{1{,}9428 \cdot \varkappa}{1 - 1{,}138 \cdot \varkappa},$$

gdzie X_M oznacza górną granicę zakresu mierzonych rozstrojeń.

Ze wzorów podanych w pracy [1] wynika, że zawsze jest $k > 1$. Uwzględniając także, iż $\varkappa \geqslant 1 \cdot 10^{-3}$, otrzymujemy warunek praktycznej liniowości charakterystyki pomiarowej mostka w postaci obostrzonej

$$X_M \leqslant 1{,}945 \cdot \varkappa. \tag{1}$$

Widzimy stąd, że dla $X_M < 2 \cdot 10^{-3}$ podziałka miernika jest liniowa bez względu na klasę dokładności zastosowanego wskaźnika.

Przy założeniu, że wymaganie (1) jest spełnione, możemy przedstawić charakterystykę pomiarową jako zależność $X = C_M \cdot \alpha$, gdzie współczynnik C_M nazywamy stałą układu mostkowego. Wartość tę łatwo ustalić na podstawie znanego zakresu pomiaru X_M oraz największego odchylenia miernika α_M.

Porównując poprzednią zależność proporcjonalną ze ścisłym wzorem dla charakterystyki pomiarowej ([1], wz. 5) stwierdzamy od razu, iż stała układu daje się wyrazić jako

$$C_M = k/\alpha_\infty. \tag{2}$$

Konieczność unikania przeciążeń skłania nas do wyrażania prądu w obiekcie badanym w zależności od jego obciążalności, którą oznaczamy przez i_{xd}. Prąd płynący przez opornik R_x w stanie równowagi mostka i_{xo} wyrażamy w związku z tym jako

$$i_{xo} = \eta \cdot i_{xd}, \tag{3}$$

gdzie współczynnik wykorzystania obciążalności η ma wartość dodatnią, nie przekraczającą 1. Natężenie prądu zasilającego układ pomiarowy można przedstawić jako

$$I_M = \frac{f + m}{m} \eta \cdot i_{xd}. \tag{4}$$

Dla mostka zasilanego niezmiennym napięciem otrzymamy związek

$$U_M = f(1 + n)\eta \cdot R \cdot i_{xd}. \tag{5}$$

Dla wskaźnika typu prądowego wprowadzimy pojęcie stałej napięciowej C_u według określenia

$$C_u = g \cdot C_i \cdot R. \tag{6}$$

Należy tutaj wyjaśnić, że iloczyn $g \cdot R$ przedstawia całkowitą oporność gałęzi galwanometru w zastępczym mostku Wheatstone'a (por. [1]).

Uproszczenie zapisu wielu wyrażeń występujących w naszych rozważaniach uzyskujemy przez zastosowanie współczynnika korelacji

$$\varepsilon = \frac{\alpha_\infty \cdot C_u}{i_{xd} \cdot R}. \tag{7}$$

Zauważmy jeszcze, że przy projektowaniu mostka Thomsona stosuje się normalnie jednakowe wartości współczynników m oraz q. Prowadzi to do zmniejszenia liczby różnych oporników, gdyż wówczas $R_a = R_d$ oraz $R_b = R_e$. Z tego samego względu celowe jest dobrać $n = 1$. Wybór taki jest również wskazany dla zmniejszenia mocy wydzielanej na oporniku R_c.

2. MOSTEK O CHARAKTERYSTYCE PRAKTYCZNIE LINIOWEJ

Przyjmując, że spełniony jest warunek liniowości (1), będziemy rozpatrywać wyrażenia dla stałej układu C_M, które wyprowadzimy na podstawie zależności (2). Musimy przy tym zbadać każdy z czterech głównych przypadków mostka odchyłowego, przedstawionych w publikacji [1].

2.1. Mostek zasilany niezmiennym natężeniem $I_M = \text{const}\,(X)$, układ ze wskaźnikiem napięciowym

Dane charakterystyczne k oraz α_∞, ważne dla rozpatrywanego przypadku, zostały wyprowadzone w artykule [1] i noszą tam numer (8). Na ich podstawie, jak również przy uwzględnieniu zależności (4), otrzymujemy następujące wyrażenie dla stałej pomiaru

$$C_M = \frac{C_u}{i_{xd} \cdot R} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{1+n}{n}. \tag{8}$$

Potrzebną wartość stałej układu C_M osiąga się przez należyty dobór stałej napięciowej przyrządu C_u, stopnia wykorzystania obciążalności obiektu η oraz stosunku oporności n. Zadanie to jest tym trudniejsze do praktycznego rozwiązania, im mniejsza jest wartość C_M, to znaczy im większej żądamy czułości $S_M = 1/C_M$. W związku z tym staramy się stosować możliwie duże η oraz n. Wzór (8) wskazuje jednak, że zwykle nie opłaca się przekraczać $n = 5$, gdyż zmniejsza to stałą pomiaru w niewielkim

stopniu, podczas gdy obciążenie opornika R_c wzrasta proporcjonalnie. Dalszym skutkiem jest znaczne zwiększenie napięcia i mocy źródła zasilania.

Widzimy również, że współczynniki m oraz q nie wpływają tutaj na czułość mostka. Pozwala to na dużą swobodę w doborze wartości odpowiednich oporników.

Z poprzednich wywodów wynika, iż normalnie jest $\frac{1}{\eta} \cdot \frac{1+n}{n} \geqslant 1{,}2$. Na tej podstawie i w oparciu o wzór (8) możemy stwierdzić, że postawione zadanie da się rozwiązać przy zastosowaniu miernika spełniającego wymaganie

$$C_u \leqslant 0{,}83 \cdot C_M \cdot i_{xd} \cdot R. \tag{9}$$

Powyższą zależność nazwiemy warunkiem rozwiązalności zadania.

2.2. Mostek zasilany niezmiennym natężeniem $I_M = \text{const}\,(X)$, układ ze wskaźnikiem prądowym

Wyrażenia określające wartości współczynników k oraz α_∞ zostały wyprowadzone w publikacji [1] jako wzór (9). Biorąc pod uwagę zależności (4) i (6) wyrazimy stałą pomiaru w postaci

$$C_M = \frac{C_u}{i_{xd} \cdot R} \cdot \frac{1}{\eta}\left(\frac{1+n}{n} + \frac{f+m}{g}\right). \tag{10}$$

Dążąc do dużej czułości układu, podobnie jak w poprzednio rozpatrzonym przypadku, wybieramy znaczne wartości η oraz n. Bliższego zbadania wymaga jednak drugi składnik sumy we wzorze (10). Uwzględniając definicje współczynników pomocniczych f oraz g ([1], wzór 2) możemy napisać

$$\frac{f+m}{g} = W = \frac{m(2+n)+s(1+m)}{p(m+s)+m \cdot n(m+p)}.$$

Na podstawie powyższego wyrażenia obliczymy

$$\frac{\partial W}{\partial n} = -m^2 \frac{(m+s)+(m+p)(1+s)}{[p(m+s)+m \cdot n(m+p)]^2} < 0,$$

co potwierdza celowość stosowania możliwie znacznych wartości n. Obecnie wyznaczymy wartość

$$\frac{\partial W}{\partial m} = \frac{-m^2 \cdot n(2+n+s) - 2 \cdot m \cdot n \cdot s + p \cdot s(1+s)}{[p(m+s)+m \cdot n \cdot (m+p)]^2}.$$

Wyrażenie stojące w liczniku powyższego wzoru posiada pierwiastki $m_{1,2} = \frac{s}{2+n+s}\left[-1 \pm \sqrt{1+p\frac{1+s}{n \cdot s}(2+n+s)}\right]$, z których m_1 jest war-

tością ujemną, zaś m_2 — dodatnią. Widzimy, że w punkcie m_2 występuje maksymalna wartość czynnika W, której należy unikać. W praktyce stosuje się możliwie znaczne m.

Z poprzednio podanego wzoru wynika, że W jest malejącą funkcją współczynnika p. Korzystne jest więc stosowanie wskaźnika o możliwie dużej oporności wewnętrznej.

Na zakończenie znajdziemy jeszcze

$$\frac{\partial W}{\partial s} = m \frac{m \cdot n(1+m) + p[m(1+n)-1]}{[p(m+s) + m \cdot n(m+p)]^2} > 0,$$

co dowodzi rosnącego charakteru zależności $W = f(s)$.

W przeciętnym mostku należy się liczyć z wartościami rzędu $n = 1$, $s = 1$, $m \geqslant 10$. Badany czynnik W można wówczas oszacować w przybliżeniu, jak następuje: $W \approx \frac{4}{m+2p}$. Uwzględniając fakt, że współczynniki m oraz p są zbliżonego rzędu wielkości, stwierdzamy, iż $W \leqslant 0{,}12$. Dla $n > 1$ wyrażenie W przybiera wartości mniejsze od podanej.

Ze wzoru (10), przy założeniu $n = 5$ i pesymistycznym przyjęciu wartości $W = 0{,}12$, wynika następujący warunek rozwiązalności zadania:

$$C_u \leqslant 0{,}75 \cdot C_M \cdot i_{xd} \cdot R. \tag{11}$$

2.3. Mostek zasilany niezmiennym napięciem $U_M = \text{const}\,(X)$, układ ze wskaźnikiem napięciowym

Stałą pomiarową układu C_M obliczamy na podstawie wzorów (10) z artykułu [1] oraz zależności (2) i (5), podanych poprzednio. W ten sposób otrzymujemy wyrażenie

$$C_M = \frac{C_u}{i_{xd} \cdot R} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{1+n}{n},$$

identyczne z (8), obliczonym w rozdziale 2.1. Okazuje się zatem, że stała pomiarowa układu ze wskaźnikiem napięciowym jest niezależna od sposobu zasilania mostka. Oczywiście, także i warunek rozwiązalności zadania jest wspólny dla obu tych przypadków. Dotyczy to jednak, jak się okaże później, wyłącznie mostka o charakterystyce praktycznie liniowej (proporcjonalnej).

2.4. Mostek zasilany niezmiennym napięciem $U_M = \text{const}\,(X)$, układ ze wskaźnikiem prądowym

Współczynniki k oraz α_∞ są tutaj określone wzorami (11), podanymi w pracy [1]. Uwzględniając poprzednio wprowadzone zależności (5) i (6),

wyznaczymy następującą wartość stałej układu pomiarowego:

$$C_M = \frac{C_u}{i_{xd} \cdot R} \cdot \frac{1}{\eta}\left(\frac{1+n}{n} + \frac{f+m}{g}\right).$$

Otrzymany wynik jest identyczny ze wzorem (10) z punktu 2.2. Widzimy więc, że stała układu C_M przy zastosowaniu wskaźnika typu prądowego nie zależy od rodzaju zasilania mostka. To samo dotyczy warunku rozwiązalności zadania (11). Omawiane zjawisko występuje jednak tylko dla mostków o charakterystyce praktycznie liniowej.

3. MOSTEK O CHARAKTERYSTYCE NIELINIOWEJ

W tych przypadkach, gdy warunek (1) nie jest spełniony, przede wszystkim należy wyznaczyć wymagane wartości danych charakterystyki pomiarowej k oraz α_∞. Korzysta się przy tym ze sposobu postępowania przedstawionego w publikacji [2]. Na podstawie wyników tych obliczeń ustala się następnie elementy układu. Wyrażenia określające dane charakterystyczne są — jak wiemy — odrębne dla każdego z czterech przypadków mostka odchyłowego. Rozpatrzymy je tutaj po kolei.

3.1. Mostek zasilany niezmiennym natężeniem $I_M = \text{const}\,(X)$, układ ze wskaźnikiem napięciowym

Elementy charakterystyki k oraz α_∞ dla rozpatrywanego przypadku zostały wyprowadzone w artykule [1] i noszą tam numer (8). Na ich podstawie i przy uwzględnieniu zależności (4) oraz (7) możemy ustawić następujący układ równań:

$$\left.\begin{aligned}(f+m)(1+n) &= k\\ (f+m)n &= \frac{\varepsilon}{\eta}\end{aligned}\right\}.$$

Rozwiązaniami tego układu są wyrażenia

$$m = k - f - \frac{\varepsilon}{\eta}, \qquad n = \frac{\dfrac{\varepsilon}{\eta}}{k - \dfrac{\varepsilon}{\eta}}.$$

Zakładając $q = m$ i stosując poprzednie wyrażenie na n, otrzymujemy z definicji współczynnika pomocniczego f następujący wzór:

$$f = 1 + \frac{m \cdot s\left(k - \dfrac{\varepsilon}{\eta}\right)}{m \cdot k + s\left(k - \dfrac{\varepsilon}{\eta}\right)}.$$

Wprowadzenie tej zależności do poprzedniego wyrażenia dla współczynnika m prowadzi do równania

$$m^2 \cdot k - m\left[k \cdot \left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right) - 2 \cdot s\left(k-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right] + \\ - s\left(k-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right) = 0,$$

którego pierwiastkami są

$$m_{1,2} = \left[\frac{1}{2}\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right] - \left[\frac{s}{k}\left(k-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right] + \\ \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right]^2 + \left[\frac{s}{k}\left(k-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right]^2}.$$

Dla otrzymania dodatniej wartości współczynnika n musimy stosować $\varepsilon/\eta < k$. Zbadajmy teraz wymagania niezbędne do uzyskania również $m > 0$. W celu uproszczenia zapisu tej części rozważań wprowadzimy oznaczenia pomocnicze

$$\vartheta = \frac{1}{2}\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right) \quad \text{oraz} \quad \tau = \frac{s}{k}\left(k-\frac{\varepsilon}{\eta}\right).$$

Ze względu na n musi być $\tau > 0$.

Rozwiązanie m_1 da wartość dodatnią w przypadku, gdy będzie

$$+\sqrt{\vartheta^2+\tau^2} < \vartheta - \tau,$$

co jest możliwe tylko dla $\vartheta > \tau$.
Prócz tego musi być jeszcze

$$\vartheta^2 + \tau^2 < \vartheta^2 - 2\vartheta\tau + \tau^2,$$

co sprowadza się do $\vartheta\tau < 0$.

Wiemy już, że $\tau > 0$, czyli powinno $\vartheta < 0$. Otrzymaliśmy zatem sprzeczność z założeniem $\vartheta > \tau$, co dowodzi, iż nigdy nie będzie $m_1 > 0$ przy $n > 0$.

Drugie z przytoczonych rozwiązań będzie dodatnie, o ile

$$+\sqrt{\vartheta^2+\tau^2} > \tau - \vartheta.$$

W przypadku gdy $\vartheta \geqslant \tau$, nie ma tu żadnych wymagań dodatkowych. O ile natomiast jest $\vartheta < \tau$, to równocześnie musi być jeszcze

$$\vartheta^2 + \tau^2 > \vartheta^2 - 2\vartheta\tau + \tau^2,$$

co sprowadza się do $\vartheta\tau > 0$. Ze względu na $\tau > 0$ powinno być $\vartheta > 0$. Mamy zatem $m_2 > 0$ oraz $n > 0$, gdy $\vartheta \geqslant \tau > 0$ lub $0 < \vartheta < \tau$, czyli pro-

ściej $\vartheta > 0$ oraz $\tau > 0$. Z definicji wielkości pomocniczych ϑ oraz τ wynika, że wystarczy tu spełnić warunek

$$k - 1 - \frac{\varepsilon}{\eta} > 0.$$

Z przytoczonych rozważań widzimy, że rozwiązaniami postawionego zadania są

$$\left.\begin{aligned} m &= \left[\frac{1}{2}\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right] - \left[\frac{s}{k}\left(k-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right] + \\ &+ \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right]^2 + \left[\frac{s}{k}\left(k-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right]^2}, \\ n &= \frac{\frac{\varepsilon}{\eta}}{k-\frac{\varepsilon}{\eta}}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dodatnie wartości współczynników m oraz n otrzymuje się, gdy

$$\frac{\varepsilon}{\eta} < k - 1. \tag{13}$$

Korzystając ze wzoru (7), określającego współczynnik korelacji ε, wyrażenie powyższe przedstawimy w zmienionej postaci jako

$$C_u < \frac{i_{xd} \cdot R}{\alpha_\infty} \eta (k-1). \tag{14}$$

Wymagania (13) i (14) stanowią dwie postaci warunku rozwiązalności rozpatrywanego zagadnienia.

Ze wzorów (12) łatwo obliczyć, że dla uzyskania korzystnej wartości $n = 1$, należy zastosować $\varepsilon/\eta = \frac{k}{2}$. W takim przypadku współczynnik m wyrazi się zależnością

$$m = \frac{k-2}{4} - \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{k-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}.$$

Zauważmy dodatkowo, że przy $n = 1$ będzie $m \geqslant 100$, o ile

$$k \geqslant 202 + s\frac{200}{100+s}. \tag{15}$$

3.2. Mostek zasilany niezmiennym natężeniem $I_M = \text{const}\,(X)$, układ ze wskaźnikiem prądowym

Wyrażenia określające współczynniki k oraz α_∞ zostały podane w pracy [1] jako wzór (9). Wprowadzając do nich zależności (4) i (6) oraz (7) otrzymujemy następujacy układ równań wyjściowych:

$$\left.\begin{aligned} \left(f+m+g\frac{1+n}{n}\right)\frac{f+m}{f+m+\frac{g}{n}} &= k,\\ g\frac{f+m}{f+m+\frac{g}{n}} &= \frac{\varepsilon}{\eta}. \end{aligned}\right\}$$

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń dochodzimy do wstępnych rozwiązań o postaci

$$m = k - f - \frac{\varepsilon}{\eta} \quad \text{oraz} \quad n = \frac{\frac{\varepsilon}{\eta}}{k-\frac{\varepsilon}{\eta}} \cdot \frac{g}{g-\frac{\varepsilon}{\eta}}.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku wzorów tych nie można uznać za ostateczne odpowiedzi, bowiem we współczynnikach pomocniczych f oraz g kryją się jeszcze wartości poszukiwanych parametrów. Zakładając $q = m$ otrzymujemy dla współczynnika f wyrażenie

$$f = 1 + \frac{m \cdot s}{m(1+n)+s},$$

które wstawione do pierwszej z odpowiedzi wstępnych prowadzi do równania

$$m^2(1+n) - m\left[(1+n)\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right) - 2\cdot s\right] - s\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right) = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są

$$m_{1,2} = \left[\frac{1}{2}\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right] - \left[\frac{s}{1+n}\right] \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right]^2 + \left[\frac{s}{1+n}\right]^2}.$$

Łatwo dostrzec, że tylko druga odpowiedź może dawać wartości dodatnie. Korzystając z powyższej wartości m i założenia $q = m$ wyznaczymy teraz współczynnik pomocniczy g, zdefiniowany zależnością (2) w publikacji [1]. Otrzymujemy

$$g = p + 2\frac{n}{1+n}\left\{\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right]^2 + \left(\frac{s}{1-n}\right)^2} - \frac{s}{1+n}\right\}.$$

Ten sam współczynnik daje się też obliczyć w funkcji parametru n w oparciu o drugie rozwiązanie wstępne. Dostajemy w ten sposób

$$g = \frac{\frac{\varepsilon}{\eta}\left(k-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)}{k-\frac{\varepsilon}{\eta}\cdot\frac{1+n}{n}}.$$

Połączenie tych dwu wyrażeń pozwala ustalić równanie określające jednoznacznie szukaną wartość n. Okazuje się jednak, że otrzymujemy tutaj zależność czwartego stopnia, analitycznie nierozwiązalną.

Przy projektowaniu mostka stosujemy najchętniej $n = 1$, co było już omówione we wstępie do niniejszej pracy. Założenie takie pozwala znacznie uprościć nasze rozważania. Z trzech ostatnio podanych wzorów wynika wówczas

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\left[\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right) - s + \sqrt{\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2 + s^2}\right], \\ n &= 1, \\ p &= \frac{\varepsilon}{\eta}\cdot\frac{k-\frac{\varepsilon}{\eta}}{k-2\frac{\varepsilon}{\eta}} - \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2 + s^2} - s\right]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Niedogodną postać zależności dla p daje się zastąpić wyrażeniem

$$p = \frac{1}{2}\left[k\frac{k-\frac{\varepsilon}{\eta}}{k-2\frac{\varepsilon}{\eta}} - 1\right] - m. \tag{16'}$$

Obecnie należy wyznaczyć warunki rozwiązalności postawionego zadania. Przede wszystkim zbadamy współczynnik m. Będzie on wartością dodatnią, o ile

$$+\sqrt{\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2 + s^2} > s - \left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right).$$

W przypadku gdy prawa strona jest ujemna, czyli dla $k-1-\frac{\varepsilon}{\eta} \geqslant s$, nierówność powyższa jest spełniona bez wszelkich warunków dodatkowych. Natomiast w przeciwnym przypadku musi być dodatkowo

$$\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2 + s^2 > \left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2 - 2\cdot s\left(k-1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right) + s^2.$$

Wobec faktu, że $s > 0$, sprowadza się to do wymagania, by było $k + -1-\frac{\varepsilon}{\eta} > 0$. Reasumując ten punkt rozważań stwierdzamy, że otrzymuje się $m > 0$, gdy $\frac{\varepsilon}{\eta} < k-1$.

Z kolei zbadamy, kiedy będzie $p > 0$. Warunkiem jest tutaj spełnienie nierówności

$$\frac{\varepsilon}{\eta} \cdot \frac{k - \frac{\varepsilon}{\eta}}{k - 2\frac{\varepsilon}{\eta}} > \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(k - 1 - \frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2 + s^2} - s\right].$$

Próba ścisłego rozwiązania prowadzi do nierówności czwartego stopnia. W związku z tym zastosujemy uproszczenie obostrzające. Wiemy już, iż ze względu na m powinno być $\left(k - 1 - \frac{\varepsilon}{\eta}\right) > 0$, w związku z czym jest

$$\left(k - 1 - \frac{\varepsilon}{\eta}\right) > \sqrt{\left(k - 1 - \frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2 + s^2} - s.$$

Poprzednie wymaganie można zatem obostrzyć do postaci

$$\frac{\varepsilon}{\eta} \cdot \frac{k - \frac{\varepsilon}{\eta}}{k - 2\frac{\varepsilon}{\eta}} \geqslant \frac{1}{2}\left(k - 1 - \frac{\varepsilon}{\eta}\right).$$

Zakładamy początkowo, że $\varepsilon/\eta < k/2$. W takim przypadku powinno być

$$4\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)(5 \cdot k - 2) + k(k - 1) \leqslant 0,$$

co jest spełnione w przedziale

$$\frac{5 \cdot k - 2 - \sqrt{9 \cdot k^2 - 4 \cdot k + 4}}{8} \leqslant \frac{\varepsilon}{\eta} \leqslant \frac{k}{2}.$$

Przy założeniu $\varepsilon/\eta > k/2$ dostajemy odpowiednio wymaganie

$$\frac{\varepsilon}{\eta} \geqslant \frac{5 \cdot k - 2 + \sqrt{9 \cdot k^2 - 4 \cdot k + 4}}{8}.$$

Warunek powyższy nie może być spełniony, gdyż jest on sprzeczny z wymaganiem, odpowiadającym dodatnim wartościom m.
Wyrażenie ograniczające od dołu wartości stosunku ε/η ma postać niedogodną do praktycznego stosowania. Dla $k \geqslant 5$ można posługiwać się przybliżonym wzorem $(\varepsilon/\eta)_{min} = 0{,}075 + \frac{k-1}{4}$.

Wracając teraz do wstępnego rozwiązania, które określa wartość współczynnika n, widzimy, że musi być $\varepsilon/\eta < g$.

Z całości powyższych rozważań wynika zatem żądanie

$$\frac{5 \cdot k - 2 - \sqrt{9 \cdot k^2 - 4 \cdot k + 4}}{8} \leqslant \frac{\varepsilon}{\eta} < \begin{cases} k-1 \\ k/2 \\ g \end{cases}, \qquad (17)$$

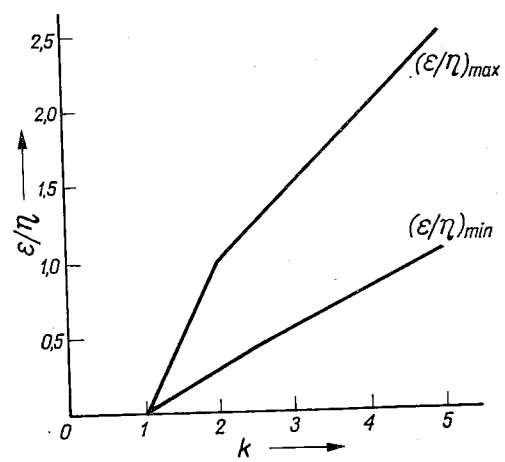
Graniczne wartości stosunku (ε/η) dla niewielkich k zostały obliczone na podstawie (17) i zestawione w tablicy 1.

Tablica 1

Graniczne wartości (ε/η) w zależności od k

k	$(\varepsilon/\eta)_{min}$	$(\varepsilon/\eta)_{max}$	k	$(\varepsilon/\eta)_{min}$	$(\varepsilon/\eta)_{max}$
1,0	0,00000	0,00000	2,0	0,29289	1,00000
1,1	0,03265	0,10000	2,2	0,34678	1,10000
1,2	0,06411	0,20000	2,4	0,40000	1,20000
1,3	0,09463	0,30000	2,6	0,45271	1,30000
1,4	0,12438	0,40000	2,8	0,50501	1,40000
1,5	0,15350	0,50000	3,0	0,55700	1,50000
1,6	0,18211	0,60000	3,5	0,68594	1,75000
1,7	0,21029	0,70000	4,0	0,81386	2,00000
1,8	0,23811	0,80000	4,5	0,94111	2,25000
1,9	0,26563	0,90000	5,0	1,06790	2,50000

Zależności te przedstawia również wykres zamieszczony niżej.



Rys. 1. Dopuszczalne wartości ε/η w zależności od k

Przy uwzględnieniu definicji (6) i (7) warunek rozwiązalności zadania przedstawimy w postaci

$$\left.\begin{aligned} &\frac{i_{xd}\cdot R}{\alpha_\infty}\eta\frac{5k-2-\sqrt{9k^2-4k+4}}{8}\leqslant C_u<\begin{cases}\dfrac{i_{xd}\cdot R}{\alpha_\infty}\eta(k-1)\\ \dfrac{i_{xd}\cdot R}{\alpha_\infty}\eta\dfrac{k}{2}\end{cases}\\ &C_i<\frac{i_{xd}}{\alpha_\infty}\eta.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Na zakończenie zauważymy jeszcze, że uzyskuje się $n=1$ oraz $m\geqslant 100$, gdy zachodzi

$$k\geqslant 101+s\frac{100}{200+s}+\frac{\varepsilon}{\eta}. \tag{19}$$

3.3. Mostek zasilany niezmiennym napięciem $U_M=\text{const}\,(X)$, układ ze wskaźnikiem napięciowym

W oparciu o wzory (10) z artykułu [1] oraz zależności (5) i (7), podane w niniejszym opracowaniu, ustalamy wyjściowy układ równań w postaci

$$\left.\begin{aligned} &f(1+n)=k,\\ &f\cdot n=\frac{\varepsilon}{\eta}.\end{aligned}\right\}$$

Wynikają stąd wartości

$$f=k-\frac{\varepsilon}{\eta}\quad\text{oraz}\quad n=\frac{\dfrac{\varepsilon}{\eta}}{k-\dfrac{\varepsilon}{\eta}}.$$

Na podstawie definicji współczynnika pomocniczego f (wzór 2 w publikacji [1]) wyznaczymy z kolei wartość q. Zauważmy przy tym, że parametr m nie jest określony żadną zależnością; możemy go zatem dobierać dowolnie. Ostatecznym rozwiązaniem postawionego zadania są wyrażenia

$$n=\frac{\dfrac{\varepsilon}{\eta}}{k-\dfrac{\varepsilon}{\eta}},\qquad q=s\frac{\left(k-\dfrac{\varepsilon}{\eta}\right)\left(k-1-\dfrac{\varepsilon}{\eta}\right)}{k-(k-s)\left(k-\dfrac{\varepsilon}{\eta}\right)}. \tag{20}$$

Zbadajmy teraz, kiedy przytoczone odpowiedzi będą fizycznie realne. W pierwszym rzędzie stwierdzamy, że $n>0$, gdy $\varepsilon/\eta<k$. Dyskutując licznik wzoru określającego q widzimy, że przybiera on wartości ujemne w przedziale $k-1\leqslant\dfrac{\varepsilon}{\eta}<k$, a staje się dodatni, gdy $\dfrac{\varepsilon}{\eta}\leqslant k-1$. Mia-

nownik tegoż wzoru jest ujemny dla $\frac{\varepsilon}{\eta} < k\left(1 - \frac{1}{k-s}\right)$, a wartości większe od zera osiąga, gdy $\frac{\varepsilon}{\eta} > k\left(1 - \frac{1}{k-s}\right)$. Z porównania tych warunków wynika, iż większą od zera wartość q można uzyskać tylko wówczas, gdy zarówno licznik, jak i mianownik będą dodatnie, co zachodzi w przedziale

$$k\left(1 - \frac{1}{k-s}\right) < \frac{\varepsilon}{\eta} \leqslant k - 1. \tag{21}$$

Widać od razu, że przy spełnieniu wymagania (21) będzie także $n > 0$.

Korzystając ze wzoru (7) uzyskujemy następującą postać warunku rozwiązalności rozpatrywanego zadania:

$$\frac{i_{xd} \cdot R}{\alpha_\infty} \eta \cdot k\left(1 - \frac{1}{k-s}\right) < C_u \leqslant \frac{i_{xd} \cdot R}{\alpha_\infty} \eta (k-1). \tag{22}$$

Zauważmy jeszcze, że $n = 1$ otrzymuje się dla $\varepsilon/\eta = k/2$. W takim przypadku jest

$$q = \frac{s}{2} \cdot \frac{k-2}{s-(k-2)},$$

co daje wartość dodatnią, o ile $s > k - 2$.

3.4. Mostek zasilany niezmiennym napięciem $U_M = \text{const}\,(X)$, układ ze wskaźnikiem prądowym

Wartości współczynników charakterystyki pomiarowej obowiązujące dla obecnie rozpatrywanego przypadku są określone wyrażeniami (11) w pracy [1]. Wprowadzamy tam zależności (5), (6), (7) i otrzymujemy w ten sposób poniższy układ równań wyjściowych

$$\left.\begin{aligned} \left(f + m + g\frac{1+n}{n}\right)\frac{f(1+n)}{f + m + f \cdot n + g\frac{1+n}{n}} &= k, \\ g\frac{f(1+n)}{f + m + f \cdot n + g\frac{1+n}{n}} &= \frac{\varepsilon}{\eta}. \end{aligned}\right\}$$

Wstępnymi rozwiązaniami są tutaj wyrażenia

$$m = \left(k - f - \frac{\varepsilon}{\eta}\right)\frac{g \cdot k - f\frac{\varepsilon}{\eta}}{(k-f)\frac{\varepsilon}{\eta}}$$

oraz

$$n = \frac{g}{g - \frac{\varepsilon}{\eta}} \cdot \frac{k - f}{f}.$$

Przy założeniu $q = m$ do wzorów tych należy podstawić wartości

$$f = 1 + \frac{m \cdot s}{m(1+n)+s} \quad \text{oraz} \quad g = p + \frac{m^2 \cdot n}{m(1+n)+s}$$

i następnie rozwiązać nowy układ równań. Okazuje się jednak, że w przypadku ogólnym jest to niewykonalne ze względu na zbyt wysoki stopień otrzymanego równania. Wobec tego, podobnie jak poprzednio w rozdz. 3.2, założymy z góry wartość $n = 1$. Ze wzoru na współczynnik pomocniczy f znajdujemy wówczas

$$m = \frac{s(f-1)}{s - 2(f-1)},$$

co pozwala obliczyć

$$g = p + \frac{(f-1)^2}{s - 2(f-1)}.$$

Na podstawie drugiej części rozwiązania wstępnego, przy założeniu $n = 1$, znajdujemy również

$$g = \frac{f\frac{\varepsilon}{\eta}}{2f - k}.$$

Z połączenia obu tych wzorów wynika następujące równanie dla niewiadomej $(f-1)$:

$$2(f-1)^3 - (f-1)^2\left[(k-2) + 2\left(p - \frac{\varepsilon}{\eta}\right) + 2 \cdot p\right] +$$

$$+ 2(f-1)\left[p(k-2) + s\left(p - \frac{\varepsilon}{\eta}\right) + \frac{\varepsilon}{\eta}\left(1 + \frac{s}{2}\right)\right] - s\left[p(k-2) + \frac{\varepsilon}{\eta}\right] = 0.$$

Rozwiązanie tej zależności pozwala następnie określić szukaną wartość współczynnika m oraz p. Skomplikowana budowa współczynników równania nie pozwala jednak na podanie rozwiązania ogólnego, a tym samym uniemożliwia dalszą dyskusję.

Poszukując stosownego uproszczenia stwierdzamy, że dla $n = 1$ oraz $m \gg s$ można przyjąć w przybliżeniu $f \approx 1 + \frac{s}{2}$. Daje to nam zachętę do wyrażenia poszukiwanych wielkości w zależności od przyjętego f, traktowanego jako wartość znana. W ten sposób dochodzimy do następujących zależności:

$$\left.\begin{aligned} m &= \left(k - f - \frac{\varepsilon}{\eta}\right)\frac{2 \cdot f}{2 \cdot f - k}, \\ n &= 1, \\ p &= \left(2\frac{\varepsilon}{\eta} + f - k\right)\frac{f}{2 \cdot f - k} + \frac{1}{2}(f-1), \\ s &= 2\frac{uu(f-1)}{m-(f-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Wyznaczmy teraz warunki rozwiązalności postawionego zadania. Parametr m będzie dodatni, gdy $\varepsilon/\eta < k - f$ przy $f > \frac{k}{2}$ lub gdy $\varepsilon/\eta > k - f$ przy $f < \frac{k}{2}$. Współczynnik p jest natomiast większy od niewielkiej wartości $\frac{f-1}{2}$, o ile $\varepsilon/\eta > \frac{k-f}{2}$ przy $f > \frac{k}{2}$ lub też gdy $\varepsilon/\eta < \frac{k-f}{2}$ przy $f < \frac{k}{2}$. Łącząc te rozmaite wymagania widzimy, że dla $f > \frac{k}{2}$ ma być

$$\frac{1}{2}(k-f) < \frac{\varepsilon}{\eta} < (k-f),$$

natomiast przy $f < \frac{k}{2}$ powinno zachodzić

$$k - f < \frac{\varepsilon}{\eta} < \frac{1}{2}(k-f).$$

Pierwszy z tych warunków może być spełniony, o ile będzie $f < k$, natomiast drugi byłby możliwy do zachowania, gdyby k było ujemne. Musimy również pamiętać, że $n = 1$ da się zrealizować tylko wówczas, gdy będzie $\varepsilon/\eta < g$. Z całości przytoczonych rozważań wynika zatem żądanie

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}(k-f) < \frac{\varepsilon}{\eta} < \begin{cases} (k-f) \\ g \end{cases} \\ &\text{przy } \frac{1}{2}k < f < k. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Biorąc teraz pod uwagę definicje oznaczeń (6) i (7), warunek rozwiązalności zadania przedstawimy w postaci

$$\left.\begin{aligned} &\frac{i_{xd} \cdot R}{\alpha_\infty}\eta\frac{k-f}{2} < C_u < \frac{i_{xd} \cdot R}{\alpha_\infty}\eta(k-f), \\ &C_i < \frac{i_{xd}}{\alpha_\infty}\eta, \\ &\text{przy } \frac{1}{2}k < f < k. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Warto jeszcze zauważyć, że otrzymuje się $n = 1$ oraz $m \geqslant 100$ w przypadku, gdy

$$k \geqslant 2 \cdot f - \frac{f\left(f - \frac{\varepsilon}{\eta}\right)}{50 + f}. \tag{26}$$

4. ZMIENNOŚĆ OBCIĄŻENIA OPORNIKA BADANEGO

Obciążenie opornika badanego jest zależne od jego aktualnej wartości, a więc tym samym — od mierzonego rozstrojenia. Zjawisko to występuje oczywiście zarówno w mostkach zasilanych niezmiennym natężeniem, jak i w odmianie pracującej w warunkach sztywnego napięcia. Prąd obiektu pomiarowego i_x jest przy tym większy, im mniejsze jest rozstrojenie X. Pomijając dla uproszczenia niewielki prąd galwanometru (występujący zresztą tylko dla wskaźnika typu prądowego), możemy wyznaczyć względną zmianę natężenia prądu w oporniku R_x. Dla mostka zasilanego niezmiennym natężeniem otrzymujemy zależność

$$\delta_{ix} = \frac{i_x - i_{xo}}{i_{xo}} = -\frac{X}{X + (f + m)(1 + n)} \tag{27}$$

oraz analogicznie, dla warunków sztywnego napięcia, wzór

$$\delta_{ix} = \frac{i_x - i_{xo}}{i_{xo}} = -\frac{X}{X + f(1 + n)}. \tag{28}$$

W wyrażeniach powyższych i_{xo} oznacza wartość prądu w obiekcie badanym przy stanie równowagi układu pomiarowego.

Ze związków (27) i (28) widać wyraźnie niebezpieczeństwo powstawania przeciążeń oporu badanego w przypadku, gdy zakres pomiaru obejmuje również ujemne wartości rozstrojenia. Zabezpieczenie przed tym stanowić będzie właściwie dobrana wartość współczynnika wykorzystania obciążalności η. Powinna ona spełniać nierówność

$$\eta \leqslant \frac{1}{1 + \delta_{ix}}. \tag{29}$$

Ostrożność taka jest natomiast całkowicie zbędna dla zakresów pomiaru obejmujących wyłącznie rozstrojenia dodatnie.

5. PRZYKŁADY DOBORU ELEMENTÓW MOSTKA

W celu zilustrowania przebiegu obliczeń przeprowadzimy dobór elementów układu we wszystkich czterech przypadkach przedstawionych poprzednio w rozdz. 3. Rozpatrzymy jako przykład mostek do pomiaru temperatury w zakresie od 0°C do + 200°C, współpracujący z termo-

metrem oporowym wykonanym z normalnej platyny. Rozumiemy przez to, że względna zmiana oporności w zależności od temperatury ma taką samą wartość, jaka wynika z tablic normy na termometry oporowe o oporności 100 omów w 0°C (norma PN-59/M-53852). Ze względu na specyficzne warunki pomiaru, oporność termometru została ograniczona do 0,1 oma, a dopuszczalne obciążenie wynosi $i_{xd} = 1$ A. W związku z tym zakres rozstrojeń mierzonych wynosi $0 \leqslant X \leqslant 0{,}7586$ przy oporności podstawowej (odniesienia) $R = 0{,}1$ oma.

Przewiduje się zastosowanie miernika o liczbie działek $a_M = 100$ i klasie dokładności $\varkappa = 2 \cdot 10^{-3}$. Dopuszczalny zredukowany uchyb od nieliniowości będzie $\delta \approx 5 \cdot 10^{-4}$. Postępując według metodyki podanej w publikacji [2], wyznaczymy stąd potrzebne wartości współczynników charakterystyki pomiarowej, a mianowicie $k = 260$ oraz $a_\infty = 34357$ dz. Z danych tych widać jasno, że rozpatrywany układ nie jest liniowy.

Warunki rozwiązalności pozwalają wyznaczyć graniczne wartości danych miernika. W ten sposób otrzymujemy przy założeniu $\eta = 1$ $C_u < 3{,}78 \cdot 10^{-4}$ V/dz oraz $C_i < 2{,}91 \cdot 10^{-5}$ A/dz. Dążąc do ograniczenia obciążenia cieplnego opornika badanego wybieramy $C_u = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ V/dz, jednakowo dla wszelkich odmian układu. Widzimy, że w przypadku wskaźnika typu prądowego nie można będzie użyć przyrządów o oporności wewnętrznej mniejszej niż 5 omów. Z przyjętych danych obliczymy wartość współczynnika korelacji $\varepsilon = 51{,}534$.

5.1. Mostek zasilany niezmiennym natężeniem $I_M = \text{const}\,(X)$, układ ze wskaźnikiem napięciowym

Dla rozpatrywanego układu zakładamy $s = 0{,}5$. Dążąc do otrzymania wartości $n = 1$ wybieramy $(\varepsilon/\eta) = 130$. Na podstawie wzoru (12) znajdujemy $m = q = 128{,}50$. Z kolei obliczamy współczynnik pomocniczy f według definicji (2) z artykułu [1] i otrzymujemy $f = 1{,}24951$. Z założonych wartości ε oraz (ε/η) wynika $\eta = 0{,}396415$. Prąd zasilania układu zgodnie z zależnością (4) wyniesie $I_M = 400{,}28$ mA. Można także obliczyć napięcie na zaciskach źródłowych mostka, które w stanie równowagi ma wartość 99,064 mV.

5.2. Mostek zasilany niezmiennym natężeniem $I_M = \text{const}\,(X)$, układ ze wskaźnikiem prądowym

Podobnie jak w poprzedniej odmianie przyjmujemy $s = 0{,}5$ oraz $n = 1$. W celu uzyskania niezbyt małej oporności wewnętrznej miernika decydujemy się zastosować $(\varepsilon/\eta) = 99$. Ze wzorów (16) i (16′) obliczamy odpowiednio $m = q = 159{,}75$ oraz $p = 177{,}33$. Obecnie wyznaczamy współczynnik pomocniczy $f = 1{,}24961$ oraz zastosowaną wartość $\eta =$

= 0,520444. Układ pomiarowy będzie zasilany natężeniem I_M = 524,62 mA. Napięcie na zaciskach źródłowych mostka wyniesie w stanie równowagi 130,07 mV.

5.3. Mostek zasilany niezmiennym napięciem U_M = const (X), układ ze wskaźnikiem napięciowym

Obecnie rozpatrywany układ, jak to już było wyjaśnione w końcowych uwagach do pktu 3.3 niniejszego opracowania, wymaga stosowania bardzo znacznych wartości s. Dążąc do współczynnika $n = 1$ wybieramy $(\varepsilon/\eta) = 130$. Wzory (20) dają przy $s = 272$ $q = 2506{,}28$. Dla ujednolicenia wartości oporów wybieramy $m = q$. Wynika stąd, że $f = 130{,}000$. Współczynnik wykorzystania obciążalności obiektu badanego ma taką samą wartość jak w przykładzie 5.1. Na podstawie zależności (5) określamy napięcie zasilające układ U_M = 10,307 V. Prąd pobierany ze źródła przez mostek znajdujący się w stanie równowagi wynosi 416,98 mA.

5.4. Mostek zasilany niezmiennym napięciem U_M = const (X), układ ze wskaźnikiem prądowym

Z wymagania (24) wynika konieczność zastosowania w tym układzie bardzo znacznej wartości współczynnika pomocniczego f; przyjmujemy $f = 150$. Prócz tego wybieramy $(\varepsilon/\eta) = 70$. Wzory (23) pozwalają obliczyć $m = q = 300{,}000$, $n = 1$, $p = 187$ oraz $s = 592{,}05$. Z przyjętych założeń otrzymujemy $\eta = 0{,}73620$. Napięcie zasilające układ powinno wynosić U_M = 22,086 V. W stanie równowagi mostek pobiera ze źródła prąd o wartości 1,1043 A.

6. ZAKOŃCZENIE

Przystępując do rozwiązywania konkretnego zadania należy przede wszystkim sprawdzić, czy mamy do czynienia z mostkiem o charakterystyce praktycznie liniowej. Jako kryterium służy tutaj nierówność (1). W przypadku negatywnym wyznacza się potrzebne wartości współczynników k oraz α_∞ według metodyki podanej w publikacji [2]. Następnie trzeba wybrać jeden z czterech możliwych typów układu. Wypada tutaj zalecić mostek zasilany niezmiennym natężeniem i wyposażony w galwanometr typu napięciowego. Rozwiązanie takie daje najkorzystniejsze warunki zasilania mostka.

W dalszym ciągu, korzystając z odpowiednich warunków rozwiązalności, określa się dopuszczalną wartość stałej napięciowej miernika C_u i ewentualnie stałej prądowej C_i. Zakłada się przy tym zwykle $\eta = 1$.

Po wybraniu konkretnego wskaźnika oblicza się współczynnik korelacji ε. W trakcie wyznaczania poszukiwanych parametrów ustala się odpowiednio stosunek (ε/η). W ten sposób zostaje pośrednio określony stopień wykorzystania obciążalności η. Na zakończenie właściwych obliczeń znajduje się wartość natężenia lub napięcia zasilającego układ pomiarowy.

Odrębne zagadnienie stanowi jeszcze obliczenie zespołu regulacyjno-stabilizacyjnego, który będzie włączony pomiędzy źródło zasilania a mostek. Rozwiązanie tego problemu było już przedstawione w pracy [3].

Ze względu na technologię produkcji i sprawdzania pożądane są okrągłe wartości oporności. Zazwyczaj już oporność podstawowa jest liczbą okrągłą, co skłania do poszukiwania takichże wartości współczynników m, n, q. Osiąga się to przez celowy dobór k, p, s oraz (ε/η) przy wykonywaniu odnośnych obliczeń.

Warto jeszcze nadmienić, że wyniki obliczenia przytoczonych przykładów 5.3. i 5.4. potwierdzają tezę o niecelowości stosowania mostka zasilanego niezmiennym napięciem. Była ona już poprzednio uzasadniona innymi względami w rozdz. 7 pracy [1].

Przedstawione tutaj rozważania, połączone z wynikami opublikowanymi w artykułach [1], [2] i [3], pozwalają całkowicie zaprojektować odchyłowy mostek Thomsona o zadanych właściwościach pomiarowych.

Politechnika Gdańska
Katedra Miernictwa Elektrycznego

WYKAZ LITERATURY

1. Sawicki J.: Właściwości odchyłowego mostka Thomsona. — Rozpr. Elektrotechn., t. XI, 1965, z. 1.
2. Sawicki J.: Liniowe przybliżenie charakterystyki mostka odchyłowego. — Arch. Elektrotechn., t. XII, 1963, z. 2.
3. Sawicki J.: Właściwości niezrównoważonego mostka Wheatstone'a. — Arch. Elektrotechn., t. X, 1961, z. 1.
4. Trzetrzewiński S.: Dokładność pomiarów elektrycznych. — Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektryka Nr 3, 1958.

J. SAWICKI

EMPFINDLICHKEIT UND ELEMENTENANPASSUNG DER UNABGEGLICHENEN THOMSON-BRÜCKE

Zusammenfassung

Diese Auffassung ist solch einer Wahl der Elemente der unabgeglichenen Thomson — Brücke gewidmet, die die vorausgesetzte Messcharakteristik verwirklicht. Durch die Brückenelemente verstehen wir die einzelnen Widerstandswerte.

Speisestrom oder Speisespannung, wie auch die technischen Daten des gebrauchten Messinstrumentes.

Die Messcharakteristik der unabgeglichenen Brücke, d.h. Galvanometerablenkung als Funktion der Brückenverstimmung, ist in der Abhandlung [1] abgeleitet. Die Gestalt dieser Funktion ist praktisch linear, wen die Bedingung (1) erfüllt ist. Wenn das nicht zutrifft, berechnet man in erster X Reihe die nöteigen Werte der Koeffiziente k und α_∞ nach der Methodik, die in dem Artikel [2] erläutert war. Die Elementenwahl für eine lineare Brücke ist im Absatz 2 behandelt, und für den zweiten Fall im Absatz 3. In jedem dieser Absätze sind alle vier möglichen Brückenabarten, die in der Publikation [1] aufgestellt wurden, behandelt.

In den Erwägungen war die zulässige Strombelastung des Prüflings i_{xd}, die im ganzen Messbereich nicht überschritten werden darf, in Acht genommen. In dem vierten Teil sind die Änderungen des Prüflingsstromes, die durch die Änderung des Prüflingswiderstandes hervorgerufen sind, betrachtet.

Der Berechnungsgang ist an Hand der Beispiele, die im Absatz 5 aufgeführt sind, zur Schau gegeben.

Е. САВИЦКИ

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ И ПОДБОР ЭЛЕМЕНТОВ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО МОСТА ТОМСОНА

Резюме

В статье, для случая моста Томсона с многими датчиками, выводится неуравновешенного моста Томсона, который позволяет получить предусмотренный вид измерительной характеристики. Под элементами моста понимаются величины отдельных сопротивлений, напряжение ими силы тока питающего систему и технические данные указателя.

Измерительная характеристика моста выводится в работе [1]. Она практически линейна, когда исполнено условие (1). В противном случае, следует сперва вычислить требуемые значения коэффициентов k и α_∞ по методу приведенном в статье [2]. Подбор элементов для первого из этих случаев оговаривается во второй части, а для моста с нелинейной характеристикой в третьей части. В каждом из этих случаев рассматриваются особно каждая из четырех основных модификаций системы, определённых в [1].

В рассуждениях принимается во внимание допустимая нагрузка током исследуемого объекта i_{xd} которое не может быть превышенным во всем диапазоне измерения.

В четвертой части рассматриваются изменения тока в объекте измерения, вызываемые изменением его сопротивления. Ход расчетов иллюстрируется примерами приведенными в пятой части.

621.317.39:621.317.733

JERZY SAWICKI

Charakterystyka pomiarowa wieloczujnikowego mostka Thomsona

Rękopis dostarczono 16.12.1963

Artykuł zawiera wyprowadzenie charakterystyki pomiarowej, czyli zależności pomiędzy odchyleniem wskaźnika a zmianą oporności mierzonej dla wieloczujnikowego mostka Thomsona. W wieloczujnikowym mostku tego typu zmiany oporności zachodzą w opornikach R_x oraz R_c. Jednoznaczność charakterystyki wymaga, by zmiany te były ze sobą powiązane w określony sposób.

Rozważania przeprowadzono dla mostka zasilanego niezmiennym natężeniem. Rozpatrzono przy tym zarówno układ ze wskaźnikiem typu napięciowego, jak i z miernikiem prądowym.

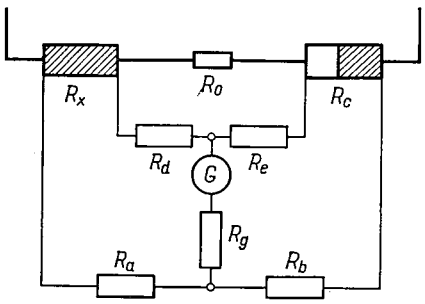
Wieloczujnikowy mostek Thomsona może być przydatny w pomiarach wielkości nieelektrycznych za pośrednictwem przetworników oporowych. Przy takiej samej względnej zmianie oporności mierzonej uzyskuje się tutaj większe odchylenie przyrządu niż w przypadku mostka odchyłowego o jednym czujniku. Układ pozwala również wyeliminować wpływ wielkości postronnych na wynik pomiaru.

1. WSTĘP

Mostek będziemy nazywać „wieloczujnikowym" w tych przypadkach, gdy więcej niż jedna jego oporność nie jest znana. Wskazania miernika pozwalają jednoznacznie określić zmiany tych oporności pod warunkiem, że znana jest zależność wiążąca ich wartości pomiędzy sobą. Takie nieznane oporności będziemy nazywać krótko „czujnikami". Mostki wieloczujnikowe znajdą zastosowanie głównie w pomiarach wielkości nieelektrycznych za pośrednictwem przetworników oporowych. Przy takiej samej względnej zmianie oporności mierzonej uzyskuje się tu większe odchylenie przyrządu niż w przypadku zwykłego mostka odchyłowego. Prócz tego układ taki pozwala wyeliminować wpływ wielkości postronnych na wynik pomiaru.

„Czujnikiem głównym" nazwiemy ten z czujników, który wykazuje największe względne zmiany oporności. W układzie pomiarowym przeznaczymy mu to miejsce schematu, które jest oznaczone symbolem R_x. Opory R_a, R_b, R_d, R_e nie mogą być wykonane jako czujniki w rodzaju R_x, gdyż wymaga się od nich znacznie większych oporności. Widzimy

zatem, że ze względu na właściwości układu możemy mieć tutaj najwyżej dwa czujniki. Tym drugim będzie oczywiście R_c. Rozmieszczenie tych elementów w schemacie pomiarowym jest widoczne z rys. 1. Celem lepszego unaocznienia czujnik główny został całkowicie zakreskowany, zaś czujnik pomocniczy (to znaczy R_c) — częściowo.



Rys. 1. Mostek Thomsona

Praca niniejsza ma za zadanie ustalenie charakterystyki pomiarowej wieloczujnikowego mostka Thomsona. Pod nazwą „charakterystyka pomiarowa" rozumiemy zależność wiążącą odchylenie miernika z wartościami oporności mierzonych. W rozważaniach naszych przyjmujemy, że mostek jest zasilany niezmiennym natężeniem $I_M = \text{const}$. Z prac [1] i [2] wiadomo, że układ pracujący przy sztywnym napięciu zasilającym U_M jest trudny do realizacji i bardzo niekorzystny. Rozpatrzymy dwie odmiany układu: ze wskaźnikiem typu napięciowego (np. samoczynny kompensator) oraz z miernikiem prądowym (np. miliwoltomierz magnetoelektryczny).

Podobnie jak dla odchyłowego mostka Thomsona o jednym czujniku, poszczególne wartości oporności wyrazimy jako krotności oporności podstawowej (odniesienia) R, a mianowicie:

$$\left.\begin{array}{lll} R_x = (1+X)R; & R_a = m \cdot R; & R_b = m \cdot n \cdot R; \\ R_c = n(1 \pm c \cdot X)R; & R_d = q \cdot R; & R_e = n \cdot q \cdot R; \\ R_g = p \cdot R; & R_0 = s \cdot R. & \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Z definicji tych widać od razu, że dla $R_x = R$ układ jest w stanie równowagi. Wyjaśnia to również fizyczne znaczenie pojęcia „oporność podstawowa". Właściwą wielkość mierzoną stanowi rozstrojenie X, będące względną zmianą wartości czujnika głównego. Współczynnik c, który wiąże rozstrojenie czujnika pomocniczego z rozstrojeniem czujnika głównego, będziemy nazywać „przeniesieniem". Z określenia czujnika głównego wynika, iż wartość c musi się mieścić w przedziale

$$-1 \leqslant c \leqslant +1. \qquad (1')$$

Oprócz wielkości m, n, p, q, s, których definicję stanowią zależności (1), wprowadzimy współczynniki pomocnicze f, g, h, pozwalające znacznie uprościć zapis dalszych rozważań:

$$\left.\begin{aligned} f &= 1 + \frac{q \cdot s}{q(1+n)+s}; \\ g &= p + \frac{n \cdot q^2}{q(1+n)+s}; \\ h &= \frac{g}{n(f+m)+g}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

W dalszej części rozważań będzie dogodnie posługiwać się wartościami zredukowanego rozstrojenia i odchylenia. Pod nazwami tymi będziemy rozumieli

$$Y = X/k \quad \text{oraz} \quad \beta = \alpha/\alpha_\infty, \qquad (3)$$

gdzie k oraz α_∞ oznaczają parametry charakterystyki pomiarowej jednoczujnikowego mostka Thomsona, wyprowadzone w pracy [1].

W wywodach naszych zakładamy, że odchylenie wskaźnika jest proporcjonalne do wartości napięcia bądź natężenia, co zapisujemy jako

$$e_g = C_u \cdot \alpha \qquad (4)$$

dla miernika typu napięciowego, zaś

$$i_g = C_i \cdot \alpha \qquad (5)$$

w przypadku przyrządu typu prądowego.

Ekstremalnie możliwy zakres pomiaru jest ograniczony warunkiem, iż żadna z oporności czujników nie może przybrać wartości ujemnych. Wynika stąd, że minimalne możliwe rozstrojenie wynosi $X_m = -1$, co odpowiada zwarciu czujnika głównego. Maksymalne rozstrojenie X_r jest zależne od wartości przeniesienia c. Przy $c > 0$ fizycznie możliwe są dowolnie wielkie wartości X. W przypadku gdy $c < 0$, występuje ograniczenie, a mianowicie maksymalna wartość rozstrojenia X_r odpowiada warunkowi $R_c = 0$. W związku z tym napiszemy:

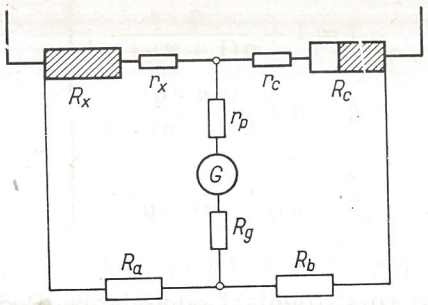
$$X_m = -1, \quad X_r = \frac{1}{-d}, \qquad (6)$$

gdzie $-d = \text{Max}\,(0; -c)$.

W celu uproszczenia dalszych rozważań rozpatrywany mostek Thomsona zastąpimy elektrycznie równoważnym układem Wheatstone'a. Osiągniemy to na drodze zamiany trójkąta oporności R_d, R_e, R_o na równoważną gwiazdę, złożoną z oporności r_x, r_c, r_p, jak to przedstawiono na

rys. 2. Zgodnie z definicjami (1) oraz (2) wartości oporności zastępczych wyrazimy jako

$$r_x = (f-1)R, \quad r_c = n(f-1)R, \quad r_p = (g-p)R. \tag{7}$$

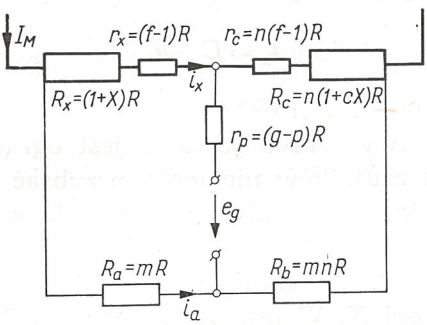


Rys. 2. Zastępczy mostek Wheatstone'a

2. UKŁAD ZE WSKAŹNIKIEM NAPIĘCIOWYM

Schemat zastępczego mostka Wheatstone'a dla rozpatrywanego przypadku jest przedstawiony na rys. 3. Stosownie do zaznaczonych tam wartości prądów i oporności możemy ustawić poniższy układ równań:

$$\left.\begin{aligned} &i_x + i_a = I_M; \\ &i_x(R_x + r_x + r_c + R_c) = i_a(R_a + R_b); \\ &i_x(R_x + r_x) - i_a \cdot R_a - e_g = 0. \end{aligned}\right\}$$



Rys. 3. Układ ze wskaźnikiem napięciowym

Po wprowadzeniu oznaczeń (1) i (7) układ ten przybiera postać

$$\left.\begin{aligned} &i_x \cdot 1 + i_a \cdot 1 + e_g \cdot 0 = I_M; \\ &i_x[X(1+c\cdot n)+f(1+n)] - i_a \cdot m \cdot (1+n) + e_g \cdot 0 = 0; \\ &i_x(X+f)R - i_a \cdot m \cdot R - e_g \cdot 1 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Wyznaczamy stąd wartość napięcia na zaciskach miernika e_g i przy wykorzystaniu związku (4) otrzymujemy zależność

$$e_g = \frac{I_M \cdot R(1-c)m \cdot n \cdot X}{X(1+c\cdot n)+(f+m)(1+n)} = C_u \cdot \alpha.$$

Widzimy, że w przypadku gdy $c = +1$, miernik nie wykazuje odchylenia bez względu na wartość rozstrojenia X. Określiliśmy zatem warunek całkowitej kompensacji:

$$c = +1. \tag{8}$$

Przekształcając dalej poprzednie wyrażenie dochodzimy do wzoru na poszukiwane rozstrojenie X:

$$X = \frac{(f+m)(1+n)\alpha}{\frac{I_M \cdot R}{C_u}(1-c)m \cdot n - \alpha(1+c \cdot n)}. \tag{9}$$

Dla mostka jednoczujnikowego o takim samym układzie wyprowadziliśmy w artykule [1] następującą charakterystykę pomiarową:

$$X = \frac{k \cdot \alpha}{\alpha_\infty - \alpha}, \tag{10}$$

gdzie $k = (f+m)(1+n)$; $\alpha_\infty = \frac{I_M \cdot R}{C_u} m \cdot n$. Uwzględniając podobieństwo wzorów (9) i (10) napiszemy więc

$$X = \frac{k \cdot \alpha}{(1-c)\alpha_\infty - (1+c \cdot n)\alpha}, \tag{11}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń (3) wzór powyższy przybiera postać

$$Y = \frac{\beta}{(1-c) - (1+c \cdot n)\beta}. \tag{12}$$

Odchylenie zredukowane β można określić w zależności od rozstrojenia zredukowanego Y jako

$$\beta = \frac{(1-c)Y}{1+(1+c \cdot n)Y}. \tag{13}$$

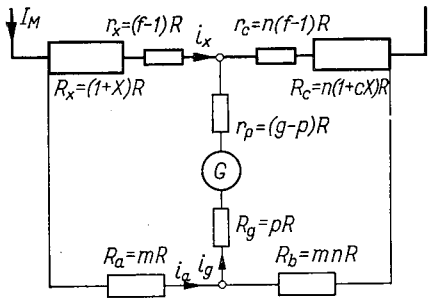
Z poprzednich wzorów wynika jasno możliwość uzyskania idealnie proporcjonalnej charakterystyki pomiarowej. Otrzymujemy ją przy spełnieniu następującego warunku liniowości:

$$1 + c \cdot n = 0. \tag{14}$$

Z definicji (3) oraz z zależności (6) widać, że rozstrojenie zredukowane Y musi się zawierać pomiędzy minimalną wartością $Y_m = -\frac{1}{k}$ a maksymalną $Y_r = \frac{1}{-c \cdot k}$, gdyż będziemy stosować ujemne wartości przeniesienia c, zapewniające zwiększenie czułości mostka. Wynika stąd

istnienie następujących granicznych wartości odchylenia zredukowanego β, obliczonych według wzoru (13):

$$\beta_m = -\frac{(1-c)}{k-(1+c\cdot n)} \quad \text{oraz} \quad \beta_r = \frac{(1-c)}{k+(1+c\cdot n)}.$$



Rys. 4. Układ ze wskaźnikiem prądowym

3. UKŁAD ZE WSKAŹNIKIEM PRĄDOWYM

W oparciu o schemat przedstawiony na rys. 4 ustalamy następujący układ równań wyjściowych:

$$\left.\begin{aligned} &i_x + i_a = I_M;\\ &i_x(R_x + r_x) + (i_x - i_g)(R_c + r_c) = i_a \cdot R_a + (i_a - i_g)R_b;\\ &i_x(R_x + r_x) - i_a \cdot R_a - i_g(R_g + r_p) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Wprowadzając teraz oznaczenia (1) i (2) przepiszemy ten zespół równań w nowej postaci, a mianowicie:

$$\left.\begin{aligned} &i_x \cdot 1 + i_a \cdot 1 + i_g \cdot 0 = I_M;\\ &i_x \cdot X(1+c\cdot n) + f(1+n) - i_a \cdot m(1+n) + i_g \cdot n(c\cdot X + f + m) = 0;\\ &i_x(X+f) - i_a \cdot m - i_g \cdot g = 0. \end{aligned}\right\}$$

Powyższy układ równań rozwiązujemy względem prądu wskaźnika i_g

$$i_g = \frac{I_M(1-c)mnX}{(f+m)[n(f+m)+g(1+n)] + X\{(1+c)[n(f+m)+g] - c(1-n)g\} + cnX^2}.$$

Ze wzoru tego widoczny jest warunek całkowitej kompensacji, taki sam jak w poprzednio rozpatrzonym przypadku: $c = +1$.

Dla jednoczujnikowego mostka o takim samym układzie wyprowadziliśmy w publikacji [1] następujące wartości współczynników charakterystyki pomiarowej:

$$k = (f+m)\frac{f+m+g\dfrac{1+n}{n}}{f+m+\dfrac{g}{n}}, \qquad \alpha_\infty = \frac{I_M}{C_i}\cdot\frac{m}{f+m+\dfrac{g}{n}}. \tag{15}$$

Na podstawie poprzedniego wyrażenia na prąd miernika oraz zależności (5) i (15) obliczymy odchylenie zredukowane β w zależności od rozstrojenia X. Otrzymujemy

$$\beta = \frac{(1-c)n\left[f+m+\frac{g}{n}\right]X}{(f+m)[n(f+m)+g(1+n)]+X[(1+c)[n(f+m)+g]-c(1-n)g]+cnX^2}$$

Obecnie wprowadzimy rozstrojenie zredukowane Y zamiast X. W związku z tym licznik powyższego wzoru przybierze postać

$$L = (1-c)(f+m)[n(f+m)+g(1+n)]Y.$$

Wyrażenie występujące w mianowniku przedstawi się jak następuje:

$$M = (f+m)[n(f+m)+g(1+n)]\left\{1+\right.$$

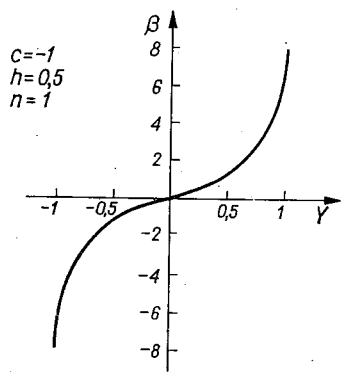
$$+\frac{(1+c)[n(f+m)+g]-c(1-n)g}{n(f+m)+g}Y+$$

$$\left.+c\cdot n(f+m)\frac{n(f+m)+g(1+n)}{[n(f+m)+g]^2}Y^2\right\}=$$

$$=(f+m)[n(f+m)+g(1+n)]\left\{1+\right.$$

$$+\left[(1+c)-c(1-n)\frac{g}{n(f+m)+g}\right]Y+$$

$$+c\left[1-\frac{g}{n(f+m)+g}\right]\left[1+n\frac{g}{n(f+m)+g}\right]Y^2.$$



Rys. 5. $\beta = f(Y)$

Do wyrażenia stojącego w mianowniku, czyli do M, podstawiamy współczynnik pomocniczy h, określony wzorem (2). Dzieląc następnie L przez

M otrzymujemy wzór na odchylenie zredukowane β w funkcji rozstrojenia zredukowanego Y w postaci

$$\beta = \frac{(1-c)Y}{1+[(1+c)-c\cdot h(1-n)]Y+c(1-h)(1+h\cdot n)Y^2}. \tag{16}$$

Zauważmy ubocznie, iż z definicji (2) współczynnika h wynika możliwość określenia g, co z kolei pozwala zmienić postać zapisu parametrów charakterystyki pomiarowej. W ten sposób dochodzimy do wyrażeń

$$\left.\begin{aligned} g &= n(f+m)\frac{h}{1-h}, \\ k &= (1+h\cdot n)(f+m) \\ \alpha_\infty &= \frac{I_M}{C_i}(1-h)\frac{m}{f+m}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

a stąd

oraz

Wracając do podstawowej zależności (16) stwierdzamy, że na ogół charakterystyka pomiarowa wieloczujnikowego mostka Thomsona ze wskaźnikiem typu prądowego wykazuje przebieg krzywoliniowy. Stanie się ona zależnością proporcjonalną w przypadku jednoczesnego spełnienia zależności

$$\left.\begin{aligned} (1+c)-c\cdot h(1-n) &= 0; \\ c(1-h)(1+h\cdot n) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Badana funkcja przyjmie kształt hiperboli, o ile będzie

$$c(1-h)(1+h\cdot n) = 0.$$

Okazuje się jednak, że oba powyższe przypadki są niemożliwe do zrealizowania. Współczynnik n bowiem zawsze jest wartością dodatnią, przeniesienie c w mostku wieloczujnikowym nie może być zerem, a wartość współczynnika h zgodnie z jego definicją (2) zawiera się w granicach dodatnich ułamków.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do rozpatrywania przeniesień ujemnych, czyli założymy $-1 \leqslant c < 0$. Jak widać ze wzoru (16), dodatnie wartości c powodują zmniejszenie odchylenia β odpowiadającego danemu rozstrojeniu Y, a więc nie są dla nas interesujące.

Badając charakter zależności $\beta = f(Y)$ obliczamy

$$\frac{d\beta}{dY} = (1-c)\frac{1-c(1-h)(1+h\cdot n)Y^2}{\{1+[(1+c)-c\cdot h(1-n)]Y+c(1-h)(1+h\cdot n)Y^2\}^2}.$$

Dla przyjętych założeń wartość powyższej pochodnej jest dodatnia przy wszelkich Y. Wynika stąd, że rozpatrywana funkcja ma charakter rosnący.

Wyznaczymy teraz odchylenia zredukowane β, odpowiadające charakterystycznym wartościom rozstrojenia zredukowanego Y. W pierwszym rzędzie znajdujemy minimalne odchylenie β_m, które występuje dla $Y_m = -1/k$:

$$\beta_m = -\frac{(1-c)(f+m)}{(f+m)^2(1+h\cdot n)-(f+m)[(1+c)-c\cdot h(1-n)]+c(1-h)}. \quad (18)$$

Dla wartości maksymalnej Y_r otrzymujemy natomiast

$$\beta_r = \frac{(1-c)(f+m)}{-c(f+m)^2(1+h\cdot n)+(f+m)[(1+c)-c\cdot h(1-n)]-(1-h)}. \quad (19)$$

Dodatkowo obliczymy jeszcze odchylenie zredukowane β_p, odpowiadające punktowi

$$Y_p = +\sqrt{\frac{1}{-c(1-h)(1+h\cdot n)}}, \quad (20)$$

z którym zetkniemy się dopiero w toku dalszych rozważań. Dostajemy tu

$$\beta_p = \frac{(1-c)}{(1+c)-c\cdot h(1-n)}. \quad (21)$$

3.1. Funkcja pomocnicza

Wprowadzimy teraz funkcję pomocniczą Y*, zdefiniowaną przy pomocy następującego wzoru:

$$Y^* = \frac{\beta}{(1-c)-[(1+c)-c\cdot h(1-n)]\beta}. \quad (22)$$

Spostrzegamy łatwo, że istnieje tutaj punkt nieciągłości, który występuje dla wartości β_p, znanej nam już z wyrażenia (21). Obliczając

$$\frac{dY^*}{d\beta} = \frac{(1-c)}{\{(1-c)-[(1+c)-c\cdot h(1-n)]\beta\}^2} \geqslant 0$$

stwierdzamy, iż Y* stanowi rosnącą funkcję odchylenia zredukowanego β.

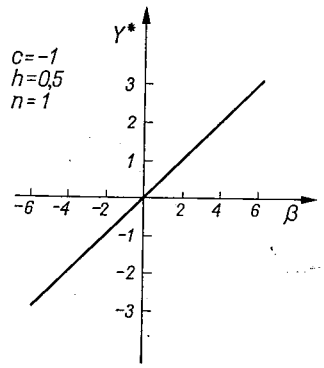
Na podstawie definicji (22) tworzymy zależność

$$\beta = \frac{(1-c)Y^*}{1+[(1+c)-c\cdot h(1-n)]Y^*}. \quad (23)$$

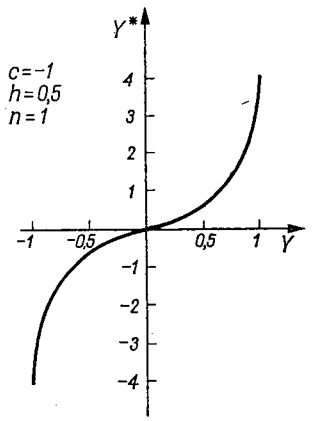
Z porównania wzorów (16) i (23) widać, że wielkość pomocnicza Y* stanowi przybliżenie prawdziwej wartości rozstrojenia zredukowanego. Opierając się na tych wyrażeniach możemy obliczyć bezpośrednio

$$Y^* = \frac{Y}{1+c(1-h)(1+h\cdot n)Y^2}. \quad (24)$$

Otrzymana funkcja wykazuje istnienie dwóch punktów nieciągłości, a mianowicie $\pm\sqrt{\frac{1}{-c\cdot(1-h)(1+h\cdot n)}}$. Pierwszy z nich, to znaczy ujemny, nie leży w zakresie pomiaru, gdy jest spełniona nierówność $-c \leqslant$



Rys. 6. $Y^* = f(\beta)$



Rys. 7. $Y^* = f(Y)$

$\leqslant (f+m)\left(f+m+g\frac{1+n}{n}\right)$. Wymaganie to jest zawsze zachowane, bowiem $f>1$, $g>0$, $m>0$, $n>0$, natomiast $-c\leqslant 1$. Dodatni punkt nieciągłości, znany nam już jako Y_p ze wzoru (20), nie występuje w zakresie pomiaru, o ile jest spełniony warunek

$$-c \geqslant \frac{1}{(f+m)\left(f+m+g\frac{1+n}{n}\right)}. \tag{25}$$

Wychodząc z zależności (24) obliczymy

$$\frac{dY^*}{dY} = \frac{1-c(1-h)(1+h\cdot n)Y^2}{[1+c(1-h)(1+h\cdot n)Y^2]^2} > 0,$$

co wskazuje, że i tutaj mamy do czynienia z funkcją rosnącą.

Z kolei znajdujemy wartości Y* dla poszczególnych interesujących nas punktów. Dla dolnego skraju zakresu pomiarowego otrzymujemy

$$Y_m^* = -\frac{(f+m)}{(f+m)^2(1+h\cdot n)+c(1-h)}. \tag{26}$$

Podstawiając Y_p wg (20) do wzoru (24) dostajemy oczywiście $Y_p^* \to \pm\infty$. Górnej granicy zakresu pomiarowego odpowiada natomiast

$$Y_r^* = \frac{(f+m)}{-c(f+m)^2(1+h\cdot n)-(1-h)}. \tag{27}$$

Licznik powyższego wyrażenia zawsze jest większy od zera. Mianownik zaś przybiera wartości dodatnie, o ile jest

$$-c > \frac{1}{(f+m)\left(f+m+g\dfrac{1+n}{n}\right)}.$$

Porównując to wymaganie z (25) stwierdzamy, że Y_r^* jest ujemne w tych przypadkach, gdy punkt Y_p znajduje się w zakresie pomiaru. Wartość Y_m^* jest zawsze ujemna, gdyż $c \geqslant -1$, $f > 1$, $h < 1$, $m > 0$, $n > 0$. Przy spełnionym warunku (25) jest więc zawsze $Y_r^* > Y_m^*$. Zakładając teraz, że $Y < 0$, zbadamy, kiedy będzie zachodzić $Y_r^* < Y_m^*$. Pytanie to jest istotne dla jednoznaczności rozpatrywanej funkcji. Szukane wymaganie brzmi $(f+m)^2\,(1+h\cdot n) > (1-h)$. Z poprzednio cytowanych granic poszczególnych współczynników widać jasno, że warunek ten zawsze musi być spełniony.

Wartości Y, β, Y*, obliczone poprzednio dla szczególnie interesujących punktów, zestawiono w tablicy 1 na str. 186.

3.2. Funkcja odwrotna

Wychodząc z zależności (16) i (23) określimy obecnie rozstrojenie zredukowane Y w funkcji Y*. Otrzymujemy tutaj równanie drugiego stopnia względem niewiadomej Y, a mianowicie

$$Y^2[c(1-h)(1+h\cdot n)Y^*] - Y\cdot 1 + Y^* = 0.$$

Rozwiązaniami tej zależności są wyrażenia

$$Y = \frac{-1+\sqrt{1+2[-2\cdot c(1-h)(1+h\cdot n)](Y^*)^2}}{[-2\cdot c(1-h)(1+h\cdot n)]Y^*}; \tag{28a}$$

$$Y = \frac{-1-\sqrt{1+2[-2\cdot c(1-h)(1+h\cdot n)](X^*)^2}}{[-2\cdot c(1-h)(1+h\cdot n)]Y^*}. \tag{28b}$$

Wyrażenie stojące w nawiasie [ ] jest zawsze dodatnie; fakt ten wynika z poprzednio podanych granic wartości występujących tam symboli. Widzimy więc, że wyrażenie znajdujące się pod znakiem pierwiastka nigdy nie jest ujemne. Oba wzory (28) posiadają wspólny punkt nieciągłości dla $Y^* = 0$. Mamy przy tym limes $Y = 0$ dla (28a), natomiast limes $Y = \pm\infty$ dla (28b).

Przy $Y^* \xrightarrow{Y^*\to 0} +\infty$ otrzymujemy następujące wartości graniczne Y: według (28a) $+\sqrt{\dfrac{1}{-c(1-h)(1+h\cdot n)Y^*}}$, wg (28b) $-\sqrt{\dfrac{1}{-c(1-h)(1+h\cdot n)Y^*}}$.

Dla $Y^* \to -\infty$ znaki powyższych granic zmieniają się na odwrotne.

Tablica 1

Przyporządkowane sobie wartości Y, β, Y*

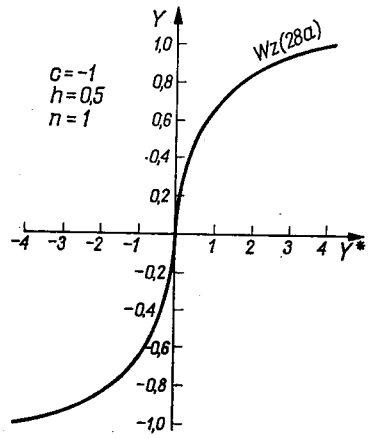
Lp.	Y	β	Y*
1	$\frac{-1}{(f+m)(1+h\cdot n)}$	$\frac{-(1-c)(f+m)}{(f+m)^2(1+h\cdot n)-(f+m)[(1+c)-c\cdot h(1-n)]+c(1-h)}$	$\frac{-(f+m)}{(f+m)^2(1+h\cdot n)+c(1-h)}$
2	0	0	0
3	$+\sqrt{\frac{1}{-c(1-h)(1+h\cdot n)}}$	$\frac{(1-c)}{(1+c)-c\cdot h(1-n)}$	$\pm\infty$
4	$\frac{1}{-c(f+m)(1+h\cdot n)}$	$\frac{(1-c)(f+m)}{-c(f+m)^2(1+h\cdot n)+(f+m)[(1+c)-c\cdot h(1-n)]-(1-h)}$	$\frac{(f+m)}{-c(f+m)^2(1+h\cdot n)-(1-h)}$

Objaśnienia:

Punkt „*m*" — lewy skraj zakresu pomiarowego
Punkt „*o*" — stan równowagi
Punkt „*p*" — nieciągłość funkcji pomocniczej; nie występuje w zakresie pomiaru, gdy jest spełniony warunek (25)
Punkt „*r*" — prawy skraj zakresu pomiarowego; $Y_r^* > 0$ gdy jest spełniony warunek (25)

Przystępując do wyznaczenia Y_m obliczamy najpierw wartość mianownika we wzorach (28) i otrzymujemy

$$\frac{2 \cdot c(1-h)(1+h \cdot n)(f+m)}{(f+m)^2(1+h \cdot n)+c(1-h)}.$$



Rys. 8. $Y = f(Y^*)$

Z kolei znajdujemy, że pod znakiem pierwiastka w liczniku stoi wyrażenie

$$\left[\frac{(f+m)^2(1+h \cdot n)-c(1-h)}{(f+m)^2(1+h \cdot n)+c(1-h)}\right]^2.$$

Po podstawieniu i odpowiednich przekształceniach dostajemy według wzoru (28a)

$$Y_m = -\frac{1}{(f+m)(1+h \cdot n)},$$

natomiast (28b) daje

$$Y_m = \frac{(f+m)}{-c(1-h)}.$$

Podstawiając z kolei Y_r^* będziemy mieli w mianowniku wzoru (28)

$$\frac{-2 \cdot c(1-h)(1+h \cdot n) \cdot (f+m)}{-c(f+m)^2(1+h \cdot n)-(1-h)},$$

zaś pod znakiem pierwiastka wystąpi

$$\left[\frac{-c(f+m)^2(1+h \cdot n)+(1-h)}{-c(f+m)^2(1+h \cdot n)-(1-h)}\right]^2.$$

Wyrażenie wewnątrz nawiasów kwadratowych jest dodatnie, gdy zachodzi nierówność

$$-c \geqslant \frac{1}{(f+m)\left(f+m+g\dfrac{1+n}{n}\right)} \quad \text{(czyli przy } Y_r^* > 0.$$

W takim przypadku wzór (28a) daje wartość

$$Y_r = \frac{1}{-c(f+m)(1+h\cdot n)},$$

podczas gdy z (28b) otrzymujemy

$$Y_r = \frac{(f+m)}{-c(1-h)}.$$

Dla $Y_r^* < 0$ poprzednio omawiane wyrażenie w nawiasie kwadratowym ma wartość ujemną. Pamiętając, że zapis $+\sqrt{Z}$ oznacza liczbę dodatnią, a $-\sqrt{Z}$ wielkość ujemną, dostajemy w tym przypadku ze wzoru (28a)

$$Y_r = \frac{(f+m)}{-c(1-h)}.$$

Zależność (28b) daje wówczas

$$Y_r = \frac{1}{-c(f+m)(1+h\cdot n)}.$$

Wartości Y, obliczone powyżej ze wzorów (28), dla różnych interesujących punktów zostały zestawione w tablicy 2.

Porównanie zależności ujętych w tablicach 1 i 2 wskazuje wyraźnie na zakres stosowalności obu postaci funkcji odwrotnej:

w przedziale $Y_m^* \leqslant Y^* < +\infty$ należy stosować wyrażenie (28a),

w przedziale $-\infty < Y^* \leqslant Y_r^*$ należy stosować wyrażenie (28b).

Przechodząc teraz do odchyleń zredukowanych β dostajemy, że

w zakresie $\beta_m \leqslant \beta \leqslant \beta_p$ obowiązuje zależność (28a),

w zakresie $\beta_p \leqslant \beta \leqslant \beta_r$ obowiązuje zależność (28b).

Występujące powyżej odchylenia zredukowane są określone wzorami: β_m — (18), β_p — (21) i β_r — (19).

3.3. Zakres stosowalności przybliżenia

Z poprzednich wywodów wiemy już, że zależność (23) stanowi przybliżenie ścisłej funkcji podstawowej (16). Wynika stąd również, iż wzór (22) jest przybliżeniem skomplikowanej funkcji odwrotnej (28). Musimy przy tym pamiętać, że wyrażenia (22) oraz (23) mogą być stosowane dla rozstrojeń dodatnich i ujemnych o niezbyt wielkiej wartości bezwzględ-

Tablica 2

$Y = f(Y^*)$ według wzorów (28a) i (28b)

Lp.	Y^*	Y według wzoru (28a)	Y według wzoru (28b)	Uwagi
1	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{1}{-c(1-h)(1+h\cdot n)}}$	$+\sqrt{\frac{1}{-c(1-h)(1+h\cdot n)}}$	Punkt „p”
2	$\frac{(f+m)}{-c(f+m)^2(1+h\cdot n)-(1-h)}$	$\frac{(f+m)}{-c(1-h)}$	$\frac{1}{-c(f+m)(1+h\cdot n)}$	Punkt „r” przy niespełnionym warunku (25)
3	$-\frac{(f+m)}{(f+m)^2(1+h\cdot n)+c(1-h)}$	$-\frac{1}{(f+m)(1+h\cdot n)}$	$\frac{(f+m)}{-c(1-h)}$	Punkt „m”
4	0	0	$\pm\infty$	Punkt „o”
5	$\frac{(f+m)}{-c(f+m)^2(1+h\cdot n)-(1-h)}$	$\frac{1}{-c(f+m)(1+h\cdot n)}$	$\frac{(f+m)}{-c(1-h)}$	Punkt „r” przy spełnionym warunku (25)
6	$+\infty$	$+\sqrt{\frac{1}{-c(1-h)(1+h\cdot n)}}$	$-\sqrt{\frac{1}{-c(1-h)(1+h\cdot n)}}$	Punkt „p”

nej, a więc leżących w zakresie ważności wzoru (28a). Wyznaczymy teraz granice zakresu stosowalności omawianego przybliżenia.

Względny uchyb wartości przybliżonej Y^* wynosi

$$\frac{Y^* - Y}{Y} = \frac{Y^*}{Y} - 1.$$

Żądamy, by w zakresie stosowalności przybliżenia uchyb ten nie był mniejszy od $-\delta_p$ ani też większy od $+\delta_p$, gdzie $0 < \delta_p \ll 1$. W związku z tym powinno być

$$1 - \delta_p \leqslant \frac{Y^*}{Y} \leqslant 1 + \delta_p.$$

Podstawiając do tej nierówności wartość Y według wzoru (28a) dochodzimy do warunków

$$(Y^*)^2 \geqslant - \frac{\delta_p(1-\delta_p)}{-c(1-h)(1+h \cdot n)}$$

oraz

$$(Y^*)^2 \leqslant \frac{\delta_p(1+\delta_p)}{-c(1-h)(1+h \cdot n)}.$$

Pierwsze z tych wymagań jest zawsze spełnione, bowiem $c < 0$, $0 < h < 1$, $n > 0$, $0 < \delta_p < 1$. W związku z tym żądanie nasze ogranicza się do spełnienia nierówności

$$-\sqrt{\frac{\delta_p(1+\delta_p)}{-c(1-h)(1+h \cdot n)}} \leqslant Y^* \leqslant +\sqrt{\frac{\delta_p(1+\delta_p)}{-c(1-h)(1+h \cdot n)}}. \quad (29)$$

4. PRZYKŁADY CHARAKTERYSTYK POMIAROWYCH

W celu lepszego zilustrowania charakteru rozpatrzonych zależności przytoczymy kilka przykładów. Obliczyliśmy tablice wartości Y oraz ewentualnie Y^* dla układu ze wskaźnikiem typu napięciowego i z miernikiem prądowym. Uwzględniliśmy przy tym zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości odchyleń zredukowanych β, gdyż przebiegi rozpatrywanych funkcji nie są symetryczne.

4.1. Układ ze wskaźnikiem napięciowym

Wpływ wartości przeniesienia c oraz iloczynu $(c \cdot n)$ na przebieg charakterystyki pomiarowej został uwidoczniony przez obliczenie czterech przypadków wynikających z zastosowania $c = -1$ lub $c = -0{,}3$ przy różnych parametrach n, a mianowicie $n = 1$ bądź $n = 3$.

Tablica 3

$Y = f(\beta)$ dla układu ze wskaźnikiem napięciowym

β	$c = -1$		$c = -0{,}3$	
	$n = 1$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 3$
$-1\cdot10^{0}$	$-5{,}00000\cdot10^{-1}$		$-5{,}00000\cdot10^{-1}$	
$-5\cdot10^{-1}$	$-2{,}50000\cdot10^{-1}$		$-3{,}03030\cdot10^{-1}$	
$-2\cdot10^{-1}$	$-1{,}00000\cdot10^{-1}$	$-1{,}25000\cdot10^{-1}$	$-1{,}38889\cdot10^{-1}$	$-1{,}51515\cdot10^{-1}$
$-1\cdot10^{-1}$	$-5{,}00000\cdot10^{-2}$	$-5{,}55556\cdot10^{-2}$	$-7{,}29927\cdot10^{-2}$	$-7{,}63359\cdot10^{-2}$
$-5\cdot10^{-2}$	$-2{,}50000\cdot10^{-2}$	$-2{,}63158\cdot10^{-2}$	$-3{,}74532\cdot10^{-2}$	$-3{,}83142\cdot10^{-2}$
$-2\cdot10^{-2}$	$-1{,}00000\cdot10^{-2}$	$-1{,}02041\cdot10^{-2}$	$-1{,}52207\cdot10^{-2}$	$-1{,}53610\cdot10^{-2}$
$-1\cdot10^{-2}$	$-5{,}00000\cdot10^{-3}$	$-5{,}05051\cdot10^{-3}$	$-7{,}65111\cdot10^{-3}$	$-7{,}68640\cdot10^{-3}$
$-5\cdot10^{-3}$	$-2{,}50000\cdot10^{-3}$	$-2{,}51256\cdot10^{-3}$	$-3{,}83583\cdot10^{-3}$	$-3{,}84468\cdot10^{-3}$
$-2\cdot10^{-3}$	$-1{,}00000\cdot10^{-3}$	$-1{,}00200\cdot10^{-3}$	$-1{,}53681\cdot10^{-3}$	$-1{,}53822\cdot10^{-3}$
$-1\cdot10^{-3}$	$-5{,}00000\cdot10^{-4}$	$-5{,}00501\cdot10^{-4}$	$-7{,}68817\cdot10^{-4}$	$-7{,}69172\cdot10^{-4}$
$-5\cdot10^{-4}$	$-2{,}50000\cdot10^{-4}$	$-2{,}50125\cdot10^{-4}$	$-3{,}84574\cdot10^{-4}$	$-3{,}84601\cdot10^{-4}$
$-2\cdot10^{-4}$	$-1{,}00000\cdot10^{-4}$	$-1{,}00020\cdot10^{-4}$	$-1{,}53830\cdot10^{-4}$	$-1{,}53844\cdot10^{-4}$
$-1\cdot10^{-4}$	$-5{,}00000\cdot10^{-5}$	$-5{,}00050\cdot10^{-5}$	$-7{,}69189\cdot10^{-5}$	$-7{,}69225\cdot10^{-5}$
0	0	0	0	0
$+1\cdot10^{-4}$	$+5{,}00000\cdot10^{-5}$	$+4{,}99950\cdot10^{-5}$	$+7{,}69272\cdot10^{-5}$	$+7{,}69237\cdot10^{-5}$
$+2\cdot10^{-4}$	$+1{,}00000\cdot10^{-4}$	$+9{,}99800\cdot10^{-5}$	$+1{,}53863\cdot10^{-4}$	$+1{,}53849\cdot10^{-4}$
$+5\cdot10^{-4}$	$+2{,}50000\cdot10^{-4}$	$+2{,}49875\cdot10^{-4}$	$+3{,}84657\cdot10^{-4}$	$+3{,}84630\cdot10^{-4}$
$+1\cdot10^{-3}$	$+5{,}00000\cdot10^{-4}$	$+4{,}99500\cdot10^{-4}$	$+7{,}69645\cdot10^{-4}$	$+7{,}69290\cdot10^{-4}$
$+2\cdot10^{-3}$	$+1{,}00000\cdot10^{-3}$	$+9{,}98004\cdot10^{-4}$	$+1{,}54012\cdot10^{-3}$	$+1{,}53870\cdot10^{-3}$
$+5\cdot10^{-3}$	$+2{,}50000\cdot10^{-3}$	$+2{,}48756\cdot10^{-3}$	$+3{,}85654\cdot10^{-3}$	$+3{,}84763\cdot10^{-3}$
$+1\cdot10^{-2}$	$+5{,}00000\cdot10^{-3}$	$+4{,}95050\cdot10^{-3}$	$+7{,}73395\cdot10^{-3}$	$+7{,}69823\cdot10^{-3}$
$+2\cdot10^{-2}$	$+1{,}00000\cdot10^{-2}$	$+9{,}80392\cdot10^{-3}$	$+1{,}55521\cdot10^{-2}$	$+1{,}54083\cdot10^{-2}$
$+5\cdot10^{-2}$	$+2{,}50000\cdot10^{-2}$	$+2{,}38095\cdot10^{-2}$	$+3{,}95257\cdot10^{-2}$	$+3{,}86100\cdot10^{-2}$
$+1\cdot10^{-1}$	$+5{,}00000\cdot10^{-2}$	$+4{,}54545\cdot10^{-2}$	$+8{,}13008\cdot10^{-2}$	$+7{,}75194\cdot10^{-2}$
$+2\cdot10^{-1}$	$+1{,}00000\cdot10^{-1}$	$+8{,}33333\cdot10^{-2}$	$+1{,}72414\cdot10^{-1}$	$+1{,}56250\cdot10^{-1}$
$+5\cdot10^{-1}$	$+2{,}50000\cdot10^{-1}$	$+1{,}66667\cdot10^{-1}$	$+5{,}26316\cdot10^{-1}$	$+4{,}00000\cdot10^{-1}$
$+1\cdot10^{0}$	$+5{,}00000\cdot10^{-1}$	$+2{,}50000\cdot10^{-1}$	$+1.66667\cdot10^{0}$	$+8{,}33333\cdot10^{-1}$

4.2. Układ ze wskaźnikiem prądowym

W podanym przykładzie założono wartości $h = 0{,}5$ oraz $n = 1$. Charakterystyka pomiarowa została obliczona dla dwu przypadków, to jest raz przy $c = -1$ i drugi raz dla $c = -0{,}3$. W tablicy 4 zostały zestawione zarówno wartości Y* wg przybliżonego wzoru (22), jak i rozstrojenia zredukowane Y, wyznaczone ze ścisłej funkcji odwrotnej (28).

5. CHARAKTERYSTYKA RÓŻNICOWA

Pod nazwą „charakterystyka różnicowa" rozumiemy zależność różnicy $\Delta R = R_x - R_c$ od odchylenia wskaźnika. Pojęcie to stosuje się tylko do takich mostków, w których przy stanie równowagi jest $R_x = R_c$, czyli w układach z $n = 1$. Istotną różnicę w stosunku do poprzednich rozwa-

Tablica 4

$Y^* = f^*(\ )$ oraz $Y = f(\ )$ dla układu ze wskaźnikiem prądowym

β	$c = -1$		$c = -0{,}3$	
	Y^*	Y	Y^*	Y
$-1\cdot10^{0}$	$-5{,}00000\cdot10^{-1}$	$-4{,}30501\cdot10^{-1}$	$-5{,}00000\cdot10^{-1}$	$-4{,}74654\cdot10^{-1}$
$-5\cdot10^{-1}$	$-2{,}50000\cdot10^{-1}$	$-2{,}39266\cdot10^{-1}$	$-3{,}03030\cdot10^{-1}$	$-2{,}97015\cdot10^{-1}$
$-2\cdot10^{-1}$	$-1{,}00000\cdot10^{-1}$	$-9{,}92610\cdot10^{-2}$	$-1{,}38889\cdot10^{-1}$	$-1{,}38291\cdot10^{-1}$
$-1\cdot10^{-1}$	$-5{,}00000\cdot10^{-2}$	$-4{,}99066\cdot10^{-2}$	$-7{,}29927\cdot10^{-2}$	$-7{,}29054\cdot10^{-2}$
$-5\cdot10^{-2}$	$-2{,}50000\cdot10^{-2}$	$-2{,}49883\cdot10^{-2}$	$-3{,}74532\cdot10^{-2}$	$-3{,}74414\cdot10^{-2}$
$-2\cdot10^{-2}$	$-1{,}00000\cdot10^{-2}$	$-9{,}99925\cdot10^{-3}$	$-1{,}52207\cdot10^{-2}$	$-1{,}52199\cdot10^{-2}$
$-1\cdot10^{-2}$	$-5{,}00000\cdot10^{-3}$	$-4{,}99994\cdot10^{-3}$	$-7{,}65111\cdot10^{-3}$	$-7{,}65101\cdot10^{-3}$
$-5\cdot10^{-3}$	$-2{,}50000\cdot10^{-3}$	$-2{,}49999\cdot10^{-3}$	$-3{,}83583\cdot10^{-3}$	$-3{,}83582\cdot10^{-3}$
$-2\cdot10^{-3}$	$-1{,}00000\cdot10^{-3}$	$-9{,}99999\cdot10^{-4}$	$-1{,}53681\cdot10^{-3}$	$-1{,}53681\cdot10^{-3}$
$-1\cdot10^{-3}$	$-5{,}00000\cdot10^{-4}$	$-5{,}00000\cdot10^{-4}$	$-7{,}68817\cdot10^{-4}$	$-7{,}68817\cdot10^{-4}$
$-5\cdot10^{-4}$	$-2{,}50000\cdot10^{-4}$	$-2{,}50000\cdot10^{-4}$	$-3{,}84574\cdot10^{-4}$	$-3{,}84574\cdot10^{-4}$
$-2\cdot10^{-4}$	$-1{,}00000\cdot10^{-4}$	$-1{,}00000\cdot10^{-4}$	$-1{,}53830\cdot10^{-4}$	$-1{,}53830\cdot10^{-4}$
$-1\cdot10^{-4}$	$-5{,}00000\cdot10^{-5}$	$-5{,}00000\cdot10^{-5}$	$-7{,}69189\cdot10^{-5}$	$-7{,}69189\cdot10^{-5}$
0	0	0	0	0
$+1\cdot10^{-4}$	$+5{,}00000\cdot10^{-5}$	$+5{,}00000\cdot10^{-5}$	$+7{,}69272\cdot10^{-5}$	$+7{,}69272\cdot10^{-5}$
$+2\cdot10^{-4}$	$+1{,}00000\cdot10^{-4}$	$+1{,}00000\cdot10^{-4}$	$+1{,}53863\cdot10^{-4}$	$+1{,}53863\cdot10^{-4}$
$+5\cdot10^{-4}$	$+2{,}50000\cdot10^{-4}$	$+2{,}50000\cdot10^{-4}$	$+3{,}84657\cdot10^{-4}$	$+3{,}84657\cdot10^{-4}$
$+1\cdot10^{-3}$	$+5{,}00000\cdot10^{-4}$	$+5{,}00000\cdot10^{-4}$	$+7{,}69645\cdot10^{-4}$	$+7{,}69645\cdot10^{-4}$
$+2\cdot10^{-3}$	$+1{,}00000\cdot10^{-3}$	$+9{,}99999\cdot10^{-4}$	$+1{,}54012\cdot10^{-3}$	$+1{,}54012\cdot10^{-3}$
$+5\cdot10^{-3}$	$+2{,}50000\cdot10^{-3}$	$+2{,}49999\cdot10^{-3}$	$+3{,}85654\cdot10^{-3}$	$+3{,}85652\cdot10^{-3}$
$+1\cdot10^{-2}$	$+5{,}00000\cdot10^{-3}$	$+4{,}99994\cdot10^{-3}$	$+7{,}73395\cdot10^{-3}$	$+7{,}73385\cdot10^{-3}$
$+2\cdot10^{-2}$	$+1{,}00000\cdot10^{-2}$	$+9{,}99925\cdot10^{-3}$	$+1{,}55521\cdot10^{-2}$	$+1{,}55513\cdot10^{-2}$
$+5\cdot10^{-2}$	$+2{,}50000\cdot10^{-2}$	$+2{,}49883\cdot10^{-2}$	$+3{,}95257\cdot10^{-2}$	$+3{,}95118\cdot10^{-2}$
$+1\cdot10^{-1}$	$+5{,}00000\cdot10^{-2}$	$+4{,}99066\cdot10^{-2}$	$+8{,}13008\cdot10^{-2}$	$+8{,}11802\cdot10^{-2}$
$+2\cdot10^{-1}$	$+1{,}00000\cdot10^{-1}$	$+9{,}92610\cdot10^{-2}$	$+1{,}72414\cdot10^{-1}$	$+1{,}71276\cdot10^{-1}$
$+5\cdot10^{-1}$	$+2{,}50000\cdot10^{-1}$	$+2{,}39266\cdot10^{-1}$	$+5{,}26316\cdot10^{-1}$	$+4{,}97058\cdot10^{-1}$
$+1\cdot10^{0}$	$+5{,}00000\cdot10^{-1}$	$+4{,}30501\cdot10^{-1}$	$+1{,}66667\cdot10^{0}$	$+1{,}16110\cdot10^{0}$

żań stanowi fakt, że przeniesienie c nie jest znane i może podlegać zmianom.

Przystępując do rozpatrzenia tego zagadnienia wyrazimy przede wszystkim szukaną wartość ΔR przy pomocy oznaczeń (1). W połączeniu z założeniem $n = 1$ dostajemy $\Delta R = (1 - c)\ X.R$. Po wprowadzeniu rozstrojenia zredukowanego Y wg definicji (3) zależność ta przybierze postać

$$\Delta R = (1 - c)k \cdot R \cdot Y. \tag{30}$$

Nieznana wartość mnożnika $(1 - c)$ zniknie z obliczeń w tym przypadku, gdy z wystarczającą dokładnością będzie można przyjąć, że $Y = \frac{\beta}{1-c}$. W takim przypadku, przy wprowadzeniu stałej mostka C_M według definicji uzasadnionej w publikacji [2], a mianowicie $C_M = \frac{k}{\alpha_\infty}$, szukaną zależność możemy przedstawić jako

$$\Delta R = \alpha \cdot C_M \cdot R. \tag{31}$$

Z powyższych wywodów widać, że charakterystyka różnicowa stanowi przybliżenie dające dostateczną dokładność pomiaru tylko w zakresie niewielkich rozstrojeń mierzonych. Nie będziemy się wdawać w bardzo złożoną analizę tego problemu. W oparciu o zależności (12) oraz (22) i (28) możemy stwierdzić, iż ekstremalne odchylenie zredukowane nie powinno przekraczać wartości $\pm 1 \cdot 10^{-3}$ przy uchybie pomiaru rzędu $\pm 1 \cdot 10^{-2}$.

6. OPORNOŚĆ ZASTĘPCZA MOSTKA WIDZIANA OD STRONY ZACISKÓW ZASILANIA

Oporność zastępczą mostka widzianą od strony zacisków zasilania obliczamy na podstawie schematu zastępczego układu Wheatstone'a, przedstawionego na rys. 2. Przy zastosowaniu oznaczeń (1) i (2) dostajemy

$$R_M = m(1+n)\frac{X(1+c\cdot n)+f(1+n)}{X(1+c\cdot n)+(f+m)(1+n)}R. \tag{32}$$

Dla mostka znajdującego się w stanie równowagi (tj. $X = 0$) mamy

$$R_{M0} = f \cdot m\frac{1+n}{f+m}R. \tag{33}$$

Względna zmiana oporności zastępczej przy $X \neq 0$ wyniesie zatem

$$\delta_{RM} = \frac{R_M - R_{M0}}{R_{M0}} = \frac{X \cdot m(1+c\cdot n)}{f[X(1+c\cdot n)+(f+m)(1+n)]}. \tag{34}$$

Powyższe wzory (32) i (34) są ścisłe dla układu ze wskaźnikiem typu napięciowego. W przypadku zastosowania miernika prądowego można je również stosować, gdyż prąd i_g jest pomijalnie mały wobec i_x.

7. ZMIENNOŚĆ OBCIĄŻENIA CZUJNIKÓW

Obciążenie prądowe czujników zależy od aktualnej wartości rozstrojenia X. W układzie mostka z miernikiem napięciowym przez czujniki R_x oraz R_c przepływa dokładnie ten sam prąd i_x. Korzystając ze schematu wyobrażonego na rys. 2 obliczymy łatwo wartość tego prądu

$$i_x = \frac{m(1+n)}{X(1+c\cdot n)+(f+m)(1+n)}I_M. \tag{35}$$

W stanie równowagi mostka, tj. dla $X = 0$, prąd ten wyniesie

$$i_{x0} = \frac{m}{f+m}I_M. \tag{36}$$

Z zależności (35) i (36) wynika następująca wartość względnej zmiany obciążenia obu czujników:

$$\delta_{ix} = \frac{i_x - i_{x0}}{i_{x0}} = -\frac{X(1 + c \cdot n)}{X(1 + c \cdot n) + (f + m)(1 + n)}. \tag{37}$$

Powyższy wzór wskazuje na możliwość powstawania przeciążeń czujników w przypadku, gdy zakres pomiaru obejmuje również ujemne wartości rozstrojeń. Dla układu o liniowej charakterystyce pomiarowej według wymagania (14) zjawisko to nie może wystąpić bez względu na mierzone wartości rozstrojeń X. W przypadku mostka o wskaźniku prądowym wzory powyższe można również stosować, chociaż są one tylko przybliżone.

8. ZAKOŃCZENIE

Z przytoczonych rozważań wynika, że charakterystyka pomiarowa odchyłowego mostka Thomsona o dwu czujnikach daje się ująć analitycznie przy pomocy niezbyt skomplikowanych zależności algebraicznych. Na ogół można posługiwać się ścisłym lub przybliżonym równaniem hiperbolicznym według wzorów (12) lub (22). Zakres stosowalności tego przybliżenia jest określony nierównością (29). Dopuszczając pewien uchyb przybliżenia w wybranym obszarze pomiarowym zyskujemy możność stosowania charakterystyki proporcjonalnej. Przy projektowaniu takiego układu posługujemy się metodyką przedstawioną w publikacji [3]. Podana na końcu analiza zmienności oporności zastępczej mostka oraz prądu w czujnikach pozwala na prawidłowe zaprojektowanie układu pomiarowego, to znaczy takie, przy którym założenie $I_M = \text{const}$ zostanie wystarczająco dokładnie dochowane i nie wystąpią przeciążenia czujników.

Ścisłe wzory (16) oraz (28) w połączeniu z (22), wyprowadzone w niniejszym artykule, opisują ogólnie zachowanie się układu pomiarowego w warunkach dowolnych rozstrojeń mierzonych. Będą one przydatne do rozpatrywania takich przypadków, gdzie wielkość mierzona daje duże wartości rozstrojenia a mostek wieloczujnikowy stosuje się ze względu na potrzebę eliminacji wpływów postronnych.

Wyniki dociekań przedstawione w tym artykule, jak również w publikacjach [1], [2] i [3], pozwalają zaprojektować układ odchyłowego mostka Thomsona w sposób najwłaściwszy dla rozwiązywanego zadania mierniczego — i to nawet w przypadkach skomplikowanych.

Politechnika Gdańska
Katedra Miernictwa Elektrycznego

WYKAZ LITERATURY

1. Sawicki J.: Właściwości odchyłowego mostka Thomsona. — Rozpr. El., tom XI, zesz. 1, Warszawa 1965.
2. Sawicki J.: Czułość i dobór elementów odchyłowego mostka Thomsona. — Rozpr. El., tom XI, zesz. 1, Warszawa 1965.
3. Sawicki J.: Liniowe przybliżenie charakterystyki mostka odchyłowego . — Arch. El., tom XII, zesz. 2, Warszawa 1963.

J. SAWICKI

CARACTÉRISTIQUE DE MESURE DE PONT DOUBLE DE THOMSON À PLUSIEURS SONDES

Resumé

L'ouvrage contient la déduction de la caractéristique de mesure, c. à d. de la dépendance liant la déviation de dispositif indicateur avec des valeurs des résistances en cas d'un pont double de Thomson à plusieurs sondes. On détermine cet appareil „à plusieurs sondes", quand plus qu'une résistance est inconnue. Pour obtenir une seule signification de mesure il faut conaître la liaison entre les valeurs des sondes particulières. Les dépendances acceptées sont claires des déterminations (1). Dans l'analyse on se serve des valeurs réduites du désaccord $Y = X/k$ ainsi que de la déviation $\beta = \alpha/\alpha_\infty$, les coéfficients k et α etant donnés dans la publication [1].

En cas du schéma avec un indicateur de tension dans la signification donnée dans l'oeuvre [1] on a obtenu les dépendances de base (12) et (13) et en cas d'un indicateur de courant — les formules (16), (22) et (28). La grandeur auxiliaire Y* c'est une approximation du désaccord réduit Y.

On a etudié le cercle d'utilisation de l'approximation ci-dessus. Encore on a déduit les formules déterminant la résistance équivalente du schéma et ses changements. On a calculé aussi les changements relatifs de l'intensité du courant dans les sondes.

L'analyse est illustrée par les exemples des caractéristiques de mesure. Les valeurs calculées en cas des variations particulières du schéma sont rapprochées dans les tableaux 3 et 4.

J. SAWICKI

MESSCHARAKTERISTIK EINER UNABGEGLICHENEN THOMSON-BRÜCKE MIT MEHREREN FÜHLERN

Zusammenfassung

Es wird die Messcharakteristik einer mit mehreren Fühlern ausgestatteter Thomson-Brücke abgeleitet. Unter einer Brücke mit mehreren Fühlern wird die Schaltung verstanden, bei welcher mehrere unbekannte Widerstände vorhanden sind, die allerdings in bestimmten, bekannten Zusammenhängen zueinander stehen. Die Messcharakteristik bestimmt die Beziehung des Instrumentausschlages zu

den Widerstandswerten. Die gemachten Voraussetzungen sind aus den Definitionsformeln (1) ersichtlich. In den Betrachtungen finden reduzierte Werte der Verstimmung $Y = X/k$ und der Ablenkung $\beta = \alpha/\alpha_\infty$ Verwendung, wobei die Koeffiziente k und α_∞ nach den in der Veröffentlichung [1] abgeleiteten Formeln, eingesetzt werden.

Wird zwischen den Anzeigeinstrumenten der Spannungs- und Stromtype unterschieden [1], so gelten für eine Brücke mit Spannungstype — Instrument die Grundbeziehungen (12) und (13), für diejenige mit Stromtype-Instrument, die Grundbeziehungen (16), (22) und (28). Der Hilfswert Y* stellt annähernd die reduzierte Verstimmung Y dar. Der Eignungsbereich dieser Annäherung wurde untersucht. Zusätzlich wurden Formeln abgeleitet, welche den Ersatzwiderstand der Schaltung und seine Aenderungen angeben. Auch wurden relative Aenderungen der Stromstärke in den Fühlern bestimmt.

Die Betrachtungen wurden mit Beispielen der Messcharakteristiken illustriert. Die für verschiedene Brückenabarten errechneten Werte sind in den Tafeln 3. und 4. enthalten.

Е. САВИЦКИ

ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МОСТА ТОМСОНА С МНОГИМИ ДАТЧИКАМИ

Резюме

В статье, для случая моста Томсона с многими датчиками, выводится измерительная характеристика т. е. зависимость, связывающая отклонения стрелки измерителя со значениями сопротивлений. Мост называется „с многими датчиками", когда больше чем одно сопротивление является неизвестным. Для однозначности измерений нужно знать соотношения между величинами каждого из датчиков. Принятые соотношения ясны с обозначений (1). При рассуждениях были использованы редукцированные величины расстройки $Y = X/k$ и отклонения стрелки $\beta = \alpha/\alpha_\infty$, причем коэффициенты k, α_∞ приводятся в статье [1].

Для системы с указателем напряжения в значении приведенном в статье [1] получено основные зависимости (12) и (13), а в случае токового указателя — формулы (16), (22) и (28). Вспомогательная величина Y* является приближением редукцированной расстройки Y.

Исследовано область применяемости вышеуказанного приближения. Кроме этого выведены формулы, определяющие эквивалентное сопротивление схемы и его изменения. Вычислены также относительные изменения силы тока в датчиках.

Рассуждения иллюстрируются примерами измерительных характеристик. Сводка рассчитанных значений для каждого варианта схемы приведена в таблицах 3 и 4.

621.396.6

MARIA RZEPECKA

Stabilizacja częstotliwości generatora mikrofalowego w układzie Pounda

Rękopis dostarczono 20.9.1963

W pracy omówiono jeden z układów automatycznej stabilizacji częstotliwości generatorów mikrofalowych. Przeprowadzono analizę zależności fizycznych dla dyskryminatora mikrofalowego w oparciu o metodę macierzy rozproszenia. Na podstawie przeprowadzonej analizy podano wnioski dotyczące parametrów układu oraz — w zakończeniu — podano rezultaty pracy eksperymentalnej.

1. WSTĘP

W wielu pomiarach laboratoryjnych w pasmie mikrofal konieczne jest posiadanie generatora o dużej stałości częstotliwości (w krótkim czasie, ok. godziny).

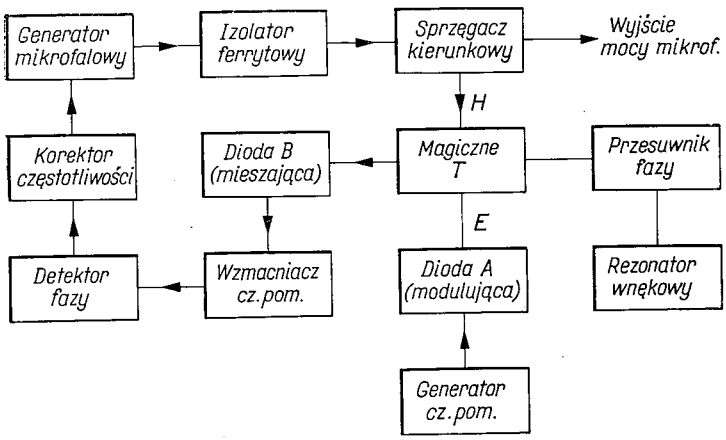
Jednym z prostszych i najczęściej stosowanych sposobów zapewnienia żądanej stałości jest użycie jako częstotliwości wzorcowej — częstotliwości rezonansowej rezonatora wnękowego o dużej dobroci oraz zastosowanie automatycznej korekcji częstotliwości. Układ składa się z następujących podstawowych bloków: detektora błędu (dyskryminatora mikrofalowego), wzmacniacza i korektora częstotliwości. W literaturze opisano szereg układów [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]; różnią się one rozwiązaniem dyskryminatora mikrofalowego.

W niniejszej pracy zostanie opisany układ stabilizatora Pounda [6], [7], który jest stosunkowo prosty w konstrukcji oraz przy odpowiednim rezonatorze i prawidłowym dobraniu parametrów może zapewnić stabilność rzędu 10^{-8}. Dodatkową zaletą układu jest monochromatyczne widmo sygnału otrzymanego ze stabilizowanego generatora.

2. ANALIZA DZIAŁANIA UKŁADU STABILIZATORA POUNDA

Część sygnału z generatora mikrofalowego przez sprzęgacz kierunkowy zostaje skierowana do ramienia H magicznego T (rys. 1). Moc. z ramienia H rozdziela się, w połowie dochodząc do dopasowanej diody krystalicznej B, w połowie poprzez przesuwnik fazy do rezonatora. Moduł i faza fali odbitej od rezonatora zależą od różnicy częstotliwości sygnału i częstotliwości rezonansowej. Fala ta dochodzi do diody krystalicznej A,

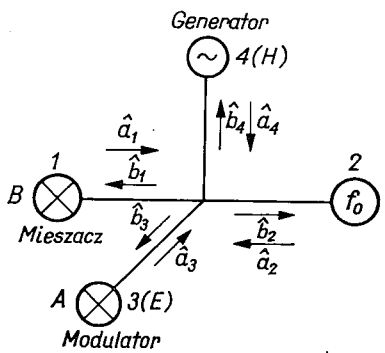
do której doprowadzono sygnał modulujący o częstotliwości kilku MHz (z generatora pomocniczego). W takt sygnału modulującego zmienia się impedancja diody, a więc fala odbita w ramieniu E zostaje zmodulo-



Rys. 1. Schemat blokowy stabilizatora Pounda

wana w amplitudzie. Do diody B dochodzi zatem sygnał bezpośrednio z generatora oraz sygnał odbity od rezonatora i od diody A. Po zmieszaniu na diodzie B otrzymuje się między innymi sygnał o częstotliwości modulującej, którego amplituda i faza zależą od różnicy częstotliwości.

Rozważmy dokładniej zależność w dyskryminatorze mikrofalowym. Załóżmy, że generator jest dopasowany do prowadnicy falowej oraz, że magiczne T jest dopasowane.



Rys. 2. Dyskryminator mikrofalowy

Dla układu przedstawionego na rys. 2 możemy napisać następujące ogólne zależności macierzowe:

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

gdzie:

$$\hat{a}_i = \frac{\hat{P}_{ai}\hat{P}^*_{ai}}{Z_0^2},$$

$$\hat{b}_i = \frac{\hat{P}_{bi}\hat{P}^*_{bi}}{Z_0^2},$$

$\hat{P}_{ai}$ — moc dochodząca do i-tego ramienia rozgałęzienia,
$\hat{P}_{bi}$ — moc odbita od i-tego ramienia rozgałęzienia,
Z_0 — impedancja charakterystyczna falowodu,
$*$ — oznacza wartość sprzężoną,
s_{ij} — współczynniki macierzy rozproszenia.
Na podstawie właściwości dopasowanego magicznego T wiadomo, że:

$$s_{13} = s_{31} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad s_{13} = -s_{23};$$

$$s_{14} = s_{41} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad s_{14} = s_{24};$$

$$s_{12} = s_{21} = s_{34} = s_{43} = s_{11} = s_{22} = s_{33} = s_{44} = 0.$$

Uwzględniając, że

$$\hat{a}_i = \hat{\gamma}_i \hat{b}_i, \tag{2}$$

gdzie $\hat{\gamma}_i$ współczynnik odbicia na końcu i-tego ramienia, otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 0 & -s_{13} & s_{14} \\ s_{13} & -s_{13} & 0 & 0 \\ s_{14} & s_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1 \hat{b}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \hat{b}_2 \\ \hat{\gamma}_3 \hat{b}_3 \\ \hat{E}_0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Na podstawie zależności (3) można wyznaczyć:

$$\hat{b}_1 = \frac{s_{14}\hat{E}_0(1 - 2s_{13}^2\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3)}{1 - s_{13}^2\hat{\gamma}_3(\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2)}. \tag{4}$$

Wyrażenie (4) możemy przedstawić w postaci szeregu zbieżnego do sumy wyrażonej zależnością (4) pod warunkiem, że $|\hat{\gamma}_i| < 1$ oraz $s_{jk} < 1$

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 = {} & s_{14}\hat{E}_0^2 + s_{13}^2 s_{14}\hat{E}_0\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_3 - s_{13}^2 s_{14}\hat{E}_0^2\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3 + \\ & + s_{13}^4 s_{14}\hat{E}_0\hat{\gamma}_1^2\hat{\gamma}_3^2 - s_{13}^4 s_{14}E_0\hat{\gamma}_2^2\hat{\gamma}_3^2 + \\ & + s_{13}^6 s_{14}\hat{E}_0^3\hat{\gamma}_1^3\hat{\gamma}_3^3 - s_{13}^6 s_{14}E_0^1\hat{\gamma}_2^3\hat{\gamma}_3^3 + \\ & + s_{13}^6 s_{14}\hat{E}_0\hat{\gamma}_1^2\gamma_2\gamma_3^3 - s_{13}^6 s_{14}E_0\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2^2\hat{\gamma}_3^3 + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

Wyrazy tego szeregu mają prostą interpretację fizyczną — są to fale dochodzące do ramienia *1* bezpośrednio z generatora, po dwu odbiciach,

czterech, sześciu, ośmiu itd. Wystarczająco dobrą aproksymację uzyskamy uwzględniając pierwsze trzy wyrazy tego szeregu. Przy założeniu harmonicznej zależności czasowej:

$$\hat{E}_0 = E_0 e^{j\omega t}$$

oraz

$$\hat{\gamma}_1 = |\gamma_1| e^{j2\beta l_1}$$
$$\hat{\gamma}_2 = |\gamma_2| e^{j(2\beta l_2' + \delta)},$$
$$\hat{\gamma}_3 = m \cos \omega_p t \, e^{j2\beta l_3},$$

gdzie:

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_f}$ — stała fazowa,
λ_f — długość fali w falowodzie,
δ — przesunięcie fazy fali odbitej od rezonatora,
ω — pulsacja częstotliwości mikrofalowej,
ω_p — pulsacja częstotliwości modulującej (pomocniczej),
l_i — długość i-tego ramienia magicznego T,
m — głębokość modulacji.

Część rzeczywista $\hat{b}_1$ wynosi:

$$Re(\hat{b}_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos \omega t - \frac{\sqrt{2}}{4} E_0 m |\gamma_2| \cos \omega_p t \cos [\omega t + \delta + 2\beta(l_2 + l_3)]$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{4} E_0 |\gamma_1| m \cos \omega_p t \cos [\omega t + 2\beta(l_1 + l_3)]. \tag{6}$$

Przyjmijmy dla uproszczenia następujące założenia:
— dioda mieszająca jest dopasowana (czyli $|\gamma_1| = 0$)
— $2\beta(l_2 + l_3) = 2n\pi; \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots,$

wtedy napięcie w.cz. na diodzie mieszającej wynosi:

$$E_B = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos \omega t - \frac{\sqrt{2}}{4} E_0 m |\gamma_2| \cos \omega_p t \cos (\omega t + \delta) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos \omega t - \frac{\sqrt{2}}{8} E_0 m |\gamma_2| \{\cos [(\omega + \omega_p) t + \delta] +$$
$$+ \cos [(\omega - \omega_p) t - \delta]\} \tag{7}$$

Kwadrat obwiedni:

$$\overline{E_B^2} = \frac{E_0^2}{2} \left\{ 1 + \frac{|\gamma_2|^2 m^2}{8} + \frac{|\gamma_2|^2 m^2}{8} \sin 2\omega_p t + \right.$$
$$\left. - \frac{|\gamma_2| m}{2} [\sin (\omega_p t + \delta) - \sin (\omega_p t - \delta)] \right\}. \tag{8}$$