

głych symetrycznych funkcji okresowych:

$$y(t) = -y\left(t + \frac{T}{2}\right) = 2\operatorname{Re} \sum_{n=1,3,5,\dots} y_n e^{jn\omega t} \quad (5.10)$$

z normą $\|y\| = \sup_t |y(t)|$.

Lemat: Operacja liniowa

$$[Ay](t) = \int_0^\infty y(t-\tau) d\gamma(\tau), \quad \operatorname{Var}_{[0,\infty)} \gamma < \infty, \quad (5.11)$$

rozpatrywana jako przekształcenie przestrzeni C_{ST} w siebie, może być przedstawiona w postaci:

$$[Ay](t) = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} y(t-\tau) d\kappa_T(\tau),$$

gdzie $\kappa_T(\tau) = 2\operatorname{Re} \sum_{n=1,3,5,\dots} K(jn\omega) \frac{e^{jn\omega\tau}}{jn\omega}$. Norma operacji przyjmuje wartość:

$$\|A\|_{ST} = \frac{2}{T} \operatorname{Var}_{[0,T/2)} \kappa_T(\tau). \quad (5.12)$$

Dowód. Dla funkcji o postaci (5.10) mamy

$$y_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} y(\tau) e^{-jn\tau} d\tau, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots,$$

i stąd:

$$\begin{aligned} [Ay](t) &= 2\operatorname{Re} \sum_{n=1,3,5,\dots} y_n K(jn\omega) e^{jn\omega t} = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} y(\tau) 2\operatorname{Re} \sum_{n=1,3,5,\dots} K(jn\omega) e^{jn\omega(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} y(t-\tau) d\kappa_T(\tau). \end{aligned}$$

Równość (5.12) wynika bezpośrednio z własności całki Stieltjesa, c.n.d.

Bez zmniejszenia ogólności rozważań można przyjąć, że $\gamma(\tau)$ jest funkcją lewostronnie ciągłą i $\gamma(0) = 0$. Rozkładając całkę (5.11) na sumę całek w przedziałach $\left[\frac{nT}{2}, \frac{(n+1)T}{2}\right)$ i korzystając z symetrii funkcji $y(t)$, łatwo pokazać, że zachodzi równość:

$$\kappa_T(\tau) = \frac{T}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\gamma\left(\tau + \frac{nT}{2}\right) - \gamma\left(\frac{nT}{2}\right) \right]. \quad (5.13)$$

Ponieważ norma operacji (5.11) odwzorowującej przestrzeń $C(-\infty, \infty)$ w siebie wynosi $Var \gamma$, a przestrzeń C_{ST} może być rozpatrywana jako podprzestrzeń przestrzeni $C_{[0, \infty)}(-\infty, \infty)$, więc zachodzi oszacowanie:

$$\|A\|_{ST} \leq Var \gamma. \quad (5.14)$$

Ponadto dla absolutnie ciągłych funkcji $\kappa_T(\tau)$ zachodzi oszacowanie:

$$\|A\|_{ST} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left| \frac{d\kappa_T(\tau)}{d\tau} \right| d\tau \leq \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left| \frac{d\kappa_T(\tau)}{d\tau} \right|^2 d\tau} = \sqrt{2 \sum_{n=1,3,5,\dots} |K(jn\omega)|^2}. \quad (5.15)$$

Oszacowania (5.14) i (5.15) są czasami wygodniejsze w zastosowaniach od dokładnego wzoru (5.12).

5.3. Oznaczmy przez $\varepsilon(t)$ funkcję okresową

$$\varepsilon_T(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=3,5,7,\dots} \left| \frac{1}{n} K(jn\omega) \right| \sin(n\omega t + \arg K(jn\omega)) \quad (5.16)$$

i przez $\Phi(v)$ zespoloną funkcję zmiennej zespolonej v :

$$\Phi(v) = \frac{v}{K(j\omega)} - 3v(|v|^2 + z|v|e^{-3j\arg v} + 2z^2). \quad (5.17)$$

Założmy, że liczba $a \neq 0$, spełniająca równanie $\Phi(a) = 0$, jest punktem regularnym przekształcenia Φ (to znaczy, że $|a|^2 \neq \operatorname{Re} \frac{1}{3K(j\omega)} - \frac{3}{2}z^2$).

Oznaczmy przez $y_\varepsilon(t)$ funkcję o postaci

$$y_\varepsilon(t) = \sum_{n=3,5,7,\dots} 2|y_n| \cos(n\omega t + \arg y_n). \quad (5.18)$$

Twierdzenie 7. Niech r i h będą ustalonymi liczbami dodatnimi. Warunkiem wystarczającym istnienia okresowego rozwiązania równania (5.1) mającego postać

$$y(t) = 2|y_1| \cos(\omega t + \arg y_1) + y_\varepsilon(t)$$

i spełniającego warunki

$$2|y_1 - a| < r \quad \sup_t |y_\varepsilon(t)| \leq h \quad (5.19)$$

jest spełnienie następujących dwóch nierówności:

$$|\Phi(v)| > 0 \quad \text{dla} \quad 0 < 2|v - a| \leq r \quad (5.20)$$

i

$$Var \varepsilon_T(t) < \min \left\{ \frac{h}{S^3}, \frac{1}{3S^2}, \frac{2}{3S^5} \min_{2|v-a|=r} |\Phi(v)| \right\}, \quad (5.21)$$

gdzie $S \triangleq 2|a| + 2z + r + h$.

D o w ó d. Będziemy korzystać z twierdzenia 4 przyjmując, że $X = Y = C_{ST}$ jest przestrzenią zdefiniowaną w rozdz. 5.2, a $P(X)$ jest podprzestrzenią funkcji o postaci: $[Py](t) = y_1 e^{j\omega t} + \bar{y}_1 e^{-j\omega t}$ (lub izometryczną z nią przestrzenią liczb zespolonych) z normą $\|Py\| = 2|y_1| = \sup |[Py](t)|$.

Przekształcenie $\Phi(v)$ określone wzorem (3.7) jest identyczne z funkcją (5.17) i $\|\Phi\| = 2|\Phi|$, (gdzie $|\Phi|$ oznacza moduł liczby zespolonej Φ), a $v^* = y^*(t) = 2|a|\cos(\omega t + \arg a)$.

Operacja $(I-P)A$ ma postać:

$$[(I-P)Ay](t) = \int_0^{T/2} y(t-\tau) d\varepsilon_T(\tau) \quad \text{ i } \quad \|(I-P)A\| = \text{Var}_{[0, T/2)} \varepsilon_T(t).$$

Operacja $[Gy](t) \triangleq (y(t) + 2z \cos 3\omega t)^3$ spełnia w kuli $\|y - y^*\| \leq \varrho$ warunek Lipschitza ze stałą:

$$\varrho(\varrho) = 3(2z + 2|a| + \varrho)^2, \quad \text{ a ponadto } M(r, h) = (2z + 2|a| + r + h)^3.$$

Warunek (3.10) przyjmuje postać (5.21) i zgodnie z twierdzeniem 4 istnieje w przestrzeni C_{ST} rozwiązanie równania (5.1) spełniające warunki (5.19), c.n.d.

5.4. Przykład: Przyjmijmy, że $r \leq |a| + z$ i połóżmy

$$h = \frac{1}{24(|a| + z)^2} \min_{2|v-a|=r} |\Phi(v)| \leq |a| + z.$$

Jeżeli skorzystamy z oszacowania (5.15) i dokonamy pewnych uproszczeń w prawej stronie nierówności (5.21), to z twierdzenia 7 można wyprowadzić następujący wniosek.

Wystarczającym warunkiem istnienia drgań subharmonicznych (o okresie $T = \frac{2\pi}{\omega}$) w układzie opisanym równaniem (5.1) jest spełnienie nierówności:

$$|\Phi(v)| > 0 \quad \text{ dla } \quad 0 < 2|v-a| \leq r,$$

gdzie $r \leq |a| + z$ i a jest punktem regularnym przekształcenia Φ , oraz nierówności

$$\frac{3}{\sqrt{2}} [4(|a| + z)]^5 \sqrt{\sum_{n=3,5,7,\dots} |K(jn\omega)|^2} < \min_{2|v-a|=r} |\Phi(v)| < 24(|a| + z)^3.$$

5.5 Z otrzymanych powyżej rezultatów można między innymi wyprowadzić wniosek dla drgań subharmonicznych (o okresie 2π) opisanych równaniami¹⁾:

$$\text{Duffinga:} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \beta^2 x + \gamma x^3 = \varepsilon \cos 3t$$

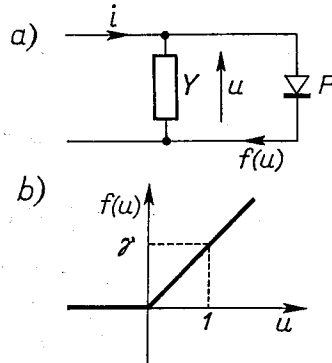
$$\text{i Van der Pola:} \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt} + x = \delta \cos 3t.$$

¹⁾ Porównać z wynikami uzyskanymi w [8], §7.3 i §12.5.

6. PROSTOWNIK JEDNOKIERUNKOWY

6.1. Rozpatrzmy obwód elektryczny przedstawiony na rys. 5, gdzie $i(t) = 2J \cos \omega t$ jest danym prądem, a $u(t)$ — nieznanym napięciem, Y jest dwójnikiem liniowym stacjonarnym o admitancji $Y(s) = 1/Z(s)$, a F jest prostownikiem, dla którego zależność pomiędzy prądem $f(u)$ i napięciem u określona jest wzorem

$$f(u) = \gamma \max \{0, u\}, \quad \gamma > 0. \quad (6.1)$$



Rys. 5. Schemat układu opisanego równaniem (6.3—6.4)

Będziemy poszukiwać funkcji $u(t)$ w postaci:

$$u(t) = v_0 + 2|v_1| \cos(\omega t + \arg v_1) + \sum_{n=2}^{\infty} 2|w_n| \cos(n\omega t + \arg w_n). \quad (6.2)$$

Równania układu przyjmą wtedy postać:

$$\left. \begin{aligned} Y(0)v_0 + f_0(v_0, v_1, w_2, w_3, \dots) &= 0, \\ -J + Y(j\omega)v_1 + f_1(v_0, v_1, w_2, w_3, \dots) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

$$w_n = -Z(jn\omega)f_n(v_0, v_1, w_2, w_3, \dots), \quad n = 2, 3, 4, 5, \dots, \quad (6.4)$$

gdzie $f_n(v_0, v_1, w_2, w_3, \dots)$ są współczynnikami Fouriera funkcji $f[u(t)]$ zależnymi od wszystkich współczynników Fouriera funkcji $u(t)$. Załóżmy, że $Y(0) > 0$.

6.2. Jeżeli liczby a_0, a_1 spełniają układ równań:

$$\left. \begin{aligned} Y(0)a_0 + f_0(a_0, a_1, 0, 0, 0, \dots) &= 0, \\ -J + Y(j\omega)a_1 + f_1(a_0, a_1, 0, 0, 0, \dots) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

to funkcję

$$u^*(t) = a_0 + 2|a_1| \cos(\omega t + \arg a_1) \quad (6.6)$$

będziemy nazywać przybliżonym rozwiązaniem równań (6.3 — 6.4).

Rozkładając funkcję $f[a_0 + 2|a_1| \cos(\omega t + \arg a_1)]$ w szereg Fouriera, łatwo sprawdzić, że

$$f_0(a_0, a_1, 0, 0, 0, \dots) = \gamma \frac{a_0}{\pi} (\Theta - \operatorname{tg} \Theta), \quad \text{gdzie} \quad \cos \Theta = -\frac{a}{2|a_1|} \quad (6.7)$$

$$f_1(a_0, a_1, 0, 0, 0, \dots) = \gamma \frac{a_1}{2\pi} (\Theta - \sin \Theta).$$

Rozwiązanie równań (6.5) sprowadza się jedynie do znalezienia Θ z równania:

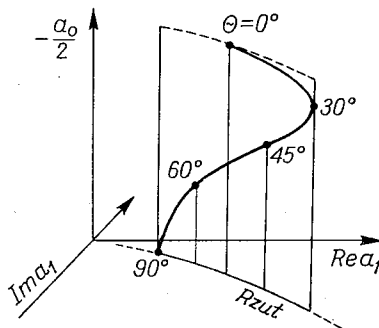
$$\operatorname{tg} \Theta - \Theta = \pi Y(0)/\gamma.$$

Znajomość Θ pozwala na obliczenie a_1 i a_0 ze wzorów:

$$a_1 = J \frac{Z(j\omega)}{1 + \frac{\gamma}{2\pi} (\Theta - \sin 2\Theta) Z(j\omega)}, \quad a_0 = -2|a_1| \cos \Theta. \quad (6.8)$$

Ponieważ liczby $Y(0)$, γ są dodatnie, to $0 < \Theta < \pi/2$ i układ równań (6.5) ma dokładnie jedno rozwiązanie $\{a_0, \operatorname{Re} a_1, \operatorname{Im} a_1\}$, które jest punktem regularnym przekształcenia określonego przez lewą stronę równań (6.5). Zależność rozwiązania $\{a_0, \operatorname{Re} a_1, \operatorname{Im} a_1\}$ od kąta Θ pokazano na rys. 6.

$$\text{Jeżeli } \gamma \gg Y(0), \quad \text{to} \quad \Theta \approx \sqrt[3]{3\pi Y(0)/\gamma}.$$



Rys. 6. Rozwiązanie równań (6.5) jako funkcja parametru θ

6.3. Korzystając z twierdzenia 3 określimy warunki, przy których dokładne rozwiązanie $u(t)$ równań (6.3–6.4) mieści się w danym z góry otoczeniu przybliżonego rozwiązania (6.6). Niech otoczenie to będzie określone układem nierówności:

$$\left. \begin{aligned} a_0 - \varrho_1 < v_0 < a_0 + \varrho_2 < 0 \\ 0 < |a_1| - \varrho_3 < |v_1| < |a_1| + \varrho_4 \\ \arg a_1 - \beta_1 < \arg v_1 < \arg a_1 + \beta_2 \end{aligned} \right\} \equiv \text{obszar } D' \quad (6.9)$$

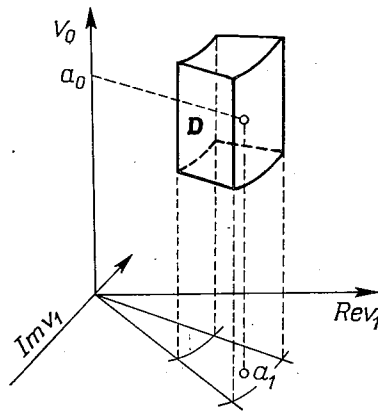
$$\sqrt{2 \sum_{n=2}^{\infty} |w_n|^2} \leq h, \quad (6.10)$$

w których ϱ_i , β_i , h są założonymi liczbami dodatnimi (rys. 7) określającymi odchylenie składowej stałej amplitudy i fazy pierwszej harmonicznej oraz wartości skutecznej pozostałych harmonicznych.

Niech L będzie brzegiem obszaru D . Korzystając z metod numerycznych można bez trudu obliczyć (lub oszacować od dołu) wielkość:

$$\inf_L \|\Phi(v, \theta)\| \triangleq \min_{v_0, v_1 \in L} \left[v_0^2 \left(Y(0) + \gamma \frac{\psi - \operatorname{tg} \psi}{\pi} \right)^2 + 2 \left| v_1 \left(Y(jv_1) + \gamma \frac{\psi - \sin 2\psi}{2\pi} \right) - J \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (6.11)$$

gdzie $\cos \psi = -\frac{v_0}{2|v_1|}$.



Rys. 7. Rysunek obszaru określonego przez (6.9)

Twierdzenie 8. Jeżeli zachodzi nierówność:

$$\gamma^2 \sup_{n=2,3,4,\dots} |Z(jn\omega)| < \frac{1}{\sqrt{(a_0 - \varrho_1)^2 + 2(|a_1| + \varrho_4)^2 + h^2}} \min\{\gamma h, \inf_L \|\Phi(v, \theta)\|\}, \quad (6.12)$$

to dla dokładnego rozwiązania $u(t)$ [wzór (6.2)] równań (6.3–6.4) zachodzą oszacowania (6.9–6.10).

D o w ó d. Wprowadźmy następujące oznaczenia: lewą stronę równań (6.3) oznaczmy przez $\Phi(v, w)$, a prawą stronę równania (6.4) przez $F(v, w)$, gdzie $v = \{v_0, \operatorname{Re} v_1, \operatorname{Im} v_1\}$,

$w = \{w_2, w_3, w_4, \dots\}$. Niech W będzie kulą: $\|w\| = \sqrt{2 \sum_{n=2}^{\infty} |w_n|^2} \leq h$ w przestrzeni Banacha

l^2 o środku w zerze θ i promieniu h . Załóżmy, że wektory v i $\varphi = \Phi(v, w)$ należą do trójwymiarowej rzeczywistej przestrzeni E^3 , w której wektor $\varphi = \{\varphi_0, \operatorname{Re} \varphi_1, \operatorname{Im} \varphi_1\}$ ma długość $\|\varphi\| = \sqrt{\varphi_0^2 + 2|\varphi_1|^2}$. Jeżeli przez $v^* = \{a_0, \operatorname{Re} a_1, \operatorname{Im} a_1\}$ oznaczmy rozwiązanie równań (6.5), to do układu równań (6.3–6.4) można bezpośrednio stosować twierdzenie 3.

Z oszacowania:

$$\begin{aligned} \|F(v, w)\| &\leq \sup_{n=2,3,4,\dots} |Z(jn\omega)| \sqrt{2 \sum_{n=2}^{\infty} |f_n(v_0, v_1, w_2, w_3, \dots)|^2} \leq \\ &\leq \sup |Z(jn\omega)| \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f[u(t)]|^2 dt} \leq \\ &\leq \gamma \sup |Z(jn\omega)| \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |u(t)|^2 dt} = \\ &= \gamma \sup |Z(jn\omega)| \sqrt{v_0^2 + 2|v_1|^2 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} |w_n|^2} \end{aligned}$$

wynika, że jeżeli $v = \{v_0, \operatorname{Re} v_1, \operatorname{Im} v_1\} \in \bar{D}$, $w \in W$, i jeżeli

$$\gamma \sup_{n=2,3,4,\dots} |Z(jn\omega)| \sqrt{(a_0 - \varrho_1)^2 + 2(|a_1| + \varrho_4)^2 + h^2} \leq h, \quad (6.13)$$

to wartości operacji $F(v, w)$ należą również do W .

Ponadto operacja F jest ciągła względem obu zmiennych i spełnia warunek Lipschitza:

$$\|F(v, w_\alpha) - F(v, w_\beta)\| \leq \gamma \sup_{n=2,3,4,\dots} |Z(jn\omega)| \cdot \|w_\alpha - w_\beta\|$$

ze stałą mniejszą od jedności.

Jeżeli przez $w(v)$ oznaczymy rozwiązanie równania (6.4), to dla przekształcenia $\Phi(v, w)$ otrzymamy:

$$\|\Phi(v, w(v)) - \Phi(v, 0)\| \leq \gamma \|w(v)\|,$$

a dla wszystkich $v \in \bar{D}$ wyrażenie $\|w(v)\|$ jest nie większe od lewej strony nierówności (6.13).

Zgodnie z twierdzeniem 3 [i w szczególności z warunkiem (3.4)] nierówność (6.12) jest wystarczającym warunkiem istnienia rozwiązania $\{v_0, v_1, w_2, w_3, w_4, \dots\}$ układu równań (6.3—6.4) spełniającego nierówności (6.9—6.10), c.n.d.

7. UKŁAD AUTONOMICZNY Z NIELINIOWOŚCIĄ TYPU $f(x, \dot{x})$

Rozpatrzmy równanie różniczkowo-całkowe:

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^t f[x(\tau), \dot{x}(\tau)] k(t-\tau) d\tau, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (7.1)$$

gdzie $k \in L(0, \infty)$, a funkcja f spełnia warunek Lipschitza

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + \beta^2 |y_1 - y_2|^2},$$

(gdzie $\beta \geq 0$), dla wszystkich $x_1, x_2, y_1, y_2 \in (-\infty, \infty)$. Ponadto $f(0, 0) = 0$.

Będziemy interesować się wyłącznie okresowymi rozwiązaniami równania (7.1) bliskimi w pewnym sensie „drganiom sinusoidalnym”.

7.1. Prawa strona równania (7.1) może być przedstawiona w postaci:

$$[Fx](t) = \int_0^{\infty} f[x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)]k(\tau)d\tau$$

i jest operacją stacjonarną, to znaczy operacją spełniającą tożsamość:

$$[Fx(\tau+t_0)](t-t_0) \equiv [Fx(\tau)](t) \quad \text{dla dowolnego } t_0. \quad (7.2)$$

Operacja stacjonarna przekształca funkcje okresowe (o dowolnym okresie t_0) w funkcje okresowe o tym samym okresie. Jeżeli F jest operacją stacjonarną, a funkcja $x(t)$ jest rozwiązaniem równania $x = Fx$, to dla dowolnego t_0 funkcja $x(t+t_0)$ jest również rozwiązaniem tego równania.

Aby uniknąć trudności związanych z wieloznacznością rozwiązania, można bez zmniejszenia ogólności rozważań ograniczyć się do poszukiwania okresowych rozwiązań równania (7.1) wśród funkcji o postaci:

$$x(t) = x_0 + 2x_1 \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} 2|x_n| \cos(n\omega t + \arg x_n), \quad (7.3)$$

gdzie $x_1 > 0$, $\omega > 0$. Jest to równoznaczne z założeniem, że rozpoczynamy liczyć czas od chwili, w której faza pierwszej harmonicznej jest równa zeru. Jeżeli podstawimy następnie $(t - t_0)$ zamiast t , to otrzymamy pozostałe rozwiązania.

Równanie (7.1) można zastąpić układem równań, w którym niewiadomymi są wszystkie współczynniki Fouriera $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ funkcji (7.3) i podstawowa częstotliwość ω . Układ ten przyjmuje postać:

$$x_n = K(jn\omega)f_n(\omega; x_0, x_1, x_2, \dots), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (7.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_n(\omega; x_0, x_1, x_2, \dots) &= \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t), \dot{x}(t)] e^{-jn\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\sum_p x_p e^{jp\tau}, j\omega \sum_p p x_p e^{jp\tau}\right) e^{-jn\tau} d\tau, \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad x_{-p} = \bar{x}_p, \quad \text{i gdzie} \quad K(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} k(\tau) d\tau.$$

W równaniu (7.4), zmienne $x_2, x_3, x_4, \dots$ są liczbami zespolonymi, a ω, x_0, x_1 — rzeczywistymi.

7.2. Zgodnie z metodą pierwszej harmonicznej przybliżonym rozwiązaniem równania (7.1) będziemy nazywać funkcję:

$$x^*(t) = 2a \cos \Omega t, \quad a > 0, \quad \Omega > 0, \quad (7.6)$$

pod warunkiem, że liczby Ω, a , spełniają równanie:

$$a = K(j\Omega)f_1(\Omega, 0, a, 0, 0, \dots). \quad (7.7)$$

Dla konkretnie danej funkcji $f(x, \dot{x})$ można obliczyć tzw. funkcję opisującą:

$$f_1(\Omega, 0; a, 0, 0, 0, \dots) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[2a \cos \tau, -2a\Omega \sin \tau] e^{-j\tau} d\tau$$

i rozwiązać równanie (7.7).

Jeżeli funkcja $f(x, \dot{x}) = g(x)$ zależy tylko od pierwszej zmiennej ($\beta = 0$), to:

$$f_1(\Omega, 0, a, 0, 0, 0, \dots) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g[2a \cos \tau] \cos \tau d\tau$$

jest funkcją rzeczywistą i nie zależy od Ω . Wówczas równanie (7.7) sprowadzi się do dwóch równań niezależnych:

$$\operatorname{Im} K(j\Omega) = 0, \quad \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi} g[2a \cos \tau] \cos \tau d\tau = \frac{1}{|K(j\Omega)|}. \quad (7.8)$$

Znalezienie przybliżonej amplitudy $2a$ i przybliżonej częstotliwości Ω swobodnych drgań okresowych nie przedstawia wtedy żadnej trudności.

7.3. Oszacowanie dokładności metody pierwszej harmonicznej poprzedzimy zbadaniem podstawowych własności operacji określonych przez prawą stronę równania (7.4).

Oznaczmy przez Y przestrzeń Banacha ciągów liczbowych $\xi = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ z normą:

$$\|\xi\|_Y = \sqrt{x_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\xi(\tau)|^2 d\tau}, \quad (7.9)$$

gdzie $\xi(\tau) = x_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cos(n\tau + \arg x_n)$, a przez X — przestrzeń Banacha ciągów liczbowych ξ z normą:

$$\|\xi\|_X = \sqrt{x_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \beta^2 \omega_{\max}^2 n^2) |x_n|^2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(|\xi(\tau)|^2 + \beta^2 \omega_{\max}^2 \left| \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} \right|^2 \right) d\tau}, \quad (7.10)$$

gdzie β i $\omega_{\max}$ są ustalonymi liczbami.

Zbadamy własności operacji $f = f(\omega, \xi)$ określonej wzorem (7.5) na przestrzeni X i przyjmującej wartości w przestrzeni Y .

Dla wszystkich $0 < \omega < \omega_{\max}$ operacja f spełnia warunek Lipschitza:

$$\begin{aligned} \|f(\omega, \xi^1) - f(\omega, \xi^2)\|_Y &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi^1(\tau), \omega \dot{\xi}^1(\tau)) - f(\xi^2(\tau), \omega \dot{\xi}^2(\tau))|^2 d\tau} \leq \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|\xi^1(\tau) - \xi^2(\tau)|^2 + \beta^2 \omega^2 |\dot{\xi}^1(\tau) - \dot{\xi}^2(\tau)|^2) d\tau} \leq \|\xi^1 - \xi^2\|_X \end{aligned} \quad (7.11)$$

względem ξ , a również warunek Lipschitza względem ω :

$$\|f(\omega^1, \xi) - f(\omega^2, \xi)\|_Y \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta^2 |\omega_1 - \omega_2|^2 |\dot{\xi}(\tau)|^2 d\tau} \leq \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_{\max}} \|\xi\|_X.$$

7.4. Rozpatrzmy teraz operację addytywną A_ω określoną na przestrzeni Y równościami:

$$z_0 = K(0)x_0, \quad z_1 = 0, \quad z_n = K(jn\omega)x_n \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

i przyjmując wartości w przestrzeni X . Oszacujemy normę $\|A_\omega\|_{Y \rightarrow X}$ operacji A_ω dla $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$:

$$\begin{aligned} \|A_\omega \xi\|_X &= \sqrt{|K(0)x_0|^2 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (1 + \beta^2 \omega_{\max}^2 n^2) |K(jn\omega)x_n|^2} \leq \\ &\leq \sup_{n \neq 1} \sqrt{1 + \beta^2 \omega_{\max}^2 n^2} |K(jn\omega)| \cdot \sqrt{x_0^2 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2} \leq \\ &\leq \sup_{\omega=0, \omega > 2\omega_{\min}} |(1 + j\beta\lambda\omega)K(j\omega)| \|\xi\|_Y, \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}. \quad (7.12) \end{aligned}$$

Jeżeli normy $\|A_\omega\|_{Y \rightarrow X}$ są wspólnie ograniczone dla $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ (przez stałą M), to operacja A_ω jest w tym przedziale ciągła względem ω . Istotnie, dla każdego $\varepsilon > 0$ można dobrać takie N , że dla danego $\xi \in Y$ norma elementu $\xi_N = \{0, 0, \dots, 0, x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}$ jest mniejsza od $\varepsilon/4M$. Wobec tego:

$$\begin{aligned} \|A_{\omega_1} \xi - A_{\omega_2} \xi\|_X &\leq \|A_{\omega_1}(\xi - \xi_N) - A_{\omega_2}(\xi - \xi_N)\| + (\|A_{\omega_1}\| + \|A_{\omega_2}\|) \|\xi_N\|_Y \leq \\ &\leq \sqrt{2 \sum_{n=2}^{N-1} (1 + \beta^2 \omega_{\max}^2 n^2) |K(jn\omega_1) - K(jn\omega_2)|^2 |x_n|^2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Z założenia $k \in L(0, \infty)$ wynika jednostajna ciągłość funkcji $K(j\omega)$. Wobec tego dla dostatecznie małych $|\omega_1 - \omega_2|$ mamy $\sup_{n < N} |K(jn\omega_1) - K(jn\omega_2)| \leq \varepsilon/2 \|\xi\|_Y (1 + \beta\omega_{\max}N)$ i w konsekwencji $\|A_{\omega_1} \xi - A_{\omega_2} \xi\| < \varepsilon$, co dowodzi ciągłości operacji A_ω względem ω .

7.5. Oznaczmy przez L brzeg prostokąta $\bar{D}$ określonego nierównościami $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$, $r \leq x_1 \leq R$, gdzie $\omega_{\min} > 0$, $r > 0$, położonego w płaszczyźnie ω, x_1 i zawierającego w swym wnętrzu punkt (Ω, a) będący rozwiązaniem równania (7.7). Załóżmy, że funkcja zespolona:

$$\varphi(\omega, x_1) = \frac{x_1}{K(j\omega)} - f_1(\omega; 0, x_1, 0, 0, 0, \dots) \quad (7.13)$$

jest różna od zera we wszystkich punktach prostokąta $\bar{D}$ z wyjątkiem punktu (Ω, a) , który jest regularnym punktem przekształcenia φ .

Twierdzenie 9. Niech h będzie ustaloną liczbą dodatnią. Jeżeli zachodzi nierówność:

$$\sup_{\omega=0, \omega \geq 2\omega_{\min}} |(1+j\beta\lambda\omega)K(j\omega)| < \frac{\min\{h, \min_{\omega, x_1 \in L} |\varphi(\omega, x_1)|\}}{\sqrt{h^2 + 2(1+\beta^2\omega_{\max}^2)R^2}}, \quad (7.14)$$

to równanie (7.1) ma okresowe rozwiązanie o postaci (7.3), dla którego zachodzą nierówności:

$$\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}, \quad r < x_1 < R, \quad (7.15)$$

oraz:

$$\sqrt{x_0^2 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (1 + \beta^2 \omega_{\max}^2 n^2) |x_n|^2} \leq h \quad (7.16)$$

D o w ó d. Przepiszmy równanie (7.4) w postaci układu dwu równań:

$$\frac{x_1}{K(j\omega)} - f_1(\omega; x_0, x_1, x_2, \dots) = 0, \quad (7.17)$$

$$x_n = K(jn\omega) f_n(\omega; x_0, x_1, x_2, \dots) \quad \text{dla} \quad n = 0, 2, 3, 4, \dots \quad (7.18)$$

i zastosujmy do nich twierdzenie 3.

Niech $v = \{\omega, x_1\}$ będzie punktem obszaru $\bar{D}$, a $w = \{x_0, 0, x_2, x_3, \dots\}$ elementem kuli W : $\|w\| \leq h$ przestrzeni Banacha X [z normą (7.10)]. Lewą stronę równania (7.17) oznaczmy przez $\Phi(v, w)$, a prawą stronę równania (7.18) przez $F(v, w)$. Funkcja $\Phi(v, w)$ przyjmuje wartości leżące w płaszczyźnie zmiennej zespolonej E^2 , w której normą $\|\Phi\|$ będziemy nazywać moduł $|\Phi|$ liczby zespolonej Φ .

Z oszacowania:

$$\begin{aligned} \|F(v, w)\|_X &\leq \|A\|_{Y \rightarrow X} \|f(\omega, \xi)\|_Y \leq \|A\|_{Y \rightarrow X} \|\xi\|_X \leq \\ &\leq \|A\|_{Y \rightarrow X} \cdot \sqrt{2(1 + \beta^2 \omega_{\max}^2) |x_1|^2 + \|w\|_X^2}, \end{aligned}$$

z nierówności:

$$\|F(v, w_1) - F(v, w_2)\|_X \leq \|A\|_{Y \rightarrow X} \|w_1 - w_2\|_X$$

oraz z (7.12) wynika, że jeżeli

$$\sup_{\omega=0, \omega \geq 2\omega_{\min}} |(1+j\beta\lambda\omega)K(j\omega)| \cdot \sqrt{2(1 + \beta^2 \omega_{\max}^2) R^2 + h^2} \leq h, \quad (7.19)$$

to operacja F jest jednostajnie ze względu na $v \in \bar{D}$ zwążająca w zupełnej przestrzeni metrycznej W . Ponadto operacja F jako złożenie operacji A i f jest operacją ciągłą względem $v = \{\omega, x_1\}$ dla $v \in \bar{D}$.

Jeżeli przez $w(v)$ oznaczmy rozwiązanie równania (7.18), to dla $v \in \bar{D}$ dostajemy oszacowanie:

$$\begin{aligned} |\Phi(v, w(v)) - \Phi(v, \theta)| &= |f_1(\omega, x_0(v), x_1, x_2(v), x_3(v), \dots) + \\ &- f_1(\omega, 0, x_1, 0, 0, \dots)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f(\omega, \xi) - f(\omega, \xi - w(v))\|_Y \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|w(v)\|_X, \end{aligned}$$

a $\|w(v)\|_X$ jest nie większe od lewej strony nierówności (7.19). Funkcja $\Phi(v, w)$ jest ciągłą względem obu zmiennych.

Zgodnie z twierdzeniem 3 nierówność (7.14) jest wystarczającym warunkiem istnienia rozwiązania: $\{\omega; x_0, x_1, x_2, \dots\}$ równań (7.17–7.18) spełniającego warunek: $v \in D, w \in W$. Jest to równoznaczne z istnieniem rozwiązania $x(t)$ równania (7.1) spełniającego nierówności (7.15) i (7.16), c.n.d.

7.6. Omówimy jeszcze szczególny przypadek twierdzenia 9. Jeżeli funkcja $f(x, \dot{x}) = g(x)$ zależy tylko od pierwszej zmiennej, to $\beta = 0$ i przestrzenie $X = Y$ są identyczne. Wówczas $\|A\| = \sup_{\omega=0, \omega > 2\omega_{\min}} |K(j\omega)|$ i założenie $k \in L(0, \infty)$ okazuje się niepotrzebne.

Twierdzenie 9 odnosi się w tym przypadku również do równania:

$$x(t) = \int_0^{\infty} g[x(t-\tau)] d\gamma(\tau), \quad \text{gdzie} \quad \text{Var } \gamma < \infty \quad [0, \infty)$$

z całką Stieltjesa, a funkcja $K(j\omega)$ ma postać $K(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\gamma(\tau)$.

7.7 Jeżeli funkcja f jest symetryczna:

$$f(x, y) = -f(-x, -y) \quad \text{i jeżeli} \quad x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right) = 2\text{Re} \sum_{n=1,3,5,\dots} x_n e^{jn\omega t}$$

jest okresową funkcją mającą tylko nieparzyste harmoniczne, to funkcja $f[x(t), \dot{x}(t)]$ ma również tylko nieparzyste harmoniczne. Równanie (7.1) można wówczas rozpatrywać w przestrzeni symetrycznych funkcji okresowych: $x(t) = -x\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right)$ podobnie jak w rozdz. 4.4. Twierdzenie 9 pozostaje prawdziwe, jeżeli lewą stronę nierówności (7.14) zastąpić przez:

$$\sup_{\omega > 3\omega_{\min}} |(1 + j\beta\lambda\omega)K(j\omega)|$$

i w (7.16) położyć $x_0 = x_2 = x_4 = \dots = 0$.

8. UKŁAD Z PRZELĄCZNIKIEM

Dotychczas rozpatrywaliśmy wyłącznie równania, w których funkcja $f(x)$ [lub $f(x, \dot{x})$] spełnia warunek Lipschitza. Rozpatrzmy teraz przykład układu, w którym element nieliniowy ma nieciągłą charakterystykę.

8.1. Będziemy poszukiwać okresowego symetrycznego rozwiązania:

$$x(t) = -x\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) = 2 \sum_{n=1,3,5,\dots} |x_n| \cos(n\omega t + \arg x_n) \quad (8.1)$$

równania całkowego

$$x(t) = \int_0^{\infty} \text{sign}[x(t-\tau)] k(\tau) d\tau + 2z \cos \omega t, \quad z > 0, \quad (8.2)$$

gdzie $k \in L(0, \infty)$.

Równanie (8.2) można sprowadzić do równania z całką rozciągniętą na przedział o długości równej połowie okresu. Postępując podobnie jak w rozdz. 5.2 łatwo pokazać, że dla funkcji $x(t)$ o postaci (8.1) zachodzi tożsamość:

$$\int_0^{\infty} x(t-\tau)k(\tau)d\tau = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t-\tau) \left[2\operatorname{Re} \sum_{n=1,3,5,\dots} K(jn\omega) e^{jn\omega t} \right] d\tau. \quad (8.3)$$

Jeśli ponadto wprowadzimy oznaczenie $x\left(\frac{t}{\omega}\right) = y(t)$, to równanie (8.2) sprowadzi się do:

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sign}[y(\tau)] \gamma_{\omega}(t-\tau) d\tau + 2z \cos t, \quad z > 0, \quad (8.4)$$

gdzie:

$$\gamma_{\omega}(t) = 2\operatorname{Re} \sum_{n=1,3,5,\dots} K(jn\omega) e^{jnt}. \quad (8.5)$$

8.2. Zgodnie z metodą pierwszej harmonicznej funkcję

$$x^*(t) = 2|a| \cos(\omega t + \arg a) \quad [\text{lub} \quad y^*(t) = 2|a| \cos(t + \arg a)] \quad (8.6)$$

będziemy nazywać przybliżonym rozwiązaniem równania (8.2) [lub (8.4)], pod warunkiem, że liczba zespolona a spełnia równanie

$$a = K(j\omega)u(a) + z, \quad (8.7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} u(a) &= \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{sign}[2|a| \cos(\omega t + \arg a)] e^{-j\omega t} dt = \\ &= e^{j\arg a} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sign}[\cos \tau] e^{-j\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} e^{j\arg a}. \end{aligned}$$

Równanie (8.7) przyjmuje więc postać:

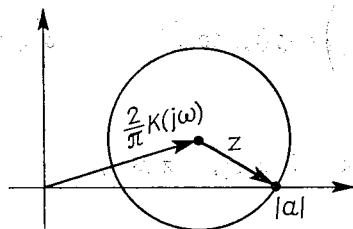
$$|a| = \frac{2}{\pi} K(j\omega) + ze^{-j\arg a}. \quad (8.8)$$

Na rys. 8 przedstawiono graficzną metodę rozwiązywania równania (8.8), a na rys. 9 zależność modułu rozwiązania od parametrów z i $K(j\omega)$.

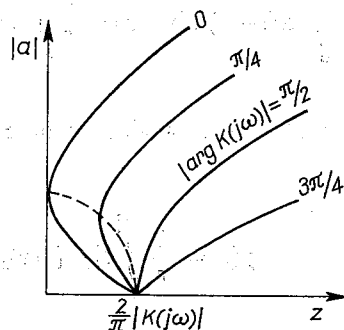
8.3. Dla uzasadnienia otrzymanego wyniku nie można bezpośrednio stosować twierdzenia 6, ponieważ funkcja $f(y) = \operatorname{sign} y$ jest nieciągła. Jednakże w odpowiednio dobranej przestrzeni funkcyjnej operacja określona przez prawą stronę równania (8.4) jest ciągła, a nawet spełnia warunek Lipschitza w otoczeniu funkcji $y^*(t) = 2|a| \cos(t + \arg a)$ będącej przybliżonym rozwiązaniem równania (8.4).

Niech $Lip_{2\pi}$ i $L_{2\pi}$ będą przestrzeniami Banacha symetrycznych funkcji okresowych o postaci:

$$y(t) = 2 \sum_{n=1,3,5,\dots} |x_n| \cos(nt + \arg x_n) \quad (8.9)$$



Rys. 8. Konstrukcja rozwiązania równania (8.8)



Rys. 9. Wykres zależności (8.8)

odpowiednio z normami:

$$\|y\|_{Lip} = \max \left\{ \sup_t |y(t)|, \sup_{t_1, t_2} \left| \frac{y(t_1) - y(t_2)}{t_1 - t_2} \right| \right\} \quad (8.10)$$

i

$$\|u\|_L = \frac{1}{2} \int_0^\pi |u(t)| dt. \quad (8.11)$$

L e m a t 1. Operacja $[Gy](t) = \text{sign } y(t)$ rozpatrywana jako przekształcenie przestrzeni $Lip_{2\pi}$ w przestrzeni $L_{2\pi}$ spełnia w kuli $\|y - y_0\|_{Lip} \leq \varrho$, gdzie $y_0 = b \cos t$, warunek Lipschitza:

$$\|Gy_1 - Gy_2\|_L \leq \frac{1}{\sqrt{b^2 - 9\varrho^2} - \varrho} \|y_1 - y_2\|_{Lip} \quad \text{dla} \quad \varrho < \frac{|b|}{\sqrt{10}}. \quad (8.12)$$

D o w ó d. Jeżeli $\|y_i - y_0\|_{Lip} \leq \varrho$ dla $i = 1, 2$, to $\|y_1 - y_2\|_{Lip} \leq 2\varrho$. Oznaczmy przez $M(2\varrho)$ taki przedział zawarty w odcinku $t \in [0, \pi]$, w którym jednocześnie $|y_1(t)| \leq 2\varrho$ i $|y_2(t)| \leq 2\varrho$. Z nierówności:

$$|y_i(t) - b \cos t| \leq \varrho \quad \text{i} \quad \left| \frac{y_i(t_1) - y_i(t_2)}{t_1 - t_2} - b \frac{\cos t_1 - \cos t_2}{t_1 - t_2} \right| \leq \varrho$$

wynika, że dla t, t_1, t_2 należących do $M(2\varrho)$ mamy

$$|\cos t| \leq \frac{3\varrho}{b} \quad \text{i stąd:} \quad \alpha_i(t_1, t_2) \triangleq - \frac{y_i(t_1) - y_i(t_2)}{t_1 - t_2} \geq \sqrt{b^2 - 9\varrho^2} - \varrho.$$

Dla $\varrho < \frac{|b|}{\sqrt{10}}$ obie funkcje $y_1(t)$ i $y_2(t)$ są malejące w przedziale $M(2\varrho)$. Dla $t \in [0, \pi] \setminus M(2\varrho)$ obie funkcje mają ten sam znak i $y_1(0) > 0, y_2(0) > 0, y_1(\pi) < 0, y_2(\pi) < 0$. Wobec tego każda z funkcji $y_1(t), y_2(t)$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe w przedziale

$M(2q)$. Oznaczmy je odpowiednio przez t' i t'' . Odległość pomiędzy t' i t'' może być oszacowana przez:

$$|t' - t''| \leq \frac{\sup_{[0, \pi]} |y_1(t) - y_2(t)|}{\min_{i=1,2} \left\{ \min_{t_1, t_2 \in M(2q)} |\alpha_i(t_1, t_2)| \right\}} \leq \frac{\|y_1 - y_2\|_{Lip}}{\sqrt{b^2 - 9q^2 - q}}.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\|Gy_1 - Gy_2\| = -\frac{1}{2} \int_0^T |\text{sign } y_1(t) - \text{sign } y_2(t)| dt = |t' - t''| \leq \frac{\|y_1 - y_2\|_{Lip}}{\sqrt{b^2 - 9q^2 - q}}, \text{ c.n.d.}$$

Lemat 1 pozostaje prawdziwy, jeżeli funkcję $y_0(t)$ zastąpić przez $y(t) = b \cos(t + \alpha)$ dla dowolnego α .

8.4. Zajmiemy się teraz zbadaniem własności operacji liniowej:

$$[Au](t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(\tau) \gamma_\omega(t - \tau) d\tau \quad (8.13)$$

przekształcającej przestrzeń $L_{2\pi}$ w przestrzeń $Lip_{2\pi}$.

L e m a t 2. Norma operacji A wyraża się wzorem

$$\|A\|_{L \rightarrow Lip} = \frac{2}{\pi} \max \left\{ \sup_t |\gamma_\omega(t)|, \sup_{t_1, t_2} \left| \frac{\gamma_\omega(t_1) - \gamma_\omega(t_2)}{t_1 - t_2} \right| \right\}. \quad (8.14)$$

D o w ó d.

$$\begin{aligned} \|Au\|_{Lip} &= \frac{1}{\pi} \max \left\{ \sup_t \left| \int_0^\pi u(\tau) \gamma_\omega(t - \tau) d\tau \right|, \sup_{t_1, t_2} \left| \int_0^\pi u(\tau) \frac{\gamma_\omega(t_1 - \tau) - \gamma_\omega(t_2 - \tau)}{t_1 - t_2} d\tau \right| \right\} \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \max \left\{ \sup_t |\gamma_\omega(t)|, \sup_{t_1, t_2} \left| \frac{\gamma_\omega(t_1) - \gamma_\omega(t_2)}{t_1 - t_2} \right| \right\} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi |u(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $\|A\|_{L \rightarrow Lip}$ jest nie większa od prawej strony nierówności (8.14). Nie trudno również pokazać, że zachodzi równość (8.14), c.n.d.

Z równości (8.5) wynika oszacowanie:

$$\|A\|_{L \rightarrow Lip} \leq \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} |nK(jn\omega)|. \quad (8.15)$$

Operacja $A = A_\omega$ określona wzorem (8.13) zależy oczywiście od parametru ω .

L e m a t 3. Jeżeli $\max_{\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}} \|A_\omega\|_{L \rightarrow Lip} = M < \infty$ (gdzie $\omega_{\min} > 0$, $\omega_{\max} < \infty$),

to operacja A_ω jest ciągła względem ω dla $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$.

D o w ó d. Zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa, dla dowolnej funkcji $u \in L_{2\pi}$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje w $L_{2\pi}$ wielomian trygonometryczny:

$$w(t) = 2\text{Re} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{N(\varepsilon)} w_m e^{jmt} \quad \text{taki, że} \quad \|u - w\|_L < \frac{\varepsilon}{4M},$$

stąd:

$$\|A_{\omega_1}u - A_{\omega_2}u\|_{Lip} \leq \|A_{\omega_1}w - A_{\omega_2}w\|_{Lip} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponieważ:

$$[A_{\omega}w](t) = 2\operatorname{Re} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{N(\varepsilon)} w_m K(jm\omega) e^{jmt},$$

więc:

$$\begin{aligned} \|A_{\omega_1}w - A_{\omega_2}w\|_{Lip} &\leq \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{N(\varepsilon)} m |K(jm\omega_1) - K(jm\omega_2)| \cdot \|w\|_L \\ &\leq \frac{2}{\pi} (N+1)^2 \|w\|_L \cdot \sup_{|\Omega_1 - \Omega_2| \leq N|\omega_1 - \omega_2|} |K(j\Omega_1) - K(j\Omega_2)|. \end{aligned}$$

Z jednostajnej ciągłości funkcji $K(j\omega)$ wynika, że prawa strona ostatniej nierówności będzie mniejsza od $\varepsilon/2$ dla dostatecznie małych $|\omega_1 - \omega_2|$, co dowodzi ciągłości operacji A_{ω} .

8.5. W oparciu o lematy 1 i 2 można sformułować twierdzenie, z którego wynika uzasadnienie rezultatów otrzymanych metodą pierwszej harmonicznej.

Twierdzenie 10. Załóżmy, że $z \neq \frac{2}{\pi} |\operatorname{Re} K(j\omega)|$. Niech r i h będą ustalonymi liczbami dodatnimi takimi, że $r+h < \frac{2|a|}{\sqrt{10}}$, gdzie a jest rozwiązaniem równania (8.7).

Jeżeli zachodzą nierówności

$$\Phi(v) \triangleq \left| \frac{v-z}{K(j\omega)} - \frac{2}{\pi} e^{j\arg v} \right| > 0 \quad \text{dla} \quad 0 < 2|v-a| \leq r \quad (8.16)$$

i

$$\|QA\| < \min \left[\frac{2h}{\pi}, (\sqrt{|2a|^2 - 9(r+h)^2} - r - h) \cdot \min \left\{ 1, \frac{4}{\pi} \min_{2|v-a|=r} |\Phi(v)| \right\} \right], \quad (8.17)$$

gdzie

$$\|QA\| = \frac{2}{\pi} \max \left\{ \sup_t |\varepsilon_{\omega}(t)|, \sup_{t_1, t_2} \left| \frac{\varepsilon_{\omega}(t_1) - \varepsilon_{\omega}(t_2)}{t_1 - t_2} \right| \right\}, \quad (8.18)$$

$$\varepsilon_{\omega}(t) = 2\operatorname{Re} \sum_{n=3,5,7,\dots} K(jn\omega) e^{jnt}, \quad (8.19)$$

to równanie (8.2) ma rozwiązanie o postaci (8.1) i zachodzą oszacowania:

$$2|x_1 - a| < r, \quad \left\| 2 \sum_{n=3,5,7,\dots} |x_n| \cos(n\omega t + \arg x_n) \right\|_{Lip} \leq h. \quad (8.20)$$

Dowód. Skorzystamy z twierdzenia 4 przyjmując, że $X = Lip_{2\pi}$, $Y = L_{2\pi}$, a $P(X) = P(Y)$ jest przestrzenią funkcji o postaci $[Py](t) = 2|x_1| \cos(t + \arg x_1)$ z normą $\|Py\|_{Lip} = \|Py\|_L = 2|x_1|$. Przestrzeń $P(X) = P(Y)$ jest zatem izometryczna z przestrzenią liczb zespolonych x_1 , przy czym $\|x_1\| = 2|x_1|$.

Operacje PA i QA mają odpowiednio postać:

$$[PAy](t) = K(j\omega)x_1 e^{jt} + K(-j\omega)\bar{x}_1 e^{-jt} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y(\tau) [2\operatorname{Re} K(j\omega) e^{j(t-\tau)}] d\tau,$$

$$[QAy](t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y(\tau) \varepsilon_{\omega}(t-\tau) d\tau,$$

gdzie $\varepsilon_{\omega}(t)$ jest określone wzorem (8.19). Zgodnie z lematem 2 norma QA ma postać (8.18).

Występujące w twierdzeniu 4 przekształcenie Φ ma postać funkcji zmiennej zespolonej:

$$\Phi(v) = \frac{v-z}{K(j\omega)} - u(v) = \frac{v-z}{K(j\omega)} - \frac{2}{\pi} e^{j\arg v}$$

i nierówność (8.16) jest odpowiednikiem (3.9). Założenie $z \neq \frac{2}{\pi} |\operatorname{Re} K(j\omega)|$ gwarantuje,

że liczba zespolona a jest punktem regularnym przekształcenia Φ .

Zgodnie z lematem 1: $q(\varrho) = (\sqrt{|2a|^2 - 9\varrho^2} - \varrho)^{-1}$, a ponadto

$$M(r, h) \leq \max_{\|z\|_{Lip} \leq \infty} \times \|\operatorname{sign} z(t)\|_L = \frac{\pi}{2}.$$

Nierówność (8.17) jest więc odpowiednikiem (3.10) i z twierdzenia 4 wynika istnienie rozwiązania równania (8.2) o własnościach (8.20), c.n.d.

8.6. Przykład: Zażądamy, aby błąd metody pierwszej harmonicznej dla równania (8.2) był mniejszy od 10%, to znaczy, że dla dokładnego rozwiązania $x(t)$ zachodzi nierówność:

$$\max_t |x(t) - 2|a| \cos(\omega t + \arg a)| \leq 0,1 \cdot 2|a|.$$

Kładąc $r+h = 0,2|a|$ oraz $r = 2|a|\varrho$, możemy nierówność (8.17) zastąpić silniejszym, ale łatwiejszym do sprawdzenia warunkiem istnienia $0 < \varrho < 0,1$, dla którego:

$$\frac{1}{|a|} \sum_{n=3,5,7,\dots} |nK(jn\omega)| \leq \min \left\{ (0,1-\varrho), \frac{17}{5} \min_{\left|1-\frac{v}{a}\right|=\varrho} \left| \frac{v-z}{K(j\omega)} - \frac{2}{\pi} e^{j\arg v} \right| \right\}.$$

8.7. W przypadku $z = 0$ prawa strona równania (8.2) jest operacją stacjonarną. Poszukujemy wówczas rozwiązania w postaci:

$$x(t) = 2x_1 \cos \omega t + w(\omega t), \quad \text{gdzie} \quad w(\tau) = 2 \sum_{n=3,5,7,\dots} |x_n| \cos(n\tau + \arg x_n) \quad (8.21)$$

i gdzie x_1, ω są nieznanymi liczbami dodatnimi, a $x_3, x_5, x_7, \dots$ nieznanymi liczbami zespolonymi.

Metoda pierwszej harmonicznej daje przybliżone rozwiązanie o postaci:

$$x^*(t) = 2a \cos \Omega t, \quad \text{gdzie} \quad a = \frac{2}{\pi} |K(j\Omega)| \quad (8.22)$$

i gdzie Ω jest rozwiązaniem równania: $\operatorname{Im} K(j\Omega) = 0$.

Oznaczmy przez L brzeg prostokąta $\bar{D}$ określonego nierównościami $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$, $r \leq x_1 \leq R$, gdzie $\omega_{\min} > 0$, $r > 0$, położonego w płaszczyźnie ω, x_1 i zawierającego wewnątrz punkt (Ω, a) .

Niech

$$\varphi(\omega, x_1) \triangleq \frac{x_1}{K(j\omega)} - \frac{2}{\pi}$$

będzie funkcją zespoloną określoną w $\bar{D}$, a h — ustaloną liczbą dodatnią.

Twierdzenie 11. Załóżmy, że funkcja $\operatorname{Im} K(j\omega)$ ma w przedziale $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ tylko jeden punkt zerowy $\omega = \Omega$ i $\frac{d}{d\omega} \operatorname{Im} K(j\omega)|_{\omega=\Omega} \neq 0$.

Jeżeli zachodzi nierówność:

$$\max_{\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}} \|QA\| < \min \left[\frac{2h}{\pi}, S(r, R, h) \cdot \min \left\{ 1, \min_{\omega, x_1 \in L} |\varphi(\omega, x_1)| \right\} \right], \quad (8.23)$$

gdzie $S(r, R, h) \triangleq \sqrt{(R+r)^2 - 9(R-r+h)^2} - (R-r+h)$,
to równanie

$$x(t) = \int_0^\infty \operatorname{sign} x(t-\tau) k(\tau) d\tau \quad (8.24)$$

ma okresowe rozwiązanie o postaci (8.21) i

$$\omega \in (\omega_{\min}, \omega_{\max}), \quad x_1 \in (r, R), \quad \|w(\tau)\|_{Lip} \leq h. \quad (8.25)$$

D o w ó d. Wobec tożsamości (8.3) równanie (8.24) można przepisać w postaci układu równań:

$$\frac{x_1}{K(j\omega)} - u(x_1, w) = 0, \quad \text{gdzie} \quad u(x_1, w) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sign}(2x_1 \cos t + w(t)) e^{-jt} dt, \quad (8.26)$$

$$w(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sign}(2x_1 \cos \tau + w(\tau)) \varepsilon_\omega(t-\tau) d\tau. \quad (8.27)$$

Skorzystamy z twierdzenia 3. Oznaczmy przez $Q(Lip_{2\pi})$ przestrzeń funkcji $w(\tau)$ o postaci (8.21) (z normą przestrzeni $Lip_{2\pi}$). Dla $v \triangleq \{\omega, x_1\} \in \bar{D}$ i $\|w\| \leq h$, gdzie $w \in Q(Lip_{2\pi})$, operacja $F(v, w)$ określona przez prawą stronę (8.27) przyjmuje wartości leżące w kuli $\|F(v, w)\|_{Lip} \leq \frac{\pi}{2} \sup_\omega \|QA\|$ przestrzeni $Q(Lip_{2\pi})$ i zgodnie z lematem 1 spełnia warunek Lipschitza ze stałą:

$$\sup_\omega \|QA\| \cdot [\sqrt{(R+r)^2 - 9(R-r+h)^2} - (R-r+h)].$$

Jeżeli zatem

$$\frac{\pi}{2} \sup_\omega \|QA\| \leq h \quad \text{i} \quad \sup_\omega \|QA\| \cdot \frac{1}{S(r, R, h)} < 1, \quad (8.28)$$

to $F(v, w)$ jest operacją jednostajnie zwiężającą w kuli $\|w\| \leq h$ przestrzeni $Q(Lip_{2\pi})$ i rozwiązanie $w = w(v)$ równania (8.27) spełnia nierówność $\|w\| \leq \frac{\pi}{2} \sup_{\omega} \|QA\|$.

Operacja $\Phi(v, w)$ określona na zbiorze $v \in \bar{D}$, $\|w\| \leq h$ przez lewą stronę równania (8.26) przyjmuje wartości w zbiorze liczb zespolonych, a ponadto $\Phi(v, \theta) \equiv \varphi(\omega, x_1)$.

Jeżeli $w(v)$ jest rozwiązaniem równania (8.27), to zachodzi oszacowanie:

$$\begin{aligned} |\Phi(v, w) - \Phi(v, \theta)| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\pi} (\text{sign}[2x_1 \cos t + w(t)] - \text{sign}[2x_1 \cos t]) e^{-it} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \frac{1}{S(r, R, h)} \|w\|_{Lip} \leq \sup_{\omega} \|QA\| \frac{1}{S(r, R, h)}. \end{aligned}$$

Nierówność:

$$\sup_{\omega} \|QA\| < S(r, R, h) \cdot \min_{\omega, x_1 \in L} |\varphi(\omega, x_1)| \quad (8.29)$$

jest więc odpowiednikiem warunku (3.4), a założenie (8.23) jest równoważne z (8.28—8.29).

Założenia twierdzenia 11 dotyczące funkcji $Im K(j\omega)$ gwarantują, że (Ω, a) jest jedynym i regularnym punktem zerowym przekształcenia $\varphi(\omega, x_1)$ w prostokącie $\bar{D}$.

Jeśli $S(r, R, h) > 0$ i $\sup_{\omega} \|QA\| < \infty$, to zgodnie z lematami 1 i 3 operacje $\Phi(v, w)$ i $F(v, w)$ są ciągłe względem obu zmiennych dla $v \in \bar{D}$ i $\|w\| \leq h$. Z twierdzenia 3 wynika więc istnienie rozwiązania układu równań (8.26—8.27) w zbiorze $v \in D$, $\|w\| \leq h$, gdzie $w \in Q(Lip_{2\pi})$, co jest równoznaczne z istnieniem rozwiązania równania (8.24) spełniającego warunki (8.25), c.n.d.

DODATEK: ROTACJA PÓŁ WEKTOROWYCH¹⁾

1. Niech D będzie pewnym obszarem n -wymiarowej przestrzeni E^n . Załóżmy, że ciągle przekształcenie Φ odwzorowuje domknięcie $\bar{D}$ obszaru D w pewien zbiór przestrzeni E^1 . Inaczej mówiąc, na zbiorze $\bar{D}$ określone jest ciągle pole wektorowe Φ , które każdemu punktowi $v \in \bar{D}$ przyporządkowuje n -wymiarowy wektor $\Phi(v)$.

Punkt v_0 , dla którego $\Phi(v_0) = 0$, nazywamy punktem osobliwym pola wektorowego Φ . W punkcie osobliwym pole wektorowe nie ma określonego kierunku.

Założmy, że przekształcenie Φ jest różniczkowalne w sposób ciągły w otoczeniu punktu osobliwego v_0 i jacobian $J(\Phi, v_0)$ przekształcenia Φ w punkcie v_0 jest różny od zera. Punkt v_0 nazywamy wówczas regularnym punktem osobliwym pola Φ . Regularne punkty osobliwe są odosobnione, a Φ jest homeomorfizmem²⁾ otoczenia regularnego punktu osobliwego w otoczenie zera. Liczbę $\text{sign } J(\Phi, v_0)$ nazywamy indeksem regularnego punktu osobliwego v_0 (lub stopniem odwzorowania Φ otoczenia punktu v_0 w otoczenie zera) i oznaczamy symbolem $\text{ind}\{v_0, \Phi\}$. Jeśli $J(\Phi, v_0) \neq 0$, to indeks punktu v_0 wynosi 1 lub -1 .

Założmy, że przekształcenie Φ nie ma punktów osobliwych na brzegu L obszaru D , a w obszarze D istnieje tylko skończona ilość punktów osobliwych:

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_r$$

i wszystkie są regularne. Sumę indeksów

$$\gamma(\Phi, L) = \sum_{i=0}^r \text{sign } J(\Phi, v_i)$$

¹⁾ opracowane na podstawie § 5 książki [7].

²⁾ —odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym i wzajemnie ciągłym.

nazywamy rotacją pola wektorowego Φ na brzegu L obszaru D (lub stopniem odwzorowania obszaru D w otoczenie punktu zerowego). Jeżeli pole Φ nie ma w $\bar{D}$ punktów osobiwych, to przyjmujemy, że rotacja $\gamma(\Phi, L)$ jest równa zeru.

Liczba $\gamma(\Phi, L)$ jest liczbą całkowitą, dodatnią, ujemną lub zerem. Nie zależy ona od deformacji obszaru D pod warunkiem, że w obszarze D pozostają te same punkty osobiwe, i nie zależy od małych zmian pola wektorowego Φ , o ile tylko jakobiany przekształcenia Φ w punktach osobiwych zachowują swoje znaki.

2. Pojęcie rotacji pola wektorowego może być uogólnione na pola ciągłe (nie różniczkowalne), które na brzegu L obszaru D nie mają punktów osobiwych. Uogólnienie to opiera się na dwóch twierdzeniach. Po pierwsze, każde pole ciągłe w $\bar{D}$ i bez punktów osobiwych na brzegu L obszaru D można z dowolną dokładnością jednostajnie przybliżać przez pola różniczkowalne w sposób ciągły i mające tylko regularne punkty osobiwe. Po drugie, rotacje wszystkich różniczkowalnych pól wektorowych, dostatecznie bliskich polu Φ , są jednakowe. Tę wspólną rotację przybliżających pól wektorowych nazywamy rotacją ciągłego pola wektorowego Φ .

Jeśli na przykład ciągłe pole Φ odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie otoczenie punktu osobiwego v_0 w otoczenie zera, to rotacja pola Φ na granicy obszaru obejmującego tylko ten jeden punkt osobiwy (indeks punktu v_0) wynosi 1 lub -1 . Punkt taki będziemy również nazywać regularnym punktem osobiwym pola Φ .

3. Niech teraz ciągłe pole $\tilde{\Phi}$ bez punktów osobiwych na L będzie dane jedynie na brzegu L obszaru D . Ciągłe pole Φ określone na $\bar{D}$ i pokrywające się z polem $\tilde{\Phi}$ na brzegu L będziemy nazywać przedłużeniem pola $\tilde{\Phi}$. Istnieją takie przedłużenia Φ , które mają w D tylko regularne punkty osobiwe. Okazuje się, że suma indeksów tych punktów jest niezależna od sposobu przedłużania pola $\tilde{\Phi}$. Wobec tego rotacja $\gamma(\Phi, L)$ ciągłego pola wektorowego Φ na brzegu obszaru D zależy tylko od zachowania się tego pola na brzegu L obszaru D (co dotąd było sugerowane tylko nazwą).

4. Niech Φ_0 i Φ_1 będą dwoma polami wektorowymi ciągłymi w $\bar{D}$ i nie mającymi punktów osobiwych na brzegu L obszaru D . Deformacją pola Φ_0 w pole Φ_1 będziemy nazywać funkcję wektorową $\Phi(\lambda, v)$ ciągłą względem obu zmiennych dla $0 \leq \lambda \leq 1$, $v \in L$, i taką, że:

$$\Phi(0, v) = \Phi_0(v) \quad \text{i} \quad \Phi(1, v) = \Phi_1(v) \quad \text{dla} \quad v \in L.$$

Jeżeli funkcja $\Phi(\lambda, v)$ jest różna od zera we wszystkich punktach zbioru $\lambda \in [0, 1]$ i $v \in L$, to deformację nazywamy nieosobiwą.

Dwa pola wektorowe Φ_0 i Φ_1 nazywamy homotopijnymi na L , jeżeli można je połączyć nieosobiwą deformacją $\Phi(\lambda, v)$.

Homotopijne pola wektorowe mają te same rotacje.

Przy pewnych dodatkowych założeniach dotyczących obszaru D prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne. Jeżeli na brzegu kuli (lub obszaru homeomorficznego z kulą) dwa pola wektorowe mają tę samą rotację, to są homotopijne.

Rotacja pola Φ na brzegu kuli charakteryzuje więc całą rodzinę ciągłych pól, z których każde dwa można połączyć nieosobiwą deformacją. Deformacja taka nie może łączyć pól o różnych rotacjach.

Ważnym zadaniem jest zbadanie, czy dane pole wektorowe Φ jest homotopijne z jakimś innym dobrze znanym polem wektorowym. Podstawowym twierdzeniem ułatwiającym to zadanie jest:

Twierdzenie 1 (Rouché). Niech $\Phi(v)$ i $\varphi(v)$ będą ciągłymi polami wektorowymi określonymi w domknięciu $\bar{D}$ obszaru D i niech pole Φ nie ma punktów osobiwych na brzegu L obszaru D . Jeżeli dla wszystkich punktów brzegu zachodzi nierówność

$$\|\Phi(v)\| > \|\varphi(v)\| \quad \text{dla} \quad v \in L,$$

gdzie symbol $\|\varphi\|$ oznacza długość wektora φ , to pola $\Phi(v)$ i $\Phi(v) + \varphi(v)$ są homotopijne na brzegu L .

Dla dowodu wystarczy rozpatrzyć deformację $\Phi(\lambda, v) = \Phi(v) + \lambda\varphi(v)$ i nierówność $\|\Phi(\lambda, v)\| \geq \|\Phi(v)\| - \lambda\|\varphi(v)\| > 0$, spełnioną dla $v \in L$ i $0 \leq \lambda \leq 1$.

5. Pojęcia homotopii i rotacji pól wektorowych odgrywają podstawową rolę w twierdzeniach o istnieniu rozwiązań równań nieliniowych. Bezpośrednio z określenia rotacji wynika następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e 2. Jeżeli pole wektorowe $\Phi(v)$ ciągłe w domkniętym obszarze $\bar{D}$ i nie mające punktów osobiwych na brzegu obszaru D posiada rotację $\gamma(\Phi, L)$ różną od zera, to w obszarze D istnieje co najmniej jeden punkt osobiwy pola Φ , czyli co najmniej jedno rozwiązanie równania $\Phi(v) = 0$.

Z twierdzeń 1 i 2 można wyprowadzić wiele wniosków dotyczących istnienia rozwiązań równań w skończonej wymiarowej przestrzeni. Podamy dwa przykłady.

T w i e r d z e n i e 3 (porównawcze). Załóżmy, że pole wektorowe $\Phi(v)$ ciągłe w $\bar{D}$ i różne od zera na brzegu L ma w obszarze D tylko regularne punkty osobiwe: $v_1, v_2, v_3, \dots, v_r$ i suma indeksów tych punktów jest różna od zera. Jeżeli $\varphi(v)$ jest polem wektorowym ciągłym w $\bar{D}$ i jeżeli $\|\varphi(v)\| < \|\Phi(v)\|$ dla wszystkich $v \in L$, to równanie $\Phi(v) + \varphi(v) = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w obszarze D .

Dowód wynika bezpośrednio z zależności

$$\gamma(\Phi + \varphi, L) = \gamma(\Phi, L) = \sum_{i=1}^r \text{ind}\{v_i, \Phi\} \neq 0$$

i z twierdzenia 2.

Szczególnym przypadkiem twierdzenia porównawczego (dla $r = 1$) jest twierdzenie podane w rozdz. 2.2. Innym nietrywialnym wnioskiem z twierdzeń 1 i 2 jest sławne twierdzenie Brouwera.

T w i e r d z e n i e 4 (Brouwer). Jeżeli ciągłe przekształcenie Φ odwzorowuje kulę $\|v\| \leq 1$ n -wymiarowej przestrzeni w siebie, to istnieje w tej kuli co najmniej jedno rozwiązanie równania $v = \Phi(v)$.

D o w ó d. Załóżmy, że na sferze $\|v\| = 1$ równanie $v = \Phi(v)$ nie ma rozwiązań (w przeciwnym przypadku twierdzenie zachodzi bez żadnych dodatkowych założeń). Wówczas pole wektorowe $v - \Phi(v)$ nie ma punktów osobiwych na brzegu kuli. Z założenia $\|\Phi(v)\| \leq 1$ dla $\|v\| = 1$ wynika, że ciągła deformacja $\Phi(\lambda, v) = v - \lambda\Phi(v)$ pola $\Phi_0(v) = v$ w pole $\Phi_1 = v - \Phi(v)$ jest nieosobiwa na sferze $\|v\| = 1$. Oba pola są więc homotopijne i

$$\gamma(\Phi_1, L) = \gamma(\Phi_0, L) = 1 \quad \text{na sferze } L \text{ o równaniu } \|v\| = 1.$$

Zgodnie z twierdzeniem 2 istnieje w kuli $\|v\| < 1$ co najmniej jedno rozwiązanie równania $v - \Phi(v) = 0$, c.n.d.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. P. P o p o w, I. P. P a l t o w, Przybliżone metody badań nieliniowych układów automatycznych, WNT, Warszawa 1964 (Oryginał w języku rosyjskim z r. 1960).
2. R. W. B a s s, Mathematical Legitimacy of Equivalent Linearization by Describing Functions, Automatic and Remote Control, London 1961, Ed. J. F. Coales.
3. E. N. R o z e n w a s s i e r, O promienieni integralnych urawnienij k teorii nieliniownych kolebanij, Trudy II Wsiechsojuznogo Sjezda po Tieor. i Prikl. Miechanikie, Wyp. 2, Izd. „Nauka”, Moskwa 1965.
4. I. W. S a n d b e r g, On the Response of Nonlinear Control Systems to Periodic Input Signals, Bell System Techn. J., 43, May 1964.
5. J. K u d r e w i c z, Contribution to the Theory of Describing Function, Proc. of Fourth Conf. on Nonlinear Oscillations, Prague, Sept. 1967. Academia Publ. House, Prague 1968.
6. J. K u d r e w i c z, Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych (w druku), WNT, Warszawa.
7. M. A. K r a s n o s i e l s k i j, Opierator. sdwiga po trajektorijam differencijalnych urawnienij, Izd. „Nauka”, Moskwa 1966.
8. Ch. H a y a s h i, Nonlinear Oscillations in Physical Systems, Mc Graw-Hill Book Comp., 1964 (przekład rosyjski: „Mup”, Moskwa 1968, przekład polski: WNT, Warszawa 1969).
9. A. B i e l e c k i, Równania różniczkowe zwyczajne i pewne ich uogólnienia, Polska Akademia Nauk, Biuro Kształcenia i Doskonalenia Kadr Naukowych, Warszawa 1961.

J. KUDREWICZ

MATHEMATICAL BASIS OF DESCRIBING FUNCTION METHOD

Summary

The investigation of the periodic vibrations in a nonlinear dynamic system can be formulated as a problem of seeking for the Fourier coefficients $x_0, x_1, x_2, \dots$ of the function $x(t)$ which satisfies the equations of the system and possibly of seeking for the period T , provided it is not forced. For example, if the function

$x(t) = \sum_n x_n e^{jn\omega t}$ (where $\omega = \frac{2\pi}{T}$, and $x_{-n} = \bar{x}_n$) satisfies the integral equation:

$$x(t) = \int_0^\infty f[x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)] k(\tau) d\tau + 2z \cos \Omega t \quad (1)$$

then the sequence $\xi = \{\omega, x_0, x_1, x_2, \dots\}$ satisfies the infinity system of equations:

$$x_n = K(jn\omega) f_n(\omega, x_0, x_1, x_2, \dots) + \delta_{nk} z, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

where δ_{nk} is Kronecker delta, $k = \frac{\omega}{\Omega}$ is integer, and

$$f_n(\omega, x_0, x_1, \dots) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left[x\left(\frac{t}{\omega}\right), \dot{x}\left(\frac{t}{\omega}\right)\right] e^{-jnt} dt, \quad K(s) = \int_0^\infty e^{-st} k(t) dt.$$

According to the Describing Function Method the approximate solution of Eq. (2) has the form $\xi^* = \{\omega^*, x_0^*, x_1^*, \dots, x_N^*, 0, 0, 0, \dots\}$, where the unknown coefficients are obtained from the equations:

$$x_n^* = K(jn\omega^*) f_n(\omega^*, x_0^*, x_1^*, \dots, x_N^*, 0, 0, 0, \dots) + \delta_{nk} z, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

(in particular $N = 1$).

Two kinds of systems can be distinguished: a) nonautonomous systems with $z \neq 0$ and $\omega^* = \Omega$ (or $\omega^* = \Omega/k$ where $k = 2, 3, 4, \dots$) and b) autonomous systems with $z = 0$ and $\omega^* \neq \omega$. They differ from each other in properties of solutions.

In the paper, we assume that the solution ξ^* of Eq. (3) is known and we formulate the sufficient conditions of the existence of the solution ξ of Eq. (2) in the given neighborhood of ξ^* . This leads to the new theorems on the existence of periodic solutions in nonlinear systems and to the estimation of the error of describing function method. All the results are based on the comparison theorems given in §3 and proved by using the Rouché theorem and contraction mapping. This method is illustrated by several examples of different kinds of technical systems.

J. KUDREWICZ

LES FONDEMENTS MATHÉMATIQUES DE LA MÉTHODE DE LA LINÉARISATION DES HARMONIQUES

Résumé

La recherche des oscillations périodiques dans les schémas dynamiques non-linéaires peut être formulée comme le problème, qui consiste à trouver la série des coefficients de Fourier $x_0, x_1, x_2, \dots$ de la fonction $x(t)$ satisfaisant l'équation, qui décrit le schéma et éventuellement à trouver la période des oscillations

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ s'il n'est pas forcé. Par exemple, si la fonction $x(t) = \sum_n x_n e^{jn\omega t}$ (ou $x_{-n} = \bar{x}_n$) est la solution de l'équation intégrale

$$x(t) = \int_0^\infty f[x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)]k(\tau) d\tau + 2z \cos \Omega t, \quad (1)$$

la série $\xi = \{\omega, x_0, x_1, x_2, \dots\}$ satisfait le système des équations

$$x_n = K(jn\omega)f_n(\omega, x_0, x_1, x_2, \dots) + \delta_{nk}z, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

ou δ_{nk} c'est le symbole de Kronecker, $k = \frac{\Omega}{\omega}$ c'est le nombre entier et où

$$f_n(\omega, x_0, x_1, \dots) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left[x\left(\frac{t}{\omega}\right), \dot{x}\left(\frac{t}{\omega}\right)\right] e^{-jnt} dt, \quad K(s) = \int_0^\infty e^{-st} k(t) dt.$$

La méthode approximative de résoudre l'équation (2) nommée la méthode de la linéarisation des harmoniques (ou la méthode de la fonction descriptive) consiste à chercher la solution approximative sous la forme $\xi^* = \{\omega^*, x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*, 0, 0, 0, \dots\}$ et à déterminer les inconnues des équations:

$$x_n^* = K(jn\omega^*)f_n(\omega^*, x_0^*, x_1^*, \dots, x_N^*, 0, 0, \dots) + \delta_{nk}z, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Il peut être en particulier $N = 1$.

On distingue les deux cas: a) schémas non-autonomes, quand $z \neq 0$ et $\omega^* = \Omega$ (ou $\omega^* = \Omega/k$, où $k = 2, 3, 4, \dots$) et b) schémas autonomes, quand $z = 0$ et en général $\omega^* \neq \omega$. Ils se distinguent principalement par des particularités des solutions.

On accepte dans l'oeuvre la connaissance de la solution de l'équation (3) et on formule de certaines conditions suffisantes, en cas de lesquelles l'équation (2) a la solution ξ dans l'entourage donné de la solution ξ^* de l'équation (3). De cette façon on obtient de nouveaux théorèmes concernant l'existence des oscillations périodiques, ainsi que l'évaluation de l'erreur de la méthode de la linéarisation des harmoniques. Tous les résultats obtenus s'appuient sur les théorèmes comparatifs formulés dans § 3 et prouvés en utilisant le théorème de Rouché, ainsi que le principe des reproductions contractantes. L'effectivité de la méthode présentée a été illustrée sur quelques exemples de différents types des solutions physiques (§ 4–8).

Я. КУДРЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ЛИНЕАРИЗАЦИИ ГАРМОНИК

Резюме

Поиски периодических колебаний в нелинейных динамических системах можно сформулировать как задание, заключающееся в определении ряда коэффициентов Фурье $x_0, x_1, x_2, \dots$ функции $x(t)$, удовлетворяющей уравнению, описывающему цепь и, возможно, в определении периода колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$, если он не вынужден. Например, если функция $x(t) = \sum_n x_n e^{jn\omega t}$ (где $x_{-n} = \bar{x}_n$) является решением интегрального уравнения

$$x(t) = \int_0^\infty f[x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)]k(\tau) d\tau + 2z \cos \Omega t, \quad (1)$$

то ряд $\xi = \{\omega, x_0, x_1, x_2, \dots\}$ удовлетворяет системе уравнений

$$x_n = K(jn\omega)f_n(\omega, x_0, x_1, x_2, \dots) + \delta_{nk}z, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

где δ_{nk} является символом Кронэкара, $k = \frac{\Omega}{\omega}$ является целым числом и где

$$f_n(\omega, x_0, x_1, \dots) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left[x\left(\frac{t}{\omega}\right), \dot{x}\left(\frac{t}{\omega}\right)\right] e^{-jnt} dt, \quad K(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} k(t) dt,$$

Приближенный метод решения уравнения (2), называемый методом линеаризации гармоник (или методом описывающей функции), заключается в том, что мы ищем приближенное решение в виде $\xi^* = \{\omega^*, x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*, 0, 0, 0, \dots\}$, а неизвестные определяет из уравнений

$$x_n^* = K(jn\omega^*)f_n(\omega^*, x_0^*, x_1^*, \dots, x_N^*, 0, 0, \dots) + \delta_{nk}z, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

В частном случае может быть $N = 1$.

Различают два случая: а) неавтономные системы, когда $z \neq 0$ и $\omega^* = \Omega$ (или $\omega^* = \Omega/k$, где $k = 2, 3, 4, \dots$), а также б) автономные системы, когда $z = 0$ и в общем $\omega^* \neq \omega$. Они отличаются друг от друга в основном свойствами решений.

В работе предполагается что решения уравнения (3) известны и формулируются некоторые достаточные условия, при которых уравнение (2) имеет решение ξ в заданной окрестности решения ξ^* уравнения (3). Таким образом получают новую теорему о существовании периодических колебаний и оценку ошибки метода линеаризации гармоник. Все полученные результаты основаны на сравнительных теоремах, сформулированных в § 3 и доказанных при использовании теоремы Рушэ и принципа сжатых отображений. Эффективность представленного метода была проиллюстрирована несколькими примерами физических систем разных типов (§ 4—8).

Niektóre zagadnienia analizy i syntezy niezawodnościowej układów elektrycznych

JANUSZ MIGDAŁSKI (WARSZAWA)
 Instytut Automatyki PAN

Otrzymano 31.12.1968

Omówiono niektóre zagadnienia związane z analizą i syntezą niezawodnościową prostych oraz złożonych układów elektrycznych, w warunkach pełnej i niepełnej informacji niezawodnościowej o elementach rozważanych układów. Następnie, po wprowadzeniu pojęcia niezawodności lokalnej oraz niezawodności globalnej układu, omówiono metodę niezawodnościowej optymalizacji struktury układu w trakcie jego rozbudowy. Z pojęciem niezawodności lokalnej układu i w konsekwencji z analizą oraz syntezą niezawodnościową lokalną, mamy do czynienia wówczas, kiedy interesuje nas niezawodność układu ze względu na ściśle określony rodzaj elementów układu, np. elementów elektroprzewodzących [1]. Dla ilustracji rozważań przeprowadzono analizę, syntezę oraz optymalizację niezawodnościową układu przełączającego, wykonanego na zestykach magnetycznych, z uwzględnieniem niezawodności jego połączeń elektrycznych.

1. WSTĘP

Układy elektryczne będące przedmiotem badań niezawodnościowych można podzielić na dwie klasy, a mianowicie: układy proste oraz układy złożone. Układem prostym nazywać będziemy każdy układ o szeregowej strukturze niezawodnościowej, natomiast układem złożonym nazywać będziemy każdy układ nie będący układem prostym.

Układy elektryczne, zarówno proste, jak i złożone, mogą być zbudowane z wielu rodzajów (grup) elementów, np. elementów elektroprzewodzących, elektroizolacyjnych, przełączających, opóźniających, pamięciowych itd.

2. ANALIZA I SYNTEZA NIEZAWODNOŚCIOWA UKŁADÓW PROSTYCH

Przyjmijmy, że do wykonania określonego układu elektrycznego niezbędne jest posiadanie r rodzajów elementów o globalnej liczbie elementów

$$N = \sum_{i=1}^r N_i, \quad (1)$$

gdzie N_i jest liczbą elementów i -tego rodzaju niezbędną do wykonania układu.

Jeżeli niezawodności poszczególnych elementów każdego rodzaju są znane i wynoszą odpowiednio

$$p_{ij}(j = 1, 2, \dots, N_i) \quad (2)$$

oraz jeżeli są one niezawodnościowo niezależne, wówczas niezawodność globalna R_N układu N -elementowego dana jest wzorem

$$R_N = R_N \left(N = \sum_{i=1}^r N_i, p_{ij}(j = 1, 2, \dots, N_i) \right) = \prod_{i=1}^r R_{N_i}, \quad (3)$$

gdzie

$$R_{N_i} = \prod_{j=1}^{N_i} p_{ij} \quad (4)$$

jest niezawodnością lokalną¹⁾ układu prostego ze względu na i -ty rodzaj elementów.

W przypadku kiedy elementy każdego rodzaju mają jednakowe niezawodności, tzn. kiedy $p_{ij}(j = 1, 2, \dots, N_i) = p_i$, wówczas

$$R_{N_i} = p_i^{N_i} \quad (5)$$

oraz

$$R_N = \prod_{i=1}^r R_{N_i} = \prod_{i=1}^r p_i^{N_i}. \quad (6)$$

Jeżeli ponadto wszystkie elementy układu będą posiadały jednakową niezawodność $p_i(i = 1, 2, \dots, r) = p$, wówczas

$$R_N = p^{(N_1 + N_2 + \dots + N_r)} = p^N. \quad (7)$$

Z podanych zależności widać, że niezawodność globalna układu prostego maleje w miarę, jak wzrasta liczba potrzebnych do jego realizacji rodzajów elementów oraz liczbą niebędących elementami danego rodzaju. Wynika stąd, że poprawę niezawodności układów prostych, przy danej niezawodności elementów, możemy osiągnąć przez minimalizację liczby rodzajów elementów, a następnie przez redukcję liczby elementów w poszczególnych rodzajach. Warto jeszcze podkreślić, że wyznaczając niezawodności lokalne układu wykrywamy zarazem najbardziej zawodny „łańcuch” układu.

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że mamy pełne informacje niezawodnościowe o układzie i jego elementach. W praktyce jednakże bardzo często mamy do czynienia z sytuacją, kiedy określony rodzaj elementów układu jest niezawodnościowo nieznan. Wówczas zamiast rzeczywistej niezawodności R_N globalnej (lokalnej) układu N -elementowego możemy wyznaczyć jedynie warunkową niezawodność R_{Nw} globalną (lokalną) układu godząc się na popełnienie określonego błędu względnego

$$\delta R_{G(L)} = \frac{R_{Nw} - R_N}{R_N}, \quad (8)$$

¹⁾ W dalszych rozważaniach będziemy rozróżniać niezawodność globalną oraz niezawodność lokalną układu. *Niezawodnością globalną* układu nazywać będziemy jego niezawodność obliczoną przy uwzględnieniu wszystkich elementów układu, natomiast *niezawodnością lokalną układu* nazywać będziemy jego niezawodność obliczoną ze względu na jeden rodzaj elementów. W sposób analogiczny będziemy rozróżniać strukturę globalną oraz strukturę lokalną układu.

mogącego przyjmować wartości

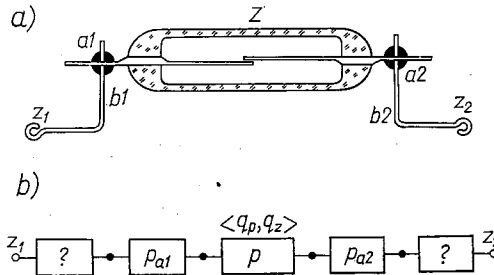
$$0 \leq \delta R_{G(L)} \leq \infty. \quad (9)$$

Przy wyznaczaniu warunkowej niezawodności R_{Nw} globalnej (lokalnej) układu elementy niezawodnościowo nieznane traktujemy jak elementy „całkowicie niezawodne”.

Dla ilustracji rozważań rozpatrzmy następujący

Przykład 1

Należy wyznaczyć niezawodność elektrycznego układu przełączającego wykonanego na zestyku magnetycznym jak na rys. 1, znając niezawodności punktów lutowniczych



Rys. 1. Prosty układ przełączający wykonany na zestyku magnetycznym wraz z odpowiadającą mu strukturą niezawodnościową. Oznaczenia: Z — zestyk, a_1, a_2 — punkty lutownicze, b_1, b_2 — przewody łączące

$p_{a1} = p_{a2} = p_a$ oraz niezawodność p zestyku magnetycznego. Zakłada się, że wszystkie elementy układu przełączającego są niezawodnościowo niezależne.

Układ przełączający z rys. 1 jest układem prostym i odpowiada mu struktura niezawodnościowa jak na rys. 1b. Z treści zadania wynika, że układ zawiera jedynie elementy elektroprzewodzące oraz przełączające, tzn. że $r = 2$.

Gdybyśmy znali niezawodności $p_{b1} = p_{b2} = p_b$ przewodów łączących, wówczas moglibyśmy wyznaczyć rzeczywistą niezawodność R_N globalną układu

$$R_N = R_{N_1} R_{N_2} = p_a^2 p_b^2 p, \quad (10)$$

gdzie

$$R_{N_1} = p_a^2 p_b^2 \quad (11)$$

oraz

$$R_{N_2} = p \quad (12)$$

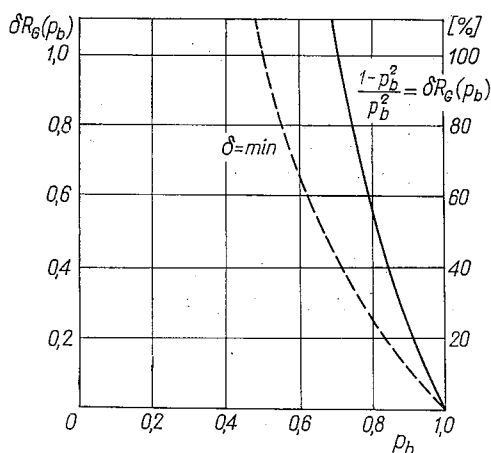
są odpowiednimi niezawodnościami lokalnymi rozpatrywanego układu przełączającego z rys. 1. Przyjmując $p_b = 1$ otrzymujemy warunkową niezawodność R_{Nw} globalną układu

$$R_{Nw} = R_N(p_a, p_b, p | p_b = 1) = p_a^2 p, \quad (13)$$

skąd na podstawie wzoru (8) możemy obliczyć wartość błędu względnego δR_G w zależności od p_b

$$\delta R_G = \delta R_G(p_b) = \frac{1 - p_b^2}{p_b^2} = \delta R_L; \quad (14)$$

wykres błędu δR_G według zależności (14) podano na rys. 2.



Rys. 2. Wykres błędu $\delta R_G(p_b)$ według zależności (14)

3. ANALIZA I SYNTEZA NIEZAWODNOŚCIOWA UKŁADÓW ZŁOŻONYCH

Założmy, że niezawodność globalna R_N prostego układu N -elementowego, zawierającego r -rodzajów elementów, jest niższa od niezawodności R_W wymaganej

$$R_N < R_W. \quad (15)$$

W celu zapewnienia układowi niezawodności R_W dokonajmy jego rozbudowy przez wprowadzenie dodatkowej liczby elementów

$$D = \sum_{i=1}^r D_i, \quad (16)$$

gdzie D_i jest dodatkową liczbą elementów i -tego rodzaju wprowadzoną do układu prostego. Otrzymany układ $N+D$ elementowy jest układem złożonym, a jego niezawodność globalna R_{N+D} jest, w odróżnieniu od układu prostego, funkcją struktury S_{N+D} globalnej układu i równa się iloczynowi niezawodności lokalnych układu złożonego

$$R_{N+D} = R_{N+D}(S_{N+D} : N+D = \sum_{i=1}^r (N_i + D_i), p_{ij}(j = 1, 2, \dots, N_i + D_i)) = \prod_{i=1}^r R_{N_i + D_i}. \quad (17)$$

Niezawodność lokalną $R_{N_k + D_k}$ układu złożonego dla k -tego rodzaju elementów ($k = 1, 2, \dots, r$) wyznacza się przy założeniu, że wszystkie elementy układu złożonego nie należące do k -tej grupy są całkowicie niezawodne

$$R_{N_k + D_k} = R_{N+D}(S_{N+D} : N+D = \sum_{i=1}^r (N_i + D_i), p_{ij}(j = 1, 2, \dots, N_i + D_i)) \Big|_{p_{ij} = 1 \text{ dla } i \neq k} = R_{N_k + D_k}(S_{N_k + D_k} : N_k + D_k, p_{ij}(j = 1, 2, \dots, N_k + D_k)), \quad (18)$$

gdzie, $S_{N_k + D_k}$ jest strukturą lokalną układu złożonego dla k -tego rodzaju elementów.

Chociaż we wzorze (17) na niezawodność globalną układu złożonego otrzymaliśmy iloczyn, nie oznacza to bynajmniej, jak zostanie to pokazane dalej na konkretnym przykładzie, negacji celowości stosowania rezerwy, którą na ogół traktuje się jako rezerwę lokalną układu.

Skoro zdecydowaliśmy się na rozbudowę układu N -elementowego, to powinniśmy ją przeprowadzić w taki sposób, żeby nowy układ $N+D$ elementowy posiadał możliwie największą niezawodność. W tym celu należy z możliwego, dla danego układu, zbioru struktur globalnych układu znaleźć taką strukturę S_{N+D}^* , przy której niezawodność R_{N+D}^* globalna układu $N+D$ elementowego będzie największa

$$R_{N+D}^* = \max_{S_{N+D}} \left\{ R_{N+D} \left(S_{N+D} : N+D = \sum_{i=1}^r (N_i + D_i), p_{ij} (j = 1, 2, \dots, N_i + D_i) \right) \right\} = \\ = \max_{S_{N+D}} \left\{ \prod_{i=1}^r R_{N_i + D_i} \right\}. \quad (19)$$

Jeżeli okaże się, że osiągnięty wzrost niezawodności globalnej układu, nawet przy jego optymalnej strukturze S_{N+D}^* , jest nadal niewystarczający i

$$R_{N+D}^* < R_W, \quad (20)$$

wówczas możemy dokonać następnej rozbudowy układu. W przypadku kiedy dysponujemy dostateczną liczbą elementów, proces rozbudowy, o ile nie pogarsza własności technicznych układu, możemy kontynuować aż do skutku, tzn. do momentu, kiedy

$$R_{N+Z}^* \geq R_W, \quad (21)$$

gdzie Z jest niezbędną i zarazem najmniejszą liczbą elementów potrzebnych do zakończenia rozbudowy układu.

W wielu przypadkach [2] rozbudowa układu, jeżeli jest przeprowadzona bez uprzedniej analizy niezawodnościowej, zamiast poprawić niezawodność układu obniża ją, a więc jest niezawodnościowo chybiona. Ażeby przekonać się, czy zamierzona rozbudowa układu N -elementowego jest niezawodnościowo sensowna, czy też nie, należy przedtem zbadać jej efektywność

$$\gamma = \gamma(R_{N+D}, R_N) = \frac{R_{N+D}}{R_N}, \quad (22)$$

$$0 \leq \gamma(R_{N+D}, R_N) \leq \infty. \quad (23)$$

Oczywiście rozbudowa układu N -elementowego jest sensowna jedynie wówczas, kiedy $\gamma > 1$.

Dla ilustracji rozważań rozpatrzmy następujący

Przykład 2

Chcąc powiększyć niezawodność prostego układu przełączającego z rys. 1 opracowano dwa warianty jego rozbudowy, przedstawione na rys. 3. Należy zbadać efektywność rozbudowy obu układów oraz wybrać do praktycznej realizacji układ niezawodnościowo najlepszy, wiedząc, że niezawodność przewodów łączących jest duża i praktycznie równa

$p_b = 1$. Ponadto wiadomo, że elementy poszczególnych grup mają jednakowe niezawodności.

Ażeby rozwiązać powyższe zagadnienie, wyznaczmy niezawodności lokalne i globalne obu układów.

Dla układu szeregowego, o strukturze niezawodnościowej jak na rys. 3a, mamy

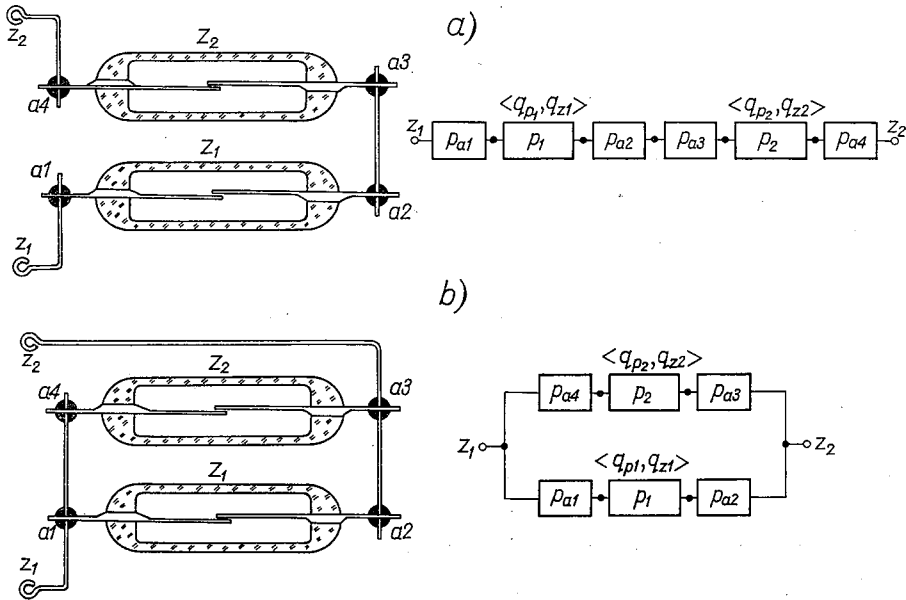
$$R_{N_1+D_1} = p_a^4, \quad (24)$$

$$R_{N_2+D_2} = (1 - q_p + q_z)(1 - q_p - q_z) \quad (25)$$

oraz

$$R_{N+D} = p_a^4(1 - q_p + q_z)(1 - q_p - q_z), \quad (26)$$

gdzie $R_{N_1+D_1}$ jest niezawodnością lokalną układu ze względu na niezawodność lutowań, natomiast $R_{N_2+D_2}$ jest niezawodnością lokalną układu ze względu na niezawodność



Rys. 3. Proponowane warianty rozbudowy układu prostego:

- a) układ szeregowy i odpowiadająca mu struktura niezawodnościowa,
b) układ równoległy i odpowiadająca mu struktura niezawodnościowa

zestyków magnetycznych, przy czym q_p jest prawdopodobieństwem wadliwego zadziałania zestyku w wyniku przerwy, a q_z jest prawdopodobieństwem wadliwego zadziałania zestyku w wyniku zwarcia. Dla układu równoległego, o strukturze niezawodnościowej przedstawionej umownie na rys. 3b, mamy odpowiednio:

$$R_{N_1+D_1} = p_a^2(2 - p_a^2), \quad (27)$$

$$R_{N_2+D_2} = (1 - q_z + q_p)(1 - q_z - q_p) \quad (28)$$

oraz

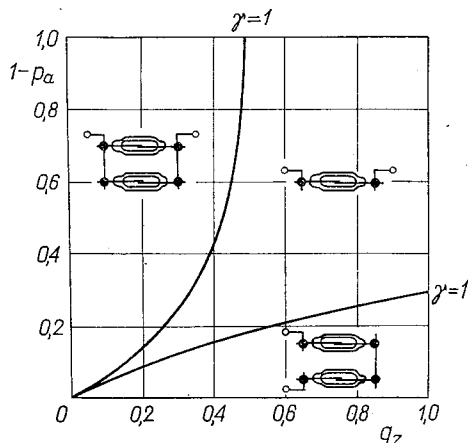
$$R_{N+D} = p_a^2(2 - p_a^2)(1 - q_z + q_p)(1 - q_z - q_p). \quad (29)$$

Uwzględniając, że niezawodność globalna prostego układu przełączającego wynosi

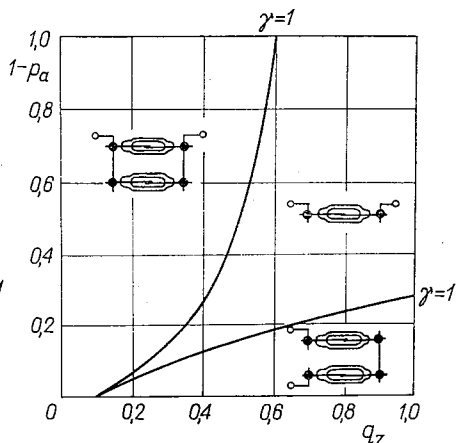
$$R_N = p_a^2 p = p_a^2 (1 - q_z - q_p) \quad (30)$$

możemy zbadać efektywność rozbudowy obu układów. Efektywność rozbudowy układu szeregowego, zgodnie ze wzorem (22)

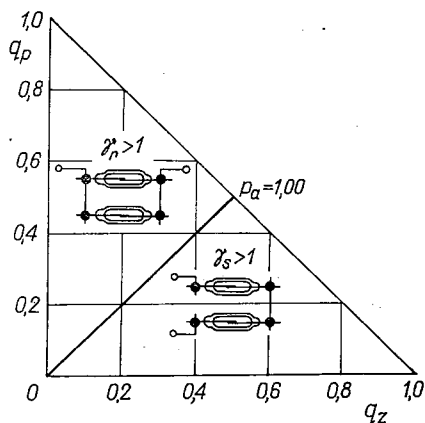
$$\gamma_s = \gamma(R_{N+D}, R_N) = \gamma_s(p_a, q_p, q_z) = p_a^2 (1 - q_p + q_z), \quad (31)$$



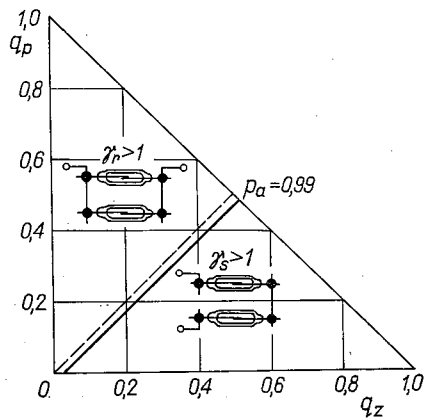
Rys. 4. Obszary optymalnych rozwiązań niezawodnościowych dla analizowanych układów przy $q_p = 0$



Rys. 5. Obszary optymalnych rozwiązań niezawodnościowych dla analizowanych układów przy $q_p = 0,1$



Rys. 6. Obszary optymalnych rozwiązań niezawodnościowych dla analizowanych układów w przypadku lutowań całkowicie niezawodnych



Rys. 7. Obszary optymalnych rozwiązań niezawodnościowych dla analizowanych układów w przypadku dużej niezawodności lutowań ($p_a = 0,99$)

natomiast efektywność rozbudowy układu równoległego

$$\gamma_r = \gamma(R_{N+D}, R_N) = \gamma_r(p_a, q_p, q_z) = (2 - p_a^2)(1 - q_z + q_p). \quad (32)$$

Dla $\gamma_s > 1$ i $\gamma_r > 1$ oba układy z rys. 3 są niezawodnościowo lepsze od układu prostego i do praktycznej realizacji należy wybrać ten spośród nich, który posiada większą niezawodność, tzn. ten, który daje większą efektywność rozbudowy.

Przykładowo, jeżeli okaże się, że $\gamma_s > \gamma_r$, co ma miejsce, kiedy

$$\frac{p_a^2}{2-p_a^2} > \frac{1-q_z+q_p}{1-q_p+q_z}, \quad (33)$$

wówczas do praktycznej realizacji należy wybrać układ szeregowy. Natomiast w przypadku, kiedy $\gamma_s = \gamma_r$, mamy

$$\frac{p_a^2}{2-p_a^2} = \frac{1-q_z+q_p}{1-q_p+q_z} \quad (34)$$

i wówczas oba układy są niezawodnościowo równoważne sobie.

W szczególnym przypadku, kiedy $\gamma_s = \gamma_r = 1$, co ma miejsce wówczas, gdy $p_a = 1$ oraz $q_p = q_z$, wszystkie trzy rozważane układy przełączające są niezawodnościowo równoważne. Widać to wyraźnie na rys. 4 i 5, na których odpowiednim obszarom zmienności parametrów p_a oraz q_z przyporządkowano układy niezawodnościowo optymalne.

W przypadku dużej niezawodności lutowań, wówczas $p_a \rightarrow 1$, rozbudowa prostego układu przełączającego jest prawie zawsze sensowna, co uwidoczniło poglądowo na rysunkach 6 i 7.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. Migdalski, Wpływ elementów elektroprzewodzących na niezawodność układów technicznych, Przegląd Elektrotechniczny, 2, 1969.
2. J. Migdalski, Niektóre problemy niezawodności przekaźnika elektromechanicznego z zestykami hermetycznymi, Prace Instytutu Automatyki PAN, 70, Warszawa 1968.

J. MIGDAŁSKI

ON CERTAIN PROBLEMS OF RELIABILITY ANALYSIS AND SYNTHESIS OF ELECTRICAL SYSTEMS

Summary

Some problems of reliability analysis and synthesis for simple and complex electrical systems are discussed, for the case when full information about their elements reliability is given as well as for the case of limited amount of information. Then, after introducing the terms — *local reliability* and *global reliability* for the system — reliability optimization for structures of complex systems is discussed.

The term *local reliability* (and consequently local reliability analysis and synthesis) is very useful when we are interested only in one kind of components in the system, for instance when we want to determine system reliability as a function of electrical connectors reliability [1]. To illustrate the theory, reliability analysis, synthesis and optimization of an electrical switching circuit — made from magnetic reed switches — with consideration of solder joint reliability is carried out.

J. MIGDALSKI

QUELQUES PROBLÈMES DE L'ANALYSE ET SYNTHÈSE DES CIRCUITS
ÉLECTRIQUES DU POINT DE VUE DE LEUR INFAILLIBILITÉ

Résumé

On a présenté quelques problèmes, liés avec l'analyse et synthèse d'infaillibilité de simples et compliqués circuits électriques dans les conditions de l'information complète ainsi qu'incomplète concernant des éléments des circuits considérés. Ensuite, après avoir introduit l'idée d'*infaillibilité locale* et d'*infaillibilité globale du circuit*, on a présenté la méthode de l'optimalisation de la structure du circuit du point de vue de son infaillibilité au cours de développer sa construction. Nous nous rencontrons avec l'idée de l'infaillibilité locale du circuit et, en conséquence, avec l'analyse et synthèse d'infaillibilité locale alors, quand l'infaillibilité du circuit nous intéresse en considération d'un type des éléments du circuit strictement déterminé, par exemple des éléments conducteurs électriques [1].

Pour illustrer les considérations on a accompli analyse, synthèse et optimalisation d'un circuit commutateur, construit utilisant des contacts magnétiques, du point de vue de l'infaillibilité, en considérant l'infaillibilité de ses connections électriques.

Я. МИГДАЛЬСКИ

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ

Резюме

Рассмотрены некоторые проблемы связанные с анализом и синтезом с точки зрения надёжности простых и сложных систем в условиях полной, а также неполной информации о надёжности элементов, изучаемых систем. Далее, после введения термина *надёжность локальной и надёжность глобальной системы*, представлен метод оптимизации с точки зрения надёжности структуры системы в процессе ее расширения. С термином локальной надёжности системы, и в следствие этого с локальным анализом и синтезом системы с точки зрения надёжности, приходится нам встречаться тогда, когда нас интересует надёжность системы вызываемая только одним типом ее элементов, н. пр. проводящих электрический ток элементов [1].

Для иллюстрации теоретических рассуждений произведены анализ, синтез и оптимализация переключающей системы, построенной на герметических контактах, с учетом надёжности ее электрических соединений.

621.372.81.09

Stabilizacja poziomu sygnału w mikrofalowych układach pomiarowych metodą podwójnej modulacji

JERZY KALIŃSKI (WARSZAWA)

Zakład Doświadczalny Budowy Aparatury Naukowej UNIPAN
Polskiej Akademii Nauk

Otrzymano 28.12.1968

W artykule przedstawiono nową metodę automatycznej kompensacji przypadkowych zmian poziomu sygnału w pomiarowych układach mikrofalowych zawierających generator fali ciągłej i detektor sygnału mikrofalowego. Podana metoda zapewnia wielokrotne zmniejszenie wpływu zmian mocy generowanej przez źródło sygnału mikrofalowego oraz zmian czułości i impedancji detektora tego sygnału na wyniki pomiarów. Przeprowadzono analizę teoretyczną i podano wyniki doświadczalne uzyskane w układzie do pomiaru tłumienia sygnału mikrofalowego.

1. WSTĘP

Obserwowany w ostatnich latach dynamiczny rozwój zastosowań promieniowania mikrofalowego do celów pomiarowych i kontrolnych w licznych gałęziach przemysłu otworzył przed techniką mikrofalową nowe, szerokie perspektywy praktycznego wykorzystania. Jednocześnie układom mikrofalowym zostały postawione szczególnie ostre wymagania w zakresie dokładności, stałości i porównywalności uzyskiwanych przy ich pomocy wyników.

Dotychczasowe zastosowania mikrofal w nauce i technice można skupić w dwóch zasadniczych grupach. Mikrofałe, jako wycinek widma promieniowania elektromagnetycznego, wykorzystano w radiolokacji, radiokomunikacji i radioastronomii, jako narzędzie badań natomiast — w badaniach właściwości gazów, cieczy i ciał stałych metodami radio-spektroskopii mikrofalowej oraz w badaniach plazmy. Zastosowania te bądź nie stawiały układom mikrofalowym szczególnie ostrych wymagań w zakresie długoczasowej stałości niektórych parametrów, bądź też umożliwiały częstą kontrolę i kalibrację tychże układów przy jednoczesnym zapewnieniu laboratoryjnych warunków otoczenia i zasilania oraz stosunkowo krótkich odcinków czasu między poszczególnymi pomiarami. Sytuacja ta uległa zasadniczej zmianie w chwili zastosowania mikrofal do celów pomiarowo-kontrolnych w przemyśle, zwłaszcza przy automatyzacji ciągłych procesów technologicznych. Zmienne warunki otoczenia i zasilania oraz utrudniona lub wręcz niemożliwa kalibracja urządzeń w czasie ich wykorzystywania wysunęły problemy stałości i powtarzalności parametrów układów mikrofalowych na czoło zagadnień konstrukcyjnych. Spełnienie

postawionych w tym zakresie wymagań otwiera przed techniką mikrofalową nową, niezwykle szeroką dziedzinę zastosowań — nieniszczące badania materiałów [15, 26, 27, 38, 62] i stawia promieniowanie mikrofalowe w rzędzie powszechnie już wykorzystywanych do tych celów promieniowań ultradźwiękowego, podczerwonego i rentgenowskiego. Liczne prace teoretyczne i doświadczalne prowadzone w wielu ośrodkach świadczą o znaczeniu rozwiązywanych zagadnień.

Dotychczasowe rozwiązania przemysłowe w znakomitej większości oparto o technikę kompensacyjną, przy której stałość i powtarzalność parametrów układów mikrofalowych nie ma zasadniczego znaczenia dla prawidłowości działania całego systemu kontroli czy regulacji. Wadami metod kompensacyjnych są jednak konieczność stosowania dokładnego elementu, z którego położenia odczytuje się mierzoną wartość, możliwość kontroli tylko jednego z parametrów układu (np. tłumienia lub fazy) oraz stosunkowo duża stała czasowa reakcji systemu na sygnał błędu, związana z bezwładnością mechanicznych zespołów kompensujących. Skrócenie czasu reakcji, niezbędne często we współczesnym przemyśle, w którym niektóre procesy technologiczne przebiegają ze znaczną szybkością, wymaga stosowania również wychyłowych metod pomiaru i regulacji z odczytem analogowym lub cyfrowym. Metody te wiążą się jednak, jak to już wyżej wspomniano, z wymaganiem dużej stałości parametrów wszystkich zespołów składowych systemu, w tym również układów mikrofalowych. Sygnał wyjściowy układu mikrofalowego jest bowiem sygnałem znaczącym dla działania całego systemu automatycznej kontroli i regulacji procesu. Pierwszym szerokim zastosowaniem mikrofal w dziedzinie badań nieniszczących stały się mikrofalowe pomiary wilgotności materiałów. Zagadnienie to omówione jest szeroko w literaturze krajowej i światowej [1, 10, 12, 16, 20, 30, 43, 47, 49, 56, 58, 61, 72, 73, 79]. Wystarczy tu wspomnieć, że mikrofalowe pomiary wilgotności zastosowane już zostały w przemyśle hutniczym [46, 54], włókienniczym [37], budowlanym [70, 75], papierniczym [23, 24, 78], chemicznym [5] [19, 28], ceramicznym [4, 22], rolno-spożywczym [21, 25, 41], tytoniowym, produktów leśnych oraz w wielu innych. Zastosowanie to w wielu przypadkach nie ogranicza się tylko do pomiaru wilgotności gotowego produktu, ale ma również na celu automatyczną kontrolę i regulację wilgotności półproduktu w trakcie procesu technologicznego [11, 23, 52, 65, 67].

Następną, obecnie jeszcze nieco mniej rozpowszechnioną grupę zastosowań mikrofal stanowią pomiary wielkości mechanicznych. W dziedzinie tej, zyskującej szybko coraz większą popularność, układy mikrofalowe wykorzystywane są do pomiaru grubości blach [13, 29], drgań i wydłużeń [34], kształtów [17], przemieszczeń [35, 48, 51], średnic drutów i prętów [36, 64], oraz jako wskaźniki obecności przedmiotów metalowych w polu anteny [31].

Z dalszych zastosowań mikrofal znajdujących się obecnie na etapie badań i doświadczeń wymienić jeszcze można przykładowo wykrywanie wad w materiałach niemetalicznych [50, 71] oraz analizę i wyznaczanie składu chemicznego mieszanin oraz właściwości niektórych związków chemicznych.

O wzroście popularności zastosowania mikrofal do wyżej podanych celów świadczy szybko rosnąca ilość patentów zgłaszana głównie w Europie i Stanach Zjednoczonych Ameryki Północnej na sposoby lub urządzenia do pomiaru wilgotności materiałów [2, 37, 39, 42, 44, 45, 52, 55] lub różnych wielkości mechanicznych [6, 14, 64, 66]. Wydaje się

być oczywistym, że w miarę rozpowszechniania mikrofalowych metod kontroli i regulacji zastosowania przemysłowe tego typu układów zostaną rozszerzone na szereg nowych procesów w ramach wyżej wymienionych dziedzin oraz na dalsze dziedziny przemysłu.

Większość wymienionych wyżej zastosowań mikrofal sprowadza się do pomiaru zmiany amplitudy sygnału mikrofalowego pochłanianego, rozpraszanego, uginanego lub odbijanego w przestrzeni pomiarowej w stosunku do sygnału doprowadzanego do tej przestrzeni. Nieliczne tylko układy działają w oparciu o zasadę pomiaru zmiany częstotliwości lub fazy sygnału mikrofalowego.

2. POMIAROWE UKŁADY MIKROFALOWE

Każdy układ mikrofalowy stosowany do celów pomiarowo-kontrolnych musi składać się co najmniej z trzech połączonych szeregowo podstawowych elementów — generatora, przetwornika i detektora.

Generator mikrofalowy stanowi źródło sygnału zasilającego. Jako generatory stosowane są na ogół klustryony refleksowe lub źródła półprzewodnikowe.

Przetwornik zamienia zmiany właściwości fizycznych (np. dielektrycznych, geometrycznych) ośrodka, materiału lub elementu badanego na zmiany parametrów sygnału mikrofalowego (amplitudy względnie fazy lub częstotliwości). Jako przetworniki w większości przypadków są stosowane mostki mikrofalowe zrównoważone lub niezrównoważone zawierające odpowiednie czujniki pomiarowe (anteny).

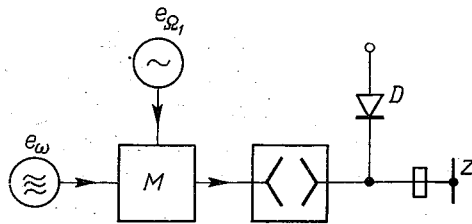
Detektor prostuje sygnał mikrofalowy fali ciągłej lub demoduluje jego obwiednię. Jako detektory stosowane są z zasady detektory prostownikowe (diody półprzewodnikowe) lub rzadziej detektory termoelektryczne (baretery, termistory).

Wyprostowanie lub demodulacja sygnału mikrofalowego umożliwia pomiar jego amplitudy i jej zmian przez pomiar wartości napięcia lub prądu stałego względnie zmiennego małej częstotliwości, o ile generowany sygnał mikrofalowy został uprzednio takim przebiegiem zmodulowany [57]. Pomiary te dokonywane są za pomocą konwencjonalnych metod i przyrządów bądź przy użyciu mierników napięcia lub prądu stałego, bądź za pomocą mierników napięcia zmiennego o czułościach dostosowanych do pomiaru mierzonego sygnału wyjściowego detektora.

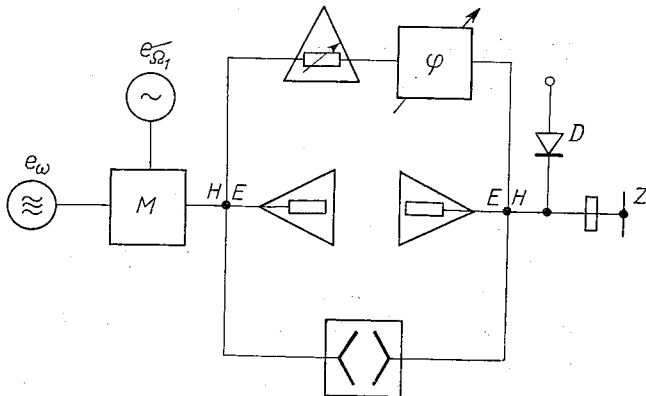
W zależności od przyjętej metody pomiaru, przesyłowej lub odbiciowej, można wyodrębnić cztery podstawowe układy pomiarowe, przesyłowy prosty i mostkowy oraz odbiciowy prosty i mostkowy.

W układzie przesyłowym prostym, którego uproszczony schemat blokowy podano na rys. 1, sygnał mikrofalowy fali ciągłej e_ω modulowany w modulatorze M sygnałem małej częstotliwości e_{Ω_1} po przejściu przez obszar pomiarowy jest doprowadzany do detektora D , gdzie ulega demodulacji. Miarą tłumienia sygnału mikrofalowego w obszarze pomiarowym są zmiany amplitudy zdemodulowanego sygnału o pulsacji Ω_1 .

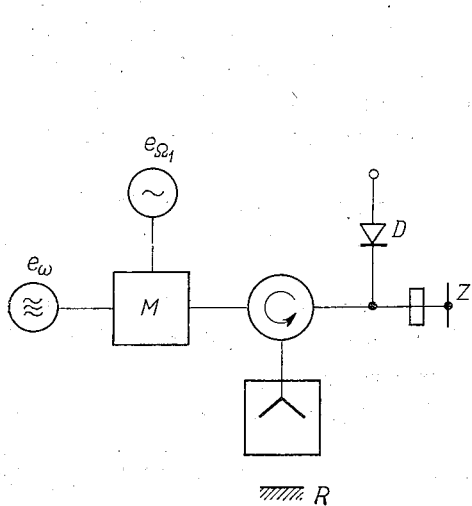
W układzie przesyłowym mostkowym, którego uproszczony schemat blokowy podano na rys. 2, sygnał mikrofalowy fali ciągłej e_ω modulowany w modulatorze M sygnałem małej częstotliwości e_{Ω_1} jest doprowadzany poprzez rozgałęzienie do obu gałęzi mostka. W jednej gałęzi mostka znajduje się obszar pomiarowy, a w drugiej elementy przeznaczone do amplitudowego i fazowego równoważenia mostka. Sygnały z obu gałęzi mostka są



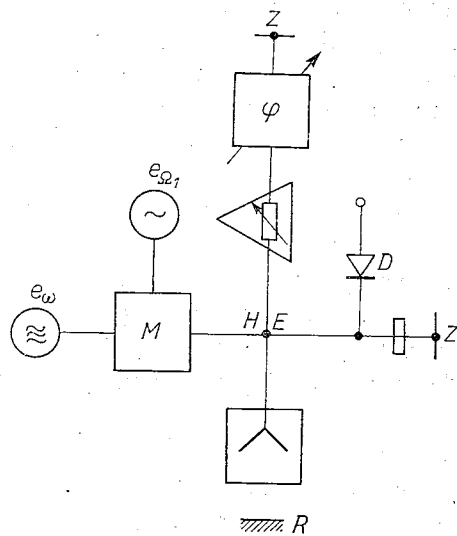
Rys. 1. Uproszczony schemat blokowy przesyłowego, prostego układu mikrofalowego



Rys. 2. Uproszczony schemat blokowy przesyłowego, mostkowego układu mikrofalowego



Rys. 3. Uproszczony schemat blokowy odbiciowego, prostego układu mikrofalowego



Rys. 4. Uproszczony schemat blokowy odbiciowego, mostkowego układu mikrofalowego

doprowadzane poprzez rozgałęzienie do detektora mikrofalowego D . Miarą zmian tłumienia w obszarze pomiarowym są zmiany amplitudy sygnału o pulsacji Ω_1 na wyjściu detektora mikrofalowego przy zgodności faz sygnałów mikrofalowych pochodzących z obu gałęzi mostka (zrównoważenie fazowe mostka).

Przy zastosowaniu metod odbiciowych zasady pomiaru zmian tłumienia w obszarze pomiarowym są podobne i wynikają bezpośrednio ze schematów blokowych obu układów, podanych na rysunkach 3 i 4.

W obu układach mostkowych, przesyłowym i odbiciowym, można również wyznaczyć zmianę fazy sygnału mikrofalowego w obszarze pomiarowym ze zmiany kąta przesunięcia fazowego φ (wprowadzanego przez regulowany przesuwnik fazowy), koniecznej do powtórzonego zrównoważenia fazowego mostka.

3. WPLYW ELEMENTÓW UKŁADU NA DOKŁADNOŚĆ POMIARU

Dokładność, stałość i porównywalność wyników uzyskiwanych w różnych warunkach i okresach czasu za pomocą wszystkich wyżej wymienionych układów są uzależnione od stałości parametrów elementów składowych tych układów w funkcji tychże warunków zasilania i otoczenia oraz czasu. Jeśli określone zmiany właściwości fizycznych badanego ośrodka, materiału czy elementu mają być odwzorowane przez zmiany parametrów sygnału mikrofalowego i w wyniku przez zmiany sygnału małej częstotliwości na wyjściu urządzenia pomiarowego, to jest rzeczą oczywistą, że zmiany tychże parametrów powodowane wszystkimi innymi czynnikami powinny być znacznie mniejsze od najmniejszych zmian znaczących, na które powinno reagować urządzenie pomiarowe.

Oprócz wymienionych poprzednio elementów mikrofalowych w skład większości urządzeń pomiarowych opartych na zastosowaniu mikrofal wchodzi co najmniej dalsze trzy, a mianowicie modulator sygnału mikrofalowego, generator sygnału modulującego małej częstotliwości oraz wzmacniacz selektywny sygnału o częstotliwości modulacji ze wskaźnikiem analogowym lub cyfrowym poziomu sygnału wyjściowego.

Jako bezpośrednie przyczyny niedokładności pomiarów dokonywanych za pomocą takiego urządzenia należy wymienić:

- niestałość częstotliwości sygnału generatora mikrofalowego,
- niestałość poziomu sygnału generatora mikrofalowego,
- niestałość częstotliwości sygnału małej częstotliwości modulującego sygnał mikrofalowy fali ciągłej,
- niestałość poziomu sygnału modulującego,
- niestałość wskaźnika głębokości modulacji,
- niestałość nachylenia charakterystyki przemiany przetwornika mikrofalowego, tj. zmiany określonego parametru układu mikrofalowego odpowiadającej jednostkowej zmianie wielkości mierzzonej,
- niestałość sprawności detekcji (czułości i impedancji detektora mikrofalowego),
- niestałość wzmocnienia wzmacniacza sygnału o częstotliwości modulacji,
- szumy detektora mikrofalowego i szumy własne wzmacniacza sygnału o częstotliwości modulacji.

Z wyżej podanych przyczyn niedokładności pomiarów w niniejszych rozważaniach można wyeliminować wszystkie przyczyny, które są związane z zespołami elektronicznymi małej częstotliwości. Wpływ niestałości parametrów tych ostatnich zespołów może być uczyniony drugo- lub nawet trzeciorzędnym przez ich odpowiednie zaprojektowanie i wykonanie. Jako podstawowe środki prowadzące do osiągnięcia tego celu należy przyjąć:

- silne ujemne sprzężenia zwrotne w układach wzmacniających i generacyjnych,
- automatyczną regulację amplitudy w układach generacyjnych,
- wysokostabilne elementy filtrów *RC* lub *LC* ustalających częstotliwości rezonansowe układów generacyjnych i wzmacniających,
- stabilizację napięć zasilania układów,
- kompensację termiczną układów oraz
- wąskie pasmo przenoszenia układów wzmacniających z ewentualną fazoczułą detekcją sygnału wyjściowego (w celu zapewnienia dużego stosunku sygnału użytecznego do szumów i zakłóceń).

Jako podstawowe przyczyny niedokładności pomiarów pozostaną przy takim założeniu następujące niestałości parametrów elementów mikrofalowych:

- niestałość częstotliwości i poziomu sygnału generatora,
- niestałość czułości i impedancji detektora oraz
- niestałość nachylenia charakterystyki przemiany przetwornika.

Zmiany częstotliwości generatora mikrofalowego są powodowane przede wszystkim zmianami napięć zasilania, zmianami impedancji obciążenia oraz zmianami wymiarów geometrycznych wnęki. Wywierają one pośredni wpływ na poziom sygnału w kanale pomiarowym, przy czym wpływ ten zależy w znacznym stopniu od zastosowanego układu mikrofalowego. W układach prostych jest on nieznaczny, odgrywa natomiast zasadniczą rolę w układach mostkowych. Nawet przy dokładnym wyrównaniu długości dróg elektrycznych obu gałęzi mostka przy określonej częstotliwości początkowej (równoważenie fazowe mostka) oraz przy zastosowaniu w układzie wyłącznie elementów szerokopasmowych wpływu zmiany częstotliwości generatora mikrofalowego na równowagę mostka nie da się wyeliminować ze względu na trudności wyrównania dyspersji obu jego gałęzi. Zmiany poziomu sygnału generatora mikrofalowego powodowane są również zmianami napięć zasilania oraz w dużej mierze czynnikami mechaniczno-klimatycznymi, głównie o charakterze termicznym. Zmiany te oddziałują bezpośrednio na poziom sygnału w kanale pomiarowym i nie są uzależnione od zastosowanego układu mikrofalowego.

Zmiany czułości i impedancji detektora, diody półprzewodnikowej, powodowane są wpływem temperatury oraz niekiedy zjawiskami starzenia. Wpływ temperatury na własności diody półprzewodnikowej zgodnie z rozważaniami teoretycznymi powinien objawiać się spadkiem wartości jej impedancji i wzrostem czułości prądowej ze wzrostem temperatury. W praktyce własności diody półprzewodnikowej zależą od warunków otoczenia w sposób nieprzewidziany, zachodzące procesy mają charakter procesów błędzących, niekiedy ze zjawiskiem histerezy, przy czym anomalie te występują przeważnie w temperaturach niższych od 21°C. W temperaturach wyższych diody półprzewodnikowe zachowują się w większości przypadków zgodnie z rozważaniami teoretycznymi. Czynniki mechaniczne oraz starzenie wywierają również wpływ na parametry diod półprzewodni-

kowych, przy czym zmiany tych parametrów mają charakter przypadkowy. Zmiany sprawności detekcji oddziałują oczywiście bezpośrednio na poziom sygnału w kanale pomiarowym bez względu na zastosowany układ mikrofalowy.

Zmiany nachylenia charakterystyki przetwornika są związane przede wszystkim z czynnikami mechaniczno-klimatycznymi, głównie temperaturowymi. Zmiany te wywierają dwójakiego rodzaju wpływ na dokładność pomiarów: zmieniają w określonym stopniu poziom sygnału w kanale pomiarowym (ze względu na występujące na ogół równocześnie przesunięcie punktu pracy przetwornika) oraz pogarszają dokładność skalowania miernika sygnału wyjściowego (zmiany charakterystyki kalibracji).

Wszystkie wyżej wymienione zmiany parametrów poszczególnych elementów składowych zespołu mikrofalowego urządzenia pomiarowego wpływają pośrednio lub bezpośrednio na dokładność wyników pomiarów uzyskiwanych za pomocą takiego urządzenia. W urządzeniach, od których wymagana jest znaczna dokładność pomiaru stosowane są więc układy stabilizacji poszczególnych parametrów elementów zespołu mikrofalowego.

Stabilizacja częstotliwości generatora mikrofalowego uzyskiwana jest przez przeciwdziałanie przyczynom niestabilności (stabilizacja napięć zasilających, separacja obciążenia, zewnętrzna wnęka) lub przez stosowanie specjalnych elektronicznych układów stabilizujących.

Stabilizacja poziomu mocy generowanego sygnału mikrofalowego jest na ogół rozwiązywana przez włączenie między generator i obciążenie regulowanego tłumika mikrofalowego o wartości wprowadzanego tłumienia uzależnionej od wielkości sygnału na obciążeniu.

Tak jak i drugie układy stabilizujące są układami poważnie rozbudowanymi, a ponadto zawierają również elementy mikrofalowe podatne częściowo na ten sam rodzaj narażeń, których wpływ na zespół mikrofalowy urządzenia mają neutralizować (np. detektory). Stabilizacja czułości i impedancji detektora mikrofalowego, diody półprzewodnikowej, w funkcji temperatury, starzenia, wpływu czynników mechanicznych oraz innych czynników drugorzędnych jest, ze względu na charakter zachodzących procesów, bardzo utrudniona lub nawet praktycznie niewykonalna. Stałość nachylenia charakterystyki przemiany jest uzyskiwana przez odpowiednie rozwiązania konstrukcyjne i technologiczne przetwornika mikrofalowego.

Wszystkie wymienione wyżej względy decydują o zasadniczej przewadze kompensacyjnych układów mikrofalowych nad układami wychyłowymi i prawie wyłącznym stosowaniu ich w dotychczasowych rozwiązaniach przemysłowych systemów kontroli i regulacji przebiegu procesów technologicznych (np. mikrofalowe mierniki wilgotności firmy Microwave Instruments typ MX 100 oraz firmy AEI). Układy mikrofalowe, tak proste jak i mostkowe, zawierające detektor lub detektory półprzewodnikowe promieniowania mikrofalowego stosowane są w wychyłowych układach pomiarowych wyłącznie przy pomiarach dokonywanych w krótkich odcinkach czasu i laboratoryjnych warunkach otoczenia i zasilania.

Zastosowanie układów mikrofalowych do wychyłowych pomiarów wartości bezwzględnych w długich odstępach czasu i zmiennych, przemysłowych warunkach otoczenia i zasilania wymaga stosowania prostych i skutecznych metod stabilizacji parametrów elementów mikrofalowych lub też metod kompensacji wpływu na te parametry wszelkich

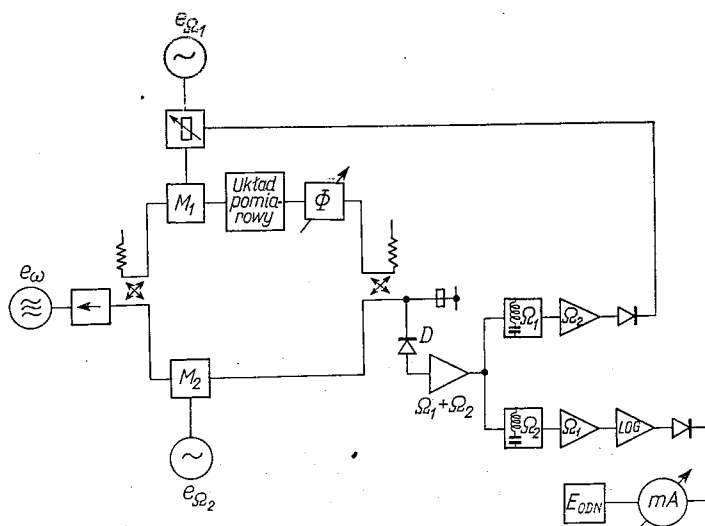
występujących czynników z narażeniami mechaniczno-klimatycznymi włącznie (zmiany temperatury i wilgotności, silne zapylenie, wibracje, udary). W świetle powyższych rozważań metody takie powinny przede wszystkim zapewniać wysoką stałość i powtarzalność częstotliwości i poziomu mocy generatora oraz czułości i impedancji detektora mikrofalowego lub też niewrażliwość urządzenia pomiarowego na zmiany tychże parametrów.

4. METODA PODWÓJNEJ MODULACJI

Wielokrotne zmniejszenie zależności poziomu sygnału w kanale pomiarowym od poziomu mocy generatora oraz sprawności detekcji uzyskuje się przy zastosowaniu metody podwójnej modulacji sygnału mikrofalowego fali ciągłej na drodze pomiędzy generatorem a detektorem mikrofalowym [32, 33]. Metoda ta polega na dodaniu do pomiarowego układu mikrofalowego zasilanego z generatora mikrofalowego falą ciągłą modulowaną sygnałem o pulsacji Ω_1 w układzie modulatora mikrofalowego i demodulowaną za pomocą diody półprzewodnikowej dodatkowego kanału mikrofalowego bocznikującego pierwotny układ. Kanał ten zwany dalej kanałem regulacyjnym jest zasilany sygnałem mikrofalowym z tego samego generatora co układ pomiarowy, a jego sygnał wyjściowy doprowadzany jest do tego samego detektora co sygnał wyjściowy układu pomiarowego. W mikrofalowym kanale regulacyjnym umieszczony jest drugi modulator, w którym sygnał mikrofalowy fali ciągłej przechodzący przez ten kanał jest modulowany sygnałem o pulsacji Ω_2 różnej od Ω_1 . Różniące się od siebie pulsacje obu przebiegów modulujących umożliwiają rozróżnienie sygnałów wyjściowych detektora mikrofalowego za pomocą układów selektywnych. Rozdzielenie obu sygnałów zdemodulowanych przez diodę półprzewodnikową pozwala na wyodrębnienie sygnału pochodzącego z układu pomiarowego i zawierającego informacje o zjawiskach zachodzących w obszarze pomiarowym oraz sygnału z kanału regulacyjnego zawierającego informacje o poziomie sygnału mikrofalowego w układzie generator-detektor. Wykorzystując sygnał wyjściowy detektora pochodzący z kanału regulacyjnego, a więc uzależniony wyłącznie od stałości parametrów generatora i detektora mikrofalowego, do regulacji głębokości modulacji sygnału mikrofalowego fali ciągłej w układzie pomiarowym na zasadzie sprzężenia zwrotnego, uzyskuje się wielokrotne zmniejszenie zależności poziomu sygnału wyjściowego mikrofalowego układu pomiarowego od stałości parametrów generatora i detektora. Zmiany poziomu tego sygnału powodowane zmianami poziomu mocy generatora mikrofalowego oraz zmianami czułości i impedancji detektora niezależnie od źródeł ich pochodzenia są w liniowym zakresie działania układu regulacyjnego kompensowane zmianami głębokości modulacji sygnału mikrofalowego w układzie pomiarowym.

Schemat blokowy układu automatycznej regulacji niepożądanych zmian poziomu sygnału przedstawiony jest na rys. 5. Generator mikrofalowy zasila poprzez izolator i rozgałęzienie (sprzęgacz kierunkowy) sygnałem mikrofalowym fali ciągłej o pulsacji ω kanał pomiarowy i kanał regulacyjny układu mikrofalowego. Sygnał mikrofalowy w kanale pomiarowym modulowany jest sygnałem o pulsacji Ω_1 doprowadzonym do modulatora M_1 poprzez układ dzielnika o stosunku podziału regulowanym za pomocą sygnału napięcia stałego. Sygnał mikrofalowy modulowany sygnałem o pulsacji Ω_1 zasila właściwy układ pomiarowy (przetwornik mikrofalowy) wykonany w jednym z opisanych

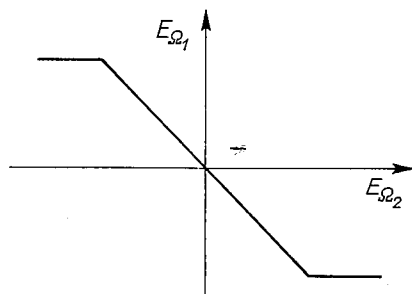
uprzednio wariantów, przesyłowym lub odbiciowym. Sygnał wyjściowy pomiarowego układu mikrofalowego poprzez przesuwnik fazy Φ i rozgałęzienie (sprzęgacz kierunkowy) doprowadzony jest do detektora. Poprzez drugą gałąź tego rozgałęzienia detektor jest



Rys. 5. Schemat blokowy układu automatycznej regulacji niepożądanych zmian poziomu sygnału w pomiarowych układach mikrofalowych za pomocą metody podwójnej modulacji

zasilany sygnałem mikrofalowym z kanału regulacyjnego. Sygnał ten jest modulowany w układzie modulatora M_2 sygnałem małej częstotliwości o pulsacji Ω_2 , różnej od Ω_1 . W układzie takim na wyjściu detektora mikrofalowego uzyskuje się sygnały o pulsacjach Ω_1 i Ω_2 , które wzmacnione przez wzmacniacz pasmowy są rozdzielane za pomocą wzmacniaczy selektywnych o pulsacjach rezonansowych równych odpowiednio Ω_1 i Ω_2 . Wzmocniony sygnał o pulsacji Ω_1 po wyprostowaniu wykazywany jest przez wskaźnik i stanowi informację o zjawiskach zachodzących w obszarze pomiarowym układu mikrofalowego. W najczęstszym przypadku przetwarzania zmian właściwości fizycznych ośrodka, materiału lub elementu badanego na zmiany tłumienia sygnału mikrofalowego w obszarze pomiarowym informację tę uzyskuje się przy zgodności faz sygnałów mikrofalowych w obu kanałach — pomiarowym i regulacyjnym. Wyrównanie początkowego przesunięcia fazowego tych sygnałów przeprowadza się za pomocą przesuwnika fazowego Φ . Wzmocniony sygnał o pulsacji Ω_2 jest sygnałem zawierającym informację o poziomie sygnału mikrofalowego w układzie generator-detektor, czyli o stałości poziomu mocy generatora oraz impedancji i czułości detektora. Każda zmiana któregoś z tych parametrów objawia się zmianą amplitudy tego sygnału. Sygnał wyjściowy wzmacniacza selektywnego o pulsacji rezonansowej Ω_2 po wyprostowaniu jest doprowadzany do sterowanego napięciowo dzielnika sygnału o pulsacji Ω_1 , modulującego sygnał mikrofalowy w torze pomiarowym. Przy odpowiednim doborze nachyleń liniowych odcinków charakterystyk $E_{\Omega_1} = f(E_{\Omega_2})$ oraz $E_{\Omega_2} = f(\Delta P)$ niepożądane zmiany poziomu sygnału mikrofalowego w układzie generator-detektor są kompensowane automatycznie zmianami amplitudy sygnału modulującego sygnał mikrofalowy w kanale pomiarowym.

Uproszczona charakterystyka zależności amplitudy sygnału o pulsacji Ω_1 od amplitudy sygnału o pulsacji Ω_2 jest podana na rys. 6. Amplituda sygnału o pulsacji Ω_2 zależy liniowo od zmian mocy generatora bądź od impedancji lub czułości detektora (ΔP).

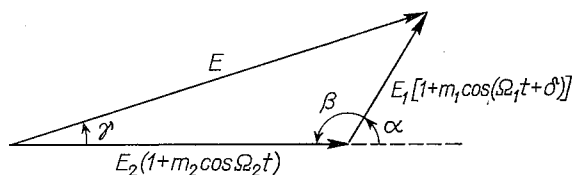


Rys. 6. Uproszczona charakterystyka zależności sygnału wyjściowego detektora o pulsacji Ω_1 od amplitudy sygnału o pulsacji Ω_2

W opisanym układzie zależność sygnału o pulsacji Ω_1 , wykazywanego przez wskaźnik urządzenia, od zmian poziomu mocy generatora lub skuteczności detekcji detektora jest wielokrotnie zmniejszona w stosunku do klasycznych pomiarowych układów mikrofalowych (rys. 1 do rys. 4).

5. ZALEŻNOŚCI TEORETYCZNE

Sygnał mikrofalowy doprowadzany do detektora stanowi w opisanym wyżej układzie sumę sygnałów wyjściowych kanału regulacyjnego i kanału pomiarowego, której wykres wektorowy podany jest na rys. 7.



Rys. 7. Wykres wektorowy sumy sygnałów wyjściowych kanału regulacyjnego i kanału pomiarowego

Oznaczając przez:

- E_1 — sygnał fali nośnej w kanale pomiarowym,
- E_2 — sygnał fali nośnej w kanale regulacyjnym,
- m_1 — głębokość modulacji fali nośnej w kanale pomiarowym,
- m_2 — głębokość modulacji fali nośnej w kanale regulacyjnym,
- ω — pulsację fali nośnej,
- Ω_1, Ω_2 — pulsacje sygnałów modulujących, odpowiednio,
- α — kąt przesunięcia fazowego między sygnałami fali nośnej w obu kanałach,
- δ — kąt przesunięcia fazowego między sygnałami modulującymi,

sygnały doprowadzane do detektora można wyrazić zależnościami:

$$E_1[1+m_1\cos(\Omega_1 t+\delta)]\cos(\omega t+\alpha), \quad (1)$$

$$E_2[1+m_2\cos\Omega_2 t]\cos\omega t. \quad (2)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$E_1[1+m_1\cos(\Omega_1 t+\delta)] = A, \quad (3)$$

$$E_2[1+m_2\cos\Omega_2 t] = B, \quad (4)$$

amplitudę sygnału wypadkowego doprowadzanego do detektora wyznaczy się w oparciu o twierdzenie cosinusów jako:

$$E = \sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\beta}, \quad (5)$$

gdzie β kąt uzupełniający do kąta α równy

$$\beta = 180^\circ - \alpha. \quad (6)$$

Kąt przesunięcia fazowego sygnału wypadkowego określają zależności:

$$\cos\gamma = \frac{B-A\cos\beta}{E}, \quad (7)$$

$$\sin\gamma = \frac{A\sin\beta}{E}. \quad (8)$$

Wyrażenie określające wypadkowy sygnał doprowadzany do detektora przyjmie więc ostatecznie postać:

$$\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\beta} \cos[\omega t+\gamma(\beta, t)], \quad (9)$$

w której kąt γ jest funkcją kąta β oraz czasu t .

W założeniu pomijalności wpływu modulacji fazy ($\gamma = 0$), [3—dodatek B], sygnał wejściowy detektora określi zależność:

$$\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\beta} \cos\omega t. \quad (10)$$

Przy spełnieniu warunku określającego stosunek amplitud fal nośnych w obu kanałach:

$$\frac{E_1}{E_2} = K < \frac{1-m_2}{1+m_1} \quad (11)$$

można, jak to wykonał Aiken [3], przeprowadzić analizę częstotliwościową wyrażenia określającego sygnał wyjściowy detektora i wyznaczyć poszczególne jego składowe.

Podane przez Aikena zależności określające składową stałą, składowe o pulsacjach Ω_1 i Ω_2 oraz ich drugie harmoniczne mają postać:

$$E_{st} = E_2 \left[1 - K\cos\beta - K\sin\beta \sum_{q=1}^{\infty} F_q \frac{a_{q,0}}{2} \frac{G_{q+1,0}}{2} \right], \quad (12)$$

$$E_{\Omega_1} = -E_1 \left[m_1\cos\beta + \sin\beta \sum_{q=1}^{\infty} F_q \frac{a_{10}}{2} G_{q+1,1} \right], \quad (13)$$

$$E_{2\Omega_1} = -E_1 \sin \beta \sum_{q=1}^{\infty} F_q \frac{a_{q0}}{2} G_{q+1,2}, \quad (14)$$

$$E_{\Omega_2} = E_2 m_2 - E_1 \sin \beta \left[a_{11} F_1 \left(1 + \frac{m_1^2}{2} \right) + a_{21} F_2 \left(1 + \frac{3m_1^2}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + a_{31} F_3 \left(1 + 3m_1^2 + \frac{3m_1^4}{8} \right) + \dots + a_{q1} F_q \frac{G_{q+1,0}}{2} + \dots \right], \quad (15)$$

$$E_{2\Omega_2} = -E_1 \sin \beta \sum_{q=1}^{\infty} F_q a_{q2} \frac{G_{q+1,0}}{2}, \quad (16)$$

gdzie wartości $G_{q+1,0}$, $G_{q+1,1}$ i $G_{q+1,2}$ podane są w odpowiednich tabelach [3], a

$$F_q = \frac{K^q P'_q}{q(q+1)}. \quad (17)$$

Z zależności (12) do (17) wynika, że wszystkie wymienione wyżej składowe sygnału wyjściowego detektora zależą od wartości kąta przesunięcia fazowego α między sygnałami fal nośnych w obu kanałach — pomiarowym i regulacyjnym. Zgodnie z założeniem metody podwójnej modulacji kąt ten jest dobrany za pomocą regulowanego przesuwника fazy Φ do wartości równej zeru.

Jeżeli:

$$\alpha = 0^\circ, \quad (18)$$

$$\text{to} \quad \beta = 180^\circ, \quad (19)$$

$$\text{oraz} \quad F_{st} = E_2 + E_1, \quad (20)$$

$$E_{\Omega_1} = E_1 m_1, \quad (21)$$

$$E_{\Omega_2} = E_2 m_2, \quad (22)$$

$$E_{2\Omega_1} = 0, \quad (23)$$

$$E_{2\Omega_2} = 0. \quad (24)$$

Zależność (21) wskazuje, że przy stałej wartości głębokości modulacji m_1 , sygnał wyjściowy detektora o pulsacji Ω_1 uzależniony jest liniowo od poziomu sygnału mikrofalowego w kanale pomiarowym, a więc od tłumienia wprowadzanego przez ośrodek, materiał lub element badany w obszarze pomiarowym oraz od poziomu mocy generatora mikrofalowego.

Zależność (22) wskazuje, że przy stałej wartości głębokości modulacji m_2 sygnał wyjściowy detektora o pulsacji Ω_2 uzależniony jest liniowo od poziomu sygnału mikrofalowego w kanale regulacyjnym, a więc jedynie od poziomu mocy generatora mikrofalowego. Sygnał ten nie zależy od wartości tłumienia w obszarze pomiarowym.

Obydwa sygnały uzależnione są w tym samym stopniu od czułości i impedancji detektora mikrofalowego.

Z powyższego wynika bezpośrednio możliwość zastosowania sygnału wyjściowego detektora o pulsacji Ω_2 do automatycznej regulacji jednego z parametrów toru pomiaro-

wego w celu uzyskania kompensacji zmian mocy generatora lub zmian czułości oraz impedancji detektora.

Zależność (21) wskazuje na możliwość kompensacji zmiany poziomu fali nośnej w układzie mikrofalowym zmianą głębokości modulacji tej fali sygnałem o pulsacji Ω_1 . Uzależniając głębokość modulacji m_1 odwrotnie proporcjonalnie od wartości sygnału E_{Ω_2} :

$$m_1 = \frac{k}{E_{\Omega_2}} = \frac{k}{E_2 m_2}, \quad (25)$$

gdzie przez k oznaczono współczynnik proporcjonalności, otrzyma się zależność:

$$E_{\Omega_1} = \frac{k}{m_2} \frac{E_1}{E_2} = \text{constant} \frac{E_1}{E_2}. \quad (26)$$

Zależność (26) wskazuje, że w przypadku jednoczesnej zmiany obu sygnałów E_1 i E_2 z zachowaniem stałej wartości ich ilorazu wartość E_{Ω_1} nie ulegnie zmianie. Sygnał E_{Ω_1} został w ten sposób uzależniony wyłącznie od wartości tłumienia sygnału mikrofalowego w obszarze pomiarowym.

Z zależności (15) wynika, że przy odpowiednio dużym stosunku amplitud sygnałów mikrofalowych w kanale regulacyjnym i pomiarowym oraz kącie α zbliżonym do zera zmiany w szerokich granicach wartości mierzonego tłumienia wywierają pomijalny wpływ na wartość sygnału regulacyjnego E_{Ω_2} . Również zmiany w określonych granicach kąta przesunięcia fazowego α między sygnałami mikrofalowymi w obu kanałach wywierają nieznaczny wpływ na sygnał regulacyjny. Zależność sygnału mierzonego od tegoż kąta przesunięcia fazowego wymaga jednak stosowania układów stabilizacji częstotliwości generatora mikrofalowego. Jeśli ponadto badany ośrodek, materiał bądź element, wnosi dodatkowe przesunięcie fazowe o wartości zmiennej w czasie, niezbędne jest wprowadzenie układów automatycznego wyrównywania kąta przesunięcia fazowego obu sygnałów mikrofalowych względem siebie. Układy takie mogą być wykonane na podstawie podanych wyżej zależności składowej stałej prądu detektora lub składowych drugich harmonicznych sygnałów modulujących od wartości tego kąta ($E_{2\Omega_1}$ i $E_{2\Omega_2}$ przechodzą przez wartość zerową i zmieniają znak, gdy wartość kąta α przechodzi przez zero). Automatyczną regulację fazy zapewnia również układ opracowany przez S. Stuchłego i autora artykułu [68].

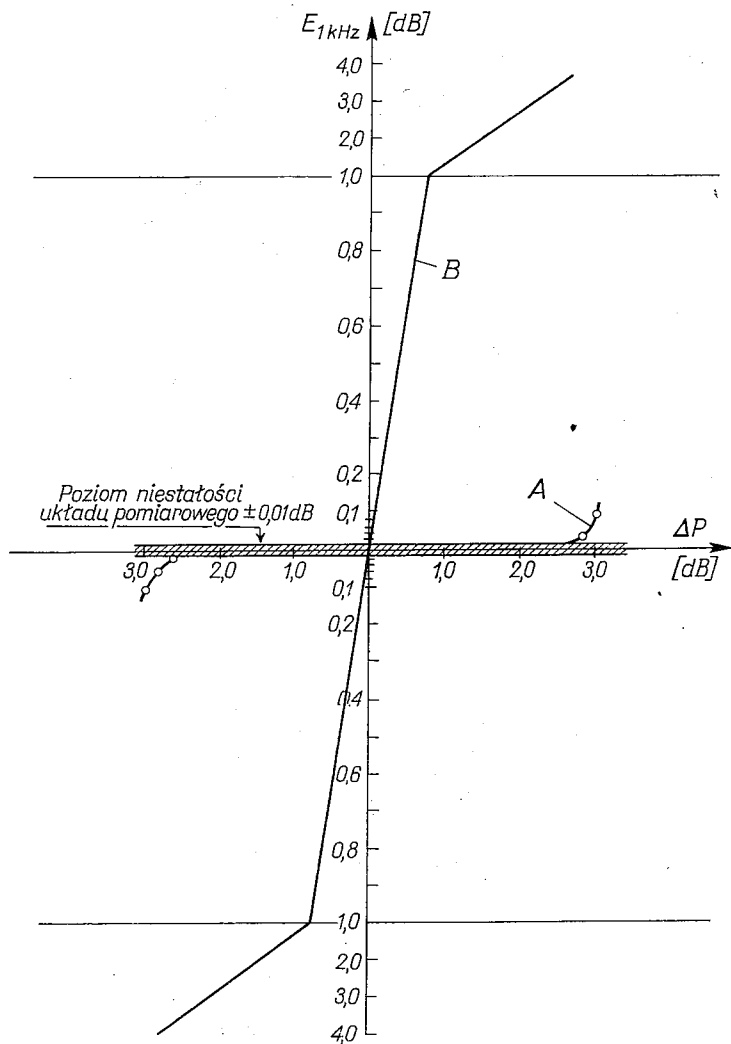
6. WYNIKI DOŚWIADCZALNE

Doświadczalne sprawdzenie metody podwójnej modulacji przeprowadzono w układzie z modulacją podnośnej [40, 53, 59, 60], dodając w kanale nośnej drugi modulator. Wyrównanie faz w obu kanałach uzyskano za pomocą przesuwnika fazowego umieszczonego w kanale podnośnej zgodnie z układem podanym na rysunku 5.

Sygnały modulujące falę nośną w obu kanałach były dostarczane przez generatory małej częstotliwości 1000 Hz i 10500 Hz. Sygnał modulujący 1000 Hz był doprowadzany do modulatora poprzez dzielnik o stosunku podziału regulowanym za pomocą sygnału napięcia stałego. Sygnały wyjściowe detektora mikrofalowego wzmacniano wstępnie w układzie wzmacniacza szerokopasmowego i poprzez filtry LC doprowadzano do wzmacniaczy pasmowych z selektywnymi filtrami RC w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego. Sygnał wyjściowy wzmacniacza Ω_1 był mierzony za pomocą woltomierza logarytmicznego

z zerem na środku skali. Sygnał wyjściowy wzmacniacza Ω_2 po wyprostowaniu i filtracji zastosowano do sterowania dzielnika sygnału modulującego 1000 Hz.

W opisanym wyżej układzie włączono między generator sygnału mikrofalowego i sprzęgacz kierunkowy tłumik mikrofalowy, za pomocą którego zmieniano poziom mocy mikrofalowej doprowadzanej do obu kanałów układu, nośnej i podnośnej. Włączając i wyłączając



Rys. 8. Charakterystyki zależności sygnału 1000 Hz od zmian poziomu mocy generatora mikrofalowego z układem automatycznej regulacji (krzywa A) i bez tego układu (krzywa B)

czając układ automatycznej regulacji poziomu uzyskano charakterystyki zależności sygnału o częstotliwości 1000 Hz od zmian poziomu mocy generatora (ΔP) podane na rys. 8. (krzywa A — z układem regulacyjnym, krzywa B — bez tego układu).

W tym samym układzie po usunięciu dodatkowego tłumika mikrofalowego sprawdzono skuteczność działania automatycznej regulacji poziomu sygnału w funkcji zmian temperatury otoczenia generatora mikrofalowego. Przyrost temperatury otoczenia generatora o $+5^{\circ}\text{C}$ spowodował przy wyłączonym układzie automatycznej regulacji poziomu zmianę poziomu sygnału o częstotliwości 1000 Hz o -1 dB. W tych samych warunkach przy włączonym układzie regulacyjnym zmiana poziomu sygnału 1000 Hz nie przekroczyła poziomu niestabilności układu ($\pm 0,01$ dB).

Przy stosunku amplitud sygnałów mikrofalowych w obu kanałach większym od 30 dB zmiany tłumienia w kanale pomiarowym w granicach 30 dB powodowały zmiany sygnału regulacyjnego rzędu 0,02 dB. Przy tym samym stosunku amplitud zmiany kąta przesunięcia fazowego między sygnałami mikrofalowymi w obu kanałach o $\pm 40^{\circ}$ powodowały zmiany sygnału regulacyjnego rzędu 0,015 dB. Wpływ zmian w szerokich granicach tłumienia i przesunięcia fazy wprowadzanych przez badany ośrodek, materiał lub element na sygnał automatycznej regulacji poziomu można więc uznać za pomijalny.

7. ZAKOŃCZENIE

Opisana metoda automatycznej kompensacji niepożądanych zmian poziomu sygnału w układach mikrofalowych zawierających generator fali ciągłej i detektor sygnału mikrofalowego może być stosowana w urządzeniach lub układach pomiarowych opartych na wykorzystaniu mikrofal do badania elementów, podzespołów oraz zespołów składowych układów mikrofalowych, poszczególnych przyrządów mikrofalowych lub właściwości ciał stałych, ciekłych lub gazowych w polu mikrofalowym. Zastosowanie metody podwójnej modulacji prowadzi do wielokrotnego zmniejszenia zależności wyników pomiarów od zmian mocy generatora oraz czułości i impedancji detektora mikrofalowego. Poprawienie stabilności układów mikrofalowych, a co za tym idzie zwiększenie dokładności i porównywalności wyników uzyskiwanych za pomocą tych układów przy pomiarach metodami wychyłowymi wielkości względnych lub bezwzględnych w dowolnych okresach czasu może przyczynić się do dalszego wzrostu zastosowań mikrofal w różnych dziedzinach nauki i techniki.

Autor pragnie podziękować drowi inż. S. Stuchłemu oraz mgrowi inż. J. Włodkowi za szerokie dyskusje pomocne przy opracowaniu tematu.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. N. B. Agdur, A Microwave Moisture Meter, IV Kongres IMEKO, Warszawa, 3—8 lipca 1967.
2. N. B. Agdur, Vorrichtung zum Messen von Materialeigenschaften, patent szwajcarski nr 430281, 15 lutego 1967.
3. C. A. Aiken, Theory of the Detection of Two Modulated Waves by a Linear Rectifier, Proc. IRE, **21**, 601—629, kwiecień 1963.
4. E. M. Amrhein, Untersuchungen zur vollautomatischen Feuchtigkeitsmessungen an Sand und keramischen Massen, Teil III — Bestimmung des Wassergehalts von Sand aus der Absorption im Mikrowellengebiet, Berichte der Deutschen Keramischen Gesellschaft e. V, **37**, 12, 520—523, 1960.
5. E. M. Amrhein, Versuche zur kontinuierlichen Feuchtigkeitsmessung in Mikrowellengebiet, Angew. Chem. VB-73, 1967.

6. C. F. Augustine, A. L. Merlo, Microwave Thickness Measuring Apparatus, patent USA nr 3258688, czerwiec 1962.
7. C. F. Augustine, J. E. Ebert, Measure it, but don't Touch, Electronics, 17, 65—69, 1965.
8. R. W. Beatty, Mismatch Errors in the Measurement of Ultrahigh Frequency and Microwave Variable Attenuators, J. Res. NBS, 52, 7—9, styczeń 1954.
9. R. W. Beatty, Microwave Attenuation Measurement and Standards, NBS Monograph, 97, 3 kwietnia 1967.
10. M. A. Berliner, B. A. Ivanow, Charakteristiki włagomierow swierchwyssokich czastot, Pribory i sistemy uprawlenija, 3, 14—16, 1967.
11. M. A. Berliner, Elektrieskije izmierienija, awtomatyczeskij kontrol i riegulirowanije wlaźnosti, Izd. Eniergija, Moskwa 1965.
12. G. Benchimol, Mesure continue de l'humidité par hyperfréquences, Électronique Industrielle, 62, 107—111, 1963.
13. J. B. Beyer, J. van Bladel, A. Peterson, Microwave Thickness Detector, Rev. of Sci. Instr., 3, 313—316, 1960.
14. J. B. Beyer, Thickness Measuring Method and Apparatus Employing Microwaves, patent USA nr 3117276, czerwiec 1960.
15. A. R. Boot, A. Watson, Application des ondes radioélectriques centimétriques aux essais non-destructifs, Cahier rech. théor. et exper. matér. et struct., 23, 7—19, 1965.
16. L. H. Busker, Measurement of Water Content above 30% by Microwave Absorption Methods, Tappi, 51, 8, 348—353, 1968.
17. G. I. Cohn, B. Epstein, A Microwave Non-Contacting Tracing Technique for Automatic Contour-Following Machines, Proc. NEC, 12, 982—995, listopad 1956.
18. W. R. Day, Stabilization of Microwave Oscillators by Injection Phase Locking, Microwave Journal, 10, 4, 35—39, marzec 1967.
19. A. J. de Hond, Microwaves Measure Water in Oil, Control Engineering, 5, 139—141, 1962.
20. D. J. Fraade, Measuring Moisture in Solids, Instr. Control Systems, 2, 99—105, 1963.
21. P. Garrick, Application of High Frequency Energy in the Food Industry, Food Trade Review, 6, 57—61, 1966.
22. R. G. Godding, D. Bird, An Apparatus for Continuous Measurement of Water Content of Foundry Sands, B.C.I.R.A. Journal, 11, 5, 641—661, 1963.
23. S. J. Golota, Awtomatyczeskije izmierienije i regulirowanije plotnosti pulpy mikrowolnowym mietodom, Izwiestia Wuzow MW i SO SSSR, rozdział „Priborostrojenije”, 8, 5, 1965.
24. S. J. Golota, Swierchwyssokoczastotnyj pribor kontrola wlaźnosti i plotnosti, Pribory i sistemy uprawlenija, 1, 15—18, 1967.
25. A. M. Hankov, G. F. Polakowa, Swierchwyssokoczastotnyj mietod izmierienija wlaźnosti zier-na, Tr. Konf. po Elektronnoj Tiechnike, 2, 1966.
26. R. Hochschild, Application of Microwaves in Nondestructive Testing, Nondestructive Testing, 2, 115—120, 1963.
27. R. Hochschild, NDT Application of Microwaves, 24-th National Convention of SNT, Philadelphia, Penn., USA, 19—23, październik 1964.
28. R. Hochschild, A Microwave Dielectrometer for Continuous Production Monitoring in the Chemical Industries, 24-th National Convention of SNT, Philadelphia, Penn., USA, 19—23, październik 1964.
29. R. Hochschild, Microwave Thickness Gages for Metals and Nonmetals, 1965, Spring National Convention of the Society for Nondestructive Testing, Los Angeles, 22—25 lutego 1965.
30. G. Johanson, Moisture Analysis by Use of Microwaves, International Symposium on Humidity and Moisture, American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, New York 1963.
31. J. Jonca, A. Michalik, S. Stuchły, Urządzenie do wykrywania obecności metalu, patent PRL nr 51994, 2 sierpnia 1965.

32. J. Kaliński, Sposób automatycznej kompensacji zmian poziomu sygnału w układach mikrofalowych zawierających generator fali ciągłej i detektor sygnału mikrofalowego oraz układ do realizacji tego sposobu, zgłoszenie patentowe PRL nr P-126442, 13 kwietnia 1968.
33. J. Kaliński, A New Principle for Automatic Compensation of Unwanted Signal Level Fluctuation in Measuring Setups which Include a Microwave Generator and Detector, IEEE Transaction on MTT, MTT-16, 11, 212, 1968.
34. A. Kraszewski, A. Stuchły, Mikrofalowe metody pomiaru wymiarów geometrycznych, drgań i wydłużeń, PAK, 8/9, 329—331, 1966.
35. A. Kraszewski, S. Stuchły, Układ mikrofalowy do pomiaru przemieszczeń obiektów metalowych, PAK, 8/9, 353—354, 1966.
36. A. Kraszewski, S. Stuchły, Pomiar grubości drutu metodą mikrofalową, PAK, 8/9, 352—353, 1966.
37. A. Kraszewski, S. Stuchły, J. Kaliński, Sposób pomiaru zawartości wody w warstwach substancji stałych i ciekłych i urządzenie do stosowania tego sposobu, zgłoszenie patentowe PRL nr P-122136, 10 sierpnia 1967.
38. J. D. Leonard, G. T. Stropki, Utilization of Microwaves Frequencies for Quality Control and Nondestructive Testing of Dielectric Components, Proc. 2-nd Annual Symposium on Nondestructive Testing of Aircraft and Missile Components, San Antonio, USA, 14 lutego 1961.
39. Liggett and Myers Tobacco Co., Measuring Moisture Content, patent angielski nr 1124880, 23 czerwca 1967.
40. W. E. Little, Further Analysis of the Modulated Subcarrier Technique of Attenuation Measurement, IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, IM-13, 71—76, czerwiec-wrzesień 1964.
41. D. P. Lowry, E. S. Kotoek, Evaluation of a Microwave Moisture Meter, Forest Products Journal, 17, 10, 47—51, 1967.
42. W. McSwain, Method and Apparatus for Measuring Moisture Content, patent USA nr 2659860.
43. J. B. Magee, C. M. Crain, Recording Microwave Hygrometer, Rev. Sci. Instr., 1, 51—54, 1958.
44. H. Mahlo, Vorrichtung zur berührungslosen Messung hoher Feuchtigkeiten von Warenbahnen, patent NRF nr 1231464, 8 stycznia 1964.
45. Microwave Instruments Ltd., Measuring Moisture Content Electrically, patent angielski nr 112987, 12 października 1964.
46. I. Pankow, J. Klimek, A. Maślanka, Zastosowanie pomiarów wilgotności w hutnictwie, PAK, 7, 267—270, 1961.
47. I. K. Pietrow, A. J. Szczukin, Pribory dla izmierenija wlažnosti rozlicznych produktow i materijałow, Priborostrojenije, 9, 20—23, 1960.
48. R. F. Post, R. L. Howard, A Micro-Displacement Meter, Journal Acoust. Soc. Amer., 1, 283, 1947.
49. W. Raser, Moisture-Measuring Device Uses Microwave Absorption, Electronic News, 8, 385, 22, 1963.
50. M. Rockowitz, L. J. McGuire, A Microwave Technique for Detection of Voids in Honey-combed Ablative Materials, 24-th National Convention of SNT, Philadelphia, Penn., USA, 19—23 października 1964.
51. A. Ryan, S. D. Summers, Microwaves Used to Observe Commutator and Slip Ring Surfaces during Operation, Electrical Engng, 73, 3, 251—257, 1954.
52. Shinichi Sasaki, Automatic Moisture Content Determination and Control Apparatus, patent USA nr 3034046, 8 maja 1962.
53. G. E. Shafer, R. R. Bowman, A Modulated Sub-Carrier Technique of Measuring Microwave Attenuation, Proc. IEE Suppl. 23 cz. B, 783—786, maj 1962.
54. R. C. Stinebring, R. H. Harrison, Microwave and Low Frequency Ultrasonic Testing of Rocket Materials, 23-th National Convention of SNT, Cleveland, Ohio, USA, 21—25 października 1963.
55. S. Stuchły, A. Kraszewski, Sposób określania zawartości wody w ciałach stałych, cieczach i gazach za pomocą mikrofal i układ do stosowania tego sposobu, patent PRL nr 51731, 3 lutego 1965.

56. S. Stuchły, A. Kraszewski, Application of Microwave for Moisture Content Measurement in Nonconductive Materials, Internationales Symp. über Fragen der Physik bei höchsten Frequenzen, Berlin, 13—16 października 1965.
57. S. Stuchły, A. Kraszewski, M. Rzepecka, Mikrofalowy modulator amplitudy, Rozprawy Elektrotechniczne, 12, 2, 403—430, 1966.
58. S. Stuchły, A. Kraszewski, Pomiary wilgotności ciał stałych i cieczy metodą mikrofalową, PAK, 2, 51—54, 1966, i 4, 112—117, 1966.
59. S. Stuchły, J. Włodek, Pomiar tłumienia w zakresie mikrofal, Przegląd Elektroniki, 3, 147—153, 1966.
60. S. Stuchły, J. Włodek, Accurate Microwave Attenuation and Insertion Loss Measurements, Colloquium on Microwave Communication, Budapest, 19—22 kwietnia 1966.
61. S. Stuchły, A. Kraszewski, Pomiar wilgotności niektórych substancji stałych metodą mikrofalową, PAK, 8/9, 327—328, 1966.
62. S. Stuchły, Zastosowanie mikrofal do nieniszczących badań materiałów, PAK, 6, 189—192, 1966, i 10, 442—445, 1966.
63. S. Stuchły, A. Kraszewski, Microwave Methods for Measuring Non-Electrical Quantities, IMEKO Symp. on Microwave Measurement, Budapest, 18—20 października 1966.
64. S. Stuchły, A. Kraszewski, Sposób ciągłego i bezstykowego pomiaru średnic drutów i prętów metalowych i urządzenie do stosowania tego sposobu, zgłoszenie patentowe PRL nr P-116724, 4 października 1966.
65. S. Stuchły, A. Kraszewski, Microwave Methods and Instruments for Continuous Measurements and Control in Industrial Processes, referat wygłoszony na XII Międzynarodowym Naukowym Kollokwium w Ilmenau, NRD, 11—15 września 1967.
66. S. Stuchły, A. Kraszewski, Sposób ciągłego i bezstykowego pomiaru grubości blachy metalowej i urządzenie do stosowania tego sposobu, zgłoszenie patentowe PRL nr P-124109, 15 grudnia 1967.
67. S. Stuchły, A. Kraszewski, Mikrofalowe metody i przyrządy pomiarowe do pomiarów i kontroli ciągłych procesów przemysłowych, PAK, 5, 193—197, 1968.
68. S. Stuchły, J. Kaliński, Sposób automatycznej regulacji kąta przesunięcia fazowego między sygnałami mikrofalowymi w kanale nośnej i podnośnej oraz układ do realizacji tego sposobu w mikrofalowych układach pomiarowych, zgłoszenie patentowe PRL nr P-128359, 29 lipca 1968.
69. S. Stuchły, J. Kaliński, M. Rzepecka, Sposób automatycznego równoważenia mostka mikrofalowego w mikrofalowych miernikach grubości blachy i urządzenie do stosowania tego sposobu, zgłoszenie patentowe PRL, nr P-129394, 5 października 1968.
70. S. Summerhill, Microwaves and Moisture in Building Research, Brit. Commun. and Electronics, 11, 11, 419—422, 1964.
71. H. K. Tang, Microwave Inspection of Ablative Cork-Clad Missile Shell, Spring National Convention of the SNT, Los Angeles, Cal., USA, 16—19 marca 1964.
72. H. B. Taylor, Microwave Moisture Measurements, Industrial Electronics, 3, 2, 66—72, 1965.
73. A. Watson, The Non-Destructive Measurement of Watercontent by the Microwave Absorption Method, C.I.B. Bull., 3, 156, 1960.
74. A. Watson, Measurement and Control of Moisture Content by Microwave Absorption, International Symposium on Humidity and Moisture — American Society of Heating Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, New York 1963.
75. A. Watson, B. W. Moss, Microwave and Moisture in Building Research, Brit. Commun. and Electronics, 11, 11, 778—781, 1964.
76. B. O. Weinschel, An Accurate Attenuation Measuring System with Great Dynamic Range, The Microwave Journal, 4, 77—83, wrzesień 1961.
77. B. O. Weinschel, Microwave Measurement Applied to Nonmicrowave Uses, The Microwave Journal, 9, 2, 102, luty 1966.
78. C. B. Zehnder, Application of the Combination Microwave-Gamma Ray Gauge to Wood Chip Weight and Moisture Measurement, Pulp and Paper Magazine of Canada, 10, 678—688, 1967.

J. KALIŃSKI

STABILIZATION OF SIGNAL LEVEL IN MICROWAVE MEASURING SET-UPS
WITH THE DOUBLE MODULATION METHOD

Summary

The first part of the article briefly deals with the applications of microwave radiation for nondestructive testing of materials and with the requirements for microwave set-ups in this domain of applications. The requirements have been defined which ought to be met by the features of microwave set-ups that constitute part and parcel of instruments for monitoring and automatic control of industrial technological processes. The influence of the set-up components on the precision of measurements has been discussed on the example of four basic microwave set-ups. The problem of how the variations in the parameters of microwave devices — in particular the generator and the detector — influence the precision of measurements and the comparability of the results obtained at various periods of time and in various environment and supply conditions have been discussed in more detail.

The second part of the article presents the new method of the multiple reduction of the dependence of measurement results on the generator output level stability and the efficiency of detection. The method consists in the automatic modulation factor control by means of a low frequency signal. The modulation is adapted to the temporary generator output level and to the temporary efficiency of detection so as to retain a constant resultant set-up sensitivity for the variation of measured modulation within the measuring zone. A method of obtaining the control signal controlling the variations of modulation factor has been given.

The theoretical part gives the relations defining the output signal of the linear detector, which receives two carrier wave signals having the same pulsation ω , either of which is modulated with a low frequency signal having a different pulsation Ω_1 and Ω_2 [3]. A relation showing the correctness of the method applied has been arrived at. Certain basic relations have been discussed.

Finally the experiment data obtained in a microwave measuring set-up with modulated subcarrier system have been given.

J. KALIŃSKI

LA STABILISATION DU NIVEAU DU SIGNAL DANS DES CIRCUITS
HYPERFRÉQUENCES DE MESURE D'APRÈS LA MÉTHODE DE LA
MODULATION A DEUX REPRISES

Résumé

Dans la première partie de l'article on a présenté brièvement les applications du rayonnement hyperfréquence aux essais non destructifs des matériaux, ainsi que des exigences posées aux circuits hyperfréquences dans ce domaine des applications. On a déterminé un ensemble des propriétés des circuits hyperfréquences, qui constituent une partie intégrale des dispositifs servant à contrôler et régler automatiquement le cours d'industriels processus technologiques. Sur des exemples de quatre principaux circuits hyperfréquences on a étudié l'influence des composantes du circuit sur l'exactitude des mesures. On a analysé plus largement l'influence des variations des paramètres des éléments hyperfréquences, en particulier du générateur et du détecteur, sur l'exactitude des mesures et sur la comparabilité des résultats obtenues dans de différentes durées de temps et dans de différentes conditions de l'entourage et de l'alimentation.

Dans la seconde partie de l'article on a présenté la nouvelle méthode de réduire bien des fois la dépendance des résultats des mesures de la stabilité du niveau de puissance du générateur ainsi que du rendement du détecteur. La méthode consiste à l'adaptation automatique de la profondeur de modulation du signal hyperfréquence à l'aide du signal basse fréquence au niveau instantané de puissance du générateur et au rendement instantané du détecteur de telle façon, qu'on pourrait maintenir la stabilité de la sensibilité résul-

tante du circuit malgré des variations de l'atténuation mesurée dans la plage de mesure. On a donné le moyen d'obtenir le signal de régulation dirigeant les variations du coefficient de modulation.

Dans la partie théorique on a présenté les dépendances déterminant le signal de sortie du détecteur linéaire, à qui on a amené les deux signaux de l'onde porteuse ayant la même pulsation ω ; chacun de ces signaux est modulé par un signal basse fréquence ayant une pulsation différente: Ω_1 et Ω_2 [3]. On a déduit la dépendance prouvant la justesse de la méthode utilisée. On a effectué une discussion de quelques dépendances principales.

Enfin on a présenté les résultats expérimentaux, obtenus dans le système de mesure de l'atténuation hyperfréquence d'après la méthode de modulation de l'amplitude dans la voie auxiliaire.

Е. КАЛИНСКИ

СТАБИЛИЗАЦИЯ УРОВНЯ СИГНАЛА В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ СВЕРХВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ ПО МЕТОДУ ДВУХКРАТНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Резюме

В первой части статьи рассмотрены вкратце применения излучения СВЧ для неразрушающих испытаний материалов, а также требования, предъявляемые цепям СВЧ в этой области применений. Определен комплект свойств, которыми должны отличаться цепи СВЧ, составляющие интегральную часть устройств для контроля и автоматической регулировки хода промышленных технологических процессов. Приводя в качестве примера четыре основные цепи СВЧ, рассмотрено влияние составных элементов цепи на точность измерений. Рассмотрено шире воздействие изменений параметров элементов СВЧ, в особенности генератора и детектора, на точность измерений и сравнимость результатов, получаемых в различные периоды и в разных условиях окружающей среды и питания.

Во второй части статьи был представлен новый метод многократного уменьшения зависимости результатов измерений от стабильности уровня мощности генератора и коэффициента детекции демодулятора. Метод заключается в автоматической регулировке глубины модуляции сигнала СВЧ сигналом низкой частоты в зависимости от мгновенного уровня мощности генератора и мгновенного коэффициента детекции демодулятора таким образом, чтобы сохранить постоянство результирующей чувствительности схемы при изменениях измеряемого затухания в измерительной области. Приведен способ получения регуляционного сигнала, управляющего изменениями коэффициента глубины модуляции.

В теоретической части статьи приведены зависимости, определяющие выходной сигнал линейного детектора, к которому поданы два сигнала несущей волны этой же самой пульсации ω , каждый из которых модулирован сигналом низкой частоты различной пульсации Ω_1 и Ω_2 [3]. Выведена зависимость, обосновывающая правильность применяемого метода. Произведен анализ некоторых основных зависимостей.

В окончании приведены экспериментальные результаты, полученные в схеме для измерения затухания СВЧ по методу модулирования амплитуды в вспомогательном канале.

Optimalizacja układu do pomiaru słabych pól magnetycznych metodą kompensacyjną z cewką solenoidalną

LUDWIK REFEROWSKI (GDAŃSK)

Katedra Miernictwa Elektrycznego Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 3.10.1968

W pracy rozpatrzono warunki prawidłowego pomiaru słabych pól magnetycznych metodą kompensacyjną z cewką solenoidalną. Określono kryteria doboru galvanometru zapewniające maksymalną czułość pomiaru w układzie zwykłym oraz w układzie z wyłącznikiem w obwodzie cewki czujnikowej. Dla solenoidalnej cewki kompensującej wyznaczono optymalną wartość stosunku jej długości do średnicy przy założeniu, że niejednorodność pola w obszarze cewki czujnikowej nie przekracza 1‰. Dla określonego stosunku 4,5 dobrano wymiary cewki czujnikowej tak, by dla równości pola badanego i kompensującego wypadkowy strumień sprzężony z cewką był równy zeru. Rozpatrzono również wpływ uzwojenia solenoidalnej cewki kompensującej na wartość natężenia pola w obszarze cewki czujnikowej. Omówiono zakłócenia występujące przy określaniu stanu równowagi, spowodowane różnicą stałych czasowych cewki kompensującej i układu cewek wytwarzających badane pole magnetyczne. Podano sposób eliminacji tych zakłóceń. Przeprowadzono porównanie solenoidalnej cewki kompensującej z cewką w układzie Helmholtza. Określono całkowity uchyb pomiaru oraz granice stosowności układu. Przy pomiarze prądu cewki kompensatorem uchyb pomiaru nie przekracza 1‰ w obszarze od 2 do 8000 A/m.

1. WSTĘP

Natężenie pola magnetycznego może być określone drogą obliczeniową jedynie dla przewodników i cewek o prostych formach geometrycznych. Poważne trudności nastręcza jednak uwzględnienie zakłóceń w rozkładzie pola wywołanych obecnością mas ferromagnetycznych. Zakłócenia tego typu są szczególnie groźne dla obiektów o dużej przestrzeni probierczej. W przypadku tym może wystąpić magnesujące działanie konstrukcji stalowych budynku. Określenie rzeczywistego rozkładu natężenia pola w przestrzeni probierczej może być wówczas wykonane jedynie drogą pomiarową.

Interesującą nas wartość pola H określamy z pomiaru indukcji B oraz przenikalności magnetycznej μ . Zagadnienie upraszcza się znacznie w ośrodku powietrznym, gdzie $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. Istnieje szereg urządzeń do pomiaru indukcji, których działanie oparte jest na zasadzie elektromagnetycznej, indukcyjnej, elektrodynamicznej oraz na zmianach własności niektórych materiałów pod wpływem pola badanego. Wybór właściwego urządzenia podyktowany jest wartością natężenia pola badanego, wymaganą dokładnością pomiaru, wymiarami obszaru badanego i czujnika, oraz kosztem aparatury.

Przy pomiarach słabych pól magnetycznych często stosuje się układ cewki czujnikowej współpracującej z galvanometrem balistycznym. Wykorzystuje się tu zjawisko induko-

wania *SEM* w cewce czujnikowej przy zmianie strumienia magnetycznego. Wyróżniamy przy tym metodę odchyłową, którą stosuje się w pomiarach technicznych, oraz dokładniejszą metodę kompensacyjną przy pomiarach laboratoryjnych. Zalety metody kompensacyjnej wynikają przede wszystkim z eliminacji uchybu odczytu występującego w metodzie odchyłowej oraz niezależności pomiaru od zmian czułości układu. Przy starannie wykonanych pomiarach uchyb może nie przekroczyć wartości 1%.

Przy analizie pomiarów słabych pól metodą kompensacyjną [12] rozważano dotychczas zachowanie się cewki w postaci pętli kołowej i podwójnej w układzie Helmholtza, pominięto natomiast cewkę solenoidalną. Celem niniejszej pracy jest ustalenie dla układu z cewką solenoidalną warunków zapewniających optymalną czułość i dokładność pomiaru oraz określenie zakresu stosowalności tej metody.

2. ZASADA DZIAŁANIA UKŁADU KOMPENSACYJNEGO

Urządzenia do pomiaru pola metodą kompensacyjną możemy podzielić na dwie grupy [10], w zależności od miejsca przeprowadzonej kompensacji.

1. Kompensacja pola badanego odbywa się w miejscu pomiaru przez wytworzenie za pośrednictwem cewki kompensującej pola o tej samej wielkości, lecz przeciwnym kierunku. Równoczesna i jednakowa zmiana wartości natężenia pola badanego i kompensującego nie powoduje powstania *SEM* w uzwojeniu cewki czujnikowej.

2. Kompensacja pola badanego odbywa się poza miejscem pomiaru. W tym przypadku stosuje się dwie identyczne cewki czujnikowe, z których jedna umieszczona jest w polu badanym, druga w polu wytworzonym przez cewkę kompensującą umieszczoną w pewnej odległości od miejsca pomiaru. Równoczesna zmiana kierunku pola badanego i kompensującego powoduje powstanie w uzwojeniach cewek czujnikowych zanikających w czasie *SEM* równych co do wartości, lecz skierowanych przeciwnie.

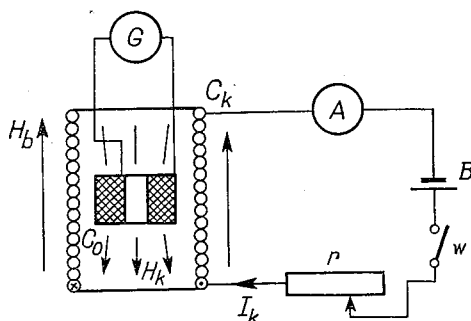
Odmiana pierwsza metody kompensacyjnej ze względu na dużą objętość cewki kompensującej nadaje się do pomiarów natężenia pola układów o znacznych rozmiarach. Zaletą jej jest stosowanie tylko jednej cewki czujnikowej. Odmiany metody drugiej pozwalają na wykonanie pomiarów w układach o znacznie mniejszych rozmiarach. Główną wadę stanowi tutaj trudność wykonania dwóch identycznych cewek czujnikowych oraz dwukrotnie mniejsza czułość układu pomiarowego.

Schemat ideowy układu z kompensacją pola badanego w miejscu pomiaru przedstawiony jest na rys. 2.1. Kierunek prądu I_k przepływającego przez cewkę kompensującą C_k dobiera się tak, by natężenie pola H_k przez nią wytworzone było skierowane przeciwnie do składowej natężenia pola badanego H_b wzdłuż osi cewki kompensującej. W przypadku tym cewka czujnikowa C_o znajduje się w wypadkowym polu magnetycznym $H_w = H_b - H_k$. Równoczesna zmiana natężenia pola badanego i kompensującego powoduje powstanie w cewce czujnikowej zanikającej w czasie siły elektromotorycznej e_t określonej zależnością

$$e_t = - \frac{d(\Psi_b - \Psi_k)}{dt} \quad (2.1)$$

Przy równości strumieni magnetycznych sprzężonych z cewką czujnikową $\Psi_b = \Psi_k$ równoczesna i jednakowa zmiana natężenia pola H_b i H_k nie spowoduje zaindukowania *SEM*

w uzwojeniu cewki czujnikowej. Warunek ten można stwierdzić za pośrednictwem galwanometru G . Równoczesna zmiana natężenia pola badanego i kompensującego może być zrealizowana przez półobrót cewki czujnikowej. Rozwiązanie takie stosuje się przy



Rys. 2.1. Schemat ideowy układu z kompensacją pola badanego w miejscu pomiaru

miarze pola ziemskiego. Jeżeli natomiast pole badane H_b wywołane jest przepływem prądu I_b przez układ cewek probierczych, to zmiana pola badanego i kompensującego może być wywołana przez równoczesne włączenie lub wyłączenie obu prądów bądź też przez zmianę kierunku ich przepływu. Wartość prądu I_k nastawia się za pośrednictwem opornika r tak, by równoczesna zmiana pola H_b i H_k nie spowodowała dostrzegalnego odchylenia plamki galwanometru. Jeżeli oznaczyć przez H_o natężenie pola w środku cewki kompensującej, to w warunkach kompensacji składowa osiowa pola badanego H_b może być określona z zależności:

$$H_b = H_o \quad (2.2)$$

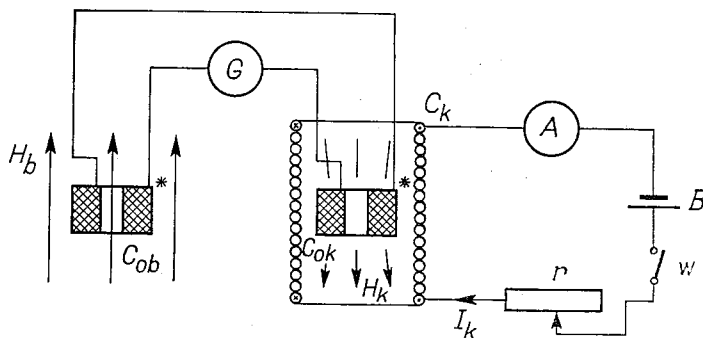
przy spełnieniu następujących warunków:

1. Pole mierzone jest jednorodne lub liniowo zmienne w obszarze cewki czujnikowej.
2. Dla danej cewki kompensującej wymiary cewki czujnikowej są tak dobrane, że równość składowej osiowej natężenia pola badanego i pola cewki kompensującej w środku układu pociąga za sobą równość strumieni skojarzonych z cewką czujnikową.

Druga odmiana układu pomiarowego z kompensacją pola badanego poza miejscem pomiaru posiada szereg wariantów [10]. Schemat ideowy jednego z nich przedstawiony jest na rys. 2.2. W układzie tym zastosowano dwie cewki czujnikowe C_{ob} oraz C_{ok} połączone przeciwsobnie z galwanometrem G . Równoczesna zmiana natężenia pola H_b i H_k indukuje siły elektromotoryczne w obu cewkach. Przy odpowiednim jednak doborze wymiarów cewek czujnikowych i równej liczbie zwojów nie nastąpi odchylenie plamki galwanometru w przypadku gdy spełniona jest zależność 2.2.

W porównaniu z poprzednio podaną metodą układ ten pozwala przeprowadzać pomiary w obszarze o znacznie mniejszych wymiarach. Istnieje natomiast obawa wprowadzenia dodatkowego uchybu na skutek trudności wykonania dwóch cewek czujnikowych o identycznych wymiarach. Różnicę w konstrukcji obu cewek możemy jednak łatwo wykryć przez zmianę miejsc cewek czujnikowych i powtórzenie pomiaru.

W przypadku otrzymania rozbieżności wyników należy przeprowadzić wyrównanie cewek czujnikowych dowijając do jednej z nich dodatkową liczbę zwojów tak dobraną, by uzyskać całkowitą zgodność wyników przy zmianie położenia cewek czujnikowych.



Rys. 2.2. Schemat ideowy układu z kompensacją pola badanego poza miejscem pomiaru

W schematach ideowych przedstawionych na rysunkach 2.1 i 2.2 do pomiaru natężenia prądu służył amperomierz. W pomiarach laboratoryjnych w celu zwiększenia dokładności stosuje się do pomiaru prądu kompensator.

3. CZUŁOŚĆ UKŁADU POMIAROWEGO

W warunkach niepełnej kompensacji wartość ładunku Q_d , który przepłynie przez galwanometr w układzie z rys. 2.1 przy równoczesnej zmianie natężenia pola badanego i kompensującego, wynosi

$$Q_d = k_s \frac{\mu_0 z s}{R} (H_b - H_o), \quad (3.1)$$

gdzie:

k_s — współczynnik zależny od sposobu zmiany pola badanego i kompensującego ($k_s = 1$ w przypadku włączenia lub wyłączenia prądu w cewce probierczej i kompensującej, $k_s = 2$ przy zmianie kierunku przepływu prądów w obu cewkach lub w przypadku półobrotu cewki czujnikowej),

z — liczba zwojów cewki czujnikowej,

s — czynny przekrój cewki,

R — całkowita oporność obwodu składającego się z oporności cewki czujnikowej R_c i oporności galwanometru R_g .

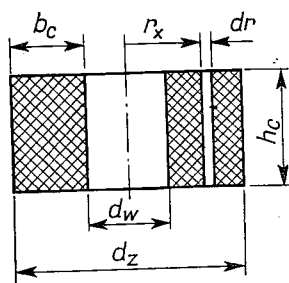
Oznaczając przez S_b czułość balistyczną galwanometru maksymalne odchylenie plamki α_1 spowodowane przepływem ładunku Q określić można ze wzoru

$$\alpha_1 = k_s \mu_0 \frac{z s}{R} S_b (H_b - H_o). \quad (3.2)$$

Stąd czułość układu pomiarowego S_M wynosi

$$S_M = \frac{\alpha_1}{H_b - H_o} = k_s \mu_0 \frac{z s}{R} S_b. \quad (3.3)$$

We wzorze tym wielkością stałą jest współczynnik k_s oraz przenikalność magnetyczna próżni μ_0 . Wybór przypadku $k_s = 2$ zwiększa dwukrotnie czułość układu pomiarowego, stosowanie takiego rozwiązania nie jest jednak zawsze możliwe. Zagadnienie to będzie jeszcze szerzej omówione w dalszej części pracy. Czułość układu pomiarowego rośnie liniowo wraz ze wzrostem czynnej powierzchni cewki czujnikowej. W konkretnym jednak zagadnieniu pomiarowym średnica zewnętrzna d_z i wysokość h_c są ściśle ograniczone. Wynika to z wymagania liniowości pola badanego w obszarze cewki czujnikowej.



Rys. 3.1. Oznaczenie wymiarów cewki czujnikowej

Czynny przekrój cewki czujnikowej przedstawionej na rys. 3.1 wyznacza się w oparciu o definicję strumienia sprzężonego Ψ . W polu jednorodnym lub liniowo zmiennym, strumień sprzężony z cewką kołową o liczbie zwojów z wynosi

$$\Psi = \sum_{i=1}^z \Phi_i = \mu_0 H_0 \pi \sum_{i=1}^z r_i^2, \quad (3.4)$$

gdzie Φ_i — strumień przenikający poszczególne pętle jednozwojowe o promieniu r_i . Przechodząc do wyrażenia całkowitego otrzymamy

$$\Psi = \mu_0 H_0 \pi \int_0^z r_x^2 dz = \mu_0 z H_0 s, \quad (3.5)$$

gdzie s — czynny przekrój cewki określony zależnością

$$s = \frac{\pi}{b_c} \int_{\frac{d_z}{2} - b_c}^{\frac{d_z}{2}} r_x^2 dr = \frac{\pi}{4} \left[(d_z - b_c)^2 + \frac{b_c^2}{3} \right]. \quad (3.6)$$

Wprowadzając oznaczenie pomocnicze $x = \frac{b_c}{d_z}$ otrzymamy

$$s = \frac{\pi}{12} d_z^2 (4x^2 - 6x + 3). \quad (3.7)$$

Oporność cewki czujnikowej R_c można określić znając jej wymiary oraz liczbę zwojów z

$$R_c = \frac{4d_{sr}}{k_i \gamma h_c b_c} z^2, \quad (3.8)$$

gdzie:

d_{sr} — średnia wartość średnicy cewki czujnikowej $d_{sr} = d_z - b_c$,

γ — przewodność elektryczna drutu nawojowego,

k_i — współczynnik izolacji $k_i = \frac{d^2}{d_i^2}$, przy czym d oraz d_i oznacza średnicę drutu nawojowego gołego i w izolacji.

Po uwzględnieniu $x = \frac{b_c}{d_z}$

$$R_c = \frac{4}{k_i \gamma h_c} \frac{1-x}{x} z^2. \quad (3.9)$$

Przy stałej wysokości cewki czujnikowej h_c i założeniu stałości współczynnika izolacji k_i , co jest w rzeczywistości słuszne przy stosunkowo niedużej różnicy średnic drutu nawojowego, można napisać

$$R_c = k_r \frac{1-x}{x} z^2, \quad (3.10)$$

gdzie czynnik stały $k_r = \frac{4}{k_i \gamma h_c}$.

Stąd

$$z = \sqrt{\frac{x R_c}{k_r (1-x)}}. \quad (3.11)$$

Jeśli przyjąć, że oporność cewki czujnikowej jest p razy większa od oporności galwanometru R_g , a więc

$$R_c = p R_g, \quad (3.12)$$

to całkowita oporność obwodu pomiarowego R wyniesie

$$R = (1+p) R_g. \quad (3.13)$$

Czułość balistyczna galwanometru S_b określona jest przez czułość prądową S_i , okres wahań nietłumionych T_0 oraz stopień tłumienia β , przy czym:

$$S_b = 2\pi \frac{S_i}{T_0} \exp \left[\frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \right] \quad \text{dla } \beta < 1,$$

$$S_b = 2\pi \frac{S_i}{T_0 e} \quad \text{dla } \beta = 1,$$

$$S_b = 2\pi \frac{S_i}{T_0} \exp \left[\frac{-\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{\beta^2-1}}{\beta} \right] \quad \text{dla } \beta > 1.$$

Stopień tłumienia β zależy od całkowitej oporności R w obwodzie galwanometru odniesionej do jego oporności krytycznej R_k oraz od stopnia tłumienia naturalnego β_0 , które wystąpi przy rozwartych zaciskach galwanometru.

Oznaczając

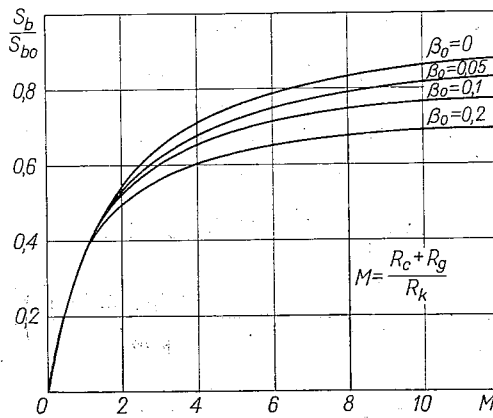
$$M = \frac{R}{R_k} = \frac{(1+p)R_g}{R_k} \quad (3.14)$$

otrzymamy

$$\beta = \beta_o + \frac{1-\beta_o}{M}. \quad (3.15)$$

Dla ułatwienia dalszej dyskusji wzoru (3.3) przyjmiemy zależność przybliżoną $\beta \approx \frac{1}{M}$.

Założenie to obarczone jest wprawdzie znacznym uchybem dla małych wartości β , wpływa ono jednak nieznacznie na zmianę czułości balistycznej S_b . Na rys. 3.2 przedstawiono dla



Rys. 3.2. Wykres zależności $\frac{S_b}{S_{bo}} = f(M)$ dla różnych wartości β_o

różnych wartości stopnia tłumienia naturalnego wykres względnej czułości balistycznej

$\frac{S_b}{S_{bo}} = f(M)$, przy czym $S_{bo} = \frac{2\pi S_i}{T_o}$ oznacza czułość balistyczną galwanometru nietłumionego. Dla $1 < M < 10$ uchyb względny wynikający z przyjęcia zależności uproszczonej nie przekracza 20% dla $\beta_o = 0,2$. Warunek $\beta_o < 0,2$ spełniony jest dla większości galwanometrów balistycznych.

Oznaczając przez n stosunek oporności krytycznej R_k do oporności galwanometru R_g

$$n = \frac{R_k}{R_g} \quad (3.16)$$

ze wzoru (3.14) można wyznaczyć współczynnik p , a mianowicie

$$p = nM - 1. \quad (3.17)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń pomocniczych do wzoru (3.3) otrzymamy

$$S_M = k_s \mu_o \frac{\pi d_z^2}{12\sqrt{k_r}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} (4x^2 - 6x + 3) \frac{\sqrt{nM-1}}{nM} \frac{S_b}{\sqrt{R_g}}. \quad (3.18)$$

Dla wyznaczenia optymalnych warunków pracy układu pomiarowego należy określić wartość poszczególnych czynników, przy których S_M osiąga maksimum. Ponieważ niezależnie od wartości pozostałych czynników maksimum to wystąpi zawsze dla $M > 1$, dlatego dalszą dyskusję przeprowadzimy w oparciu o wzór słuszny dla ruchu okresowego.

Przy stałej wartości średnicy d_z i założeniu $\beta \approx \frac{1}{M}$ dla $M > 1$ otrzymamy

$$S_M = k_M \frac{2\pi S_i}{T_o \sqrt{R_g}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} (4x^2 - 6x + 3) \frac{\sqrt{nM-1}}{nM} \exp\left(-\frac{\arctg \sqrt{M^2-1}}{\sqrt{M^2-1}}\right), \quad (3.19)$$

gdzie stały czynnik $k_M = \mu_o k_s \frac{\pi d_z^2}{12 \sqrt{k_r}}$.

W przypadku ogólnym, gdy mamy do wyboru galwanometry różnych typów, brak jest zależności wiążących ze sobą w sposób jednoznaczny wielkości S_i , R_g oraz T_o . Dlatego początkowo przyjmiemy stałość wyrażenia $\frac{S_i}{T_o \sqrt{R_g}}$, co jest słuszne tylko dla galwanometrów jednego typu fabrykacyjnego. Przy takim założeniu wyrażenie (3.19) jest iloczynem dwóch funkcji składowych czułości Y_x oraz Y_{nM} ;

$$Y_x = \sqrt{\frac{x}{1-x}} (4x^2 - 6x + 3), \quad (3.20)$$

$$Y_{nM} = \frac{\sqrt{nM-1}}{nM} \exp\left(-\frac{\arctg \sqrt{M^2-1}}{\sqrt{M^2-1}}\right). \quad (3.21)$$

Ostatecznie

$$S_M = k_M \frac{2\pi S_i}{T_o \sqrt{R_g}} Y_x Y_{nM}. \quad (3.22)$$

Optymalne wartości zmiennych x , M oraz n można wyznaczyć z warunku $\frac{\partial S_M}{\partial x} = 0$,

$\frac{\partial S_M}{\partial M} = 0$ oraz $\frac{\partial S_M}{\partial n} = 0$. Jeśli jednak założyć, że zmiana wielkości x nie wpływa na zmianę oporności cewki czujnikowej, to określenie optymalnych wartości poszczególnych wielkości można wyznaczyć z warunku $\frac{dY_x}{dx} = 0$ oraz $\frac{dY_{nM}}{dM} = 0$ dla różnych wartości parametru n . Warunek $M = \text{const}$ niezależnie od wartości x jest spełniony, jeśli przy zwiększeniu x stosować będziemy drut nawojowy o coraz to większej średnicy.

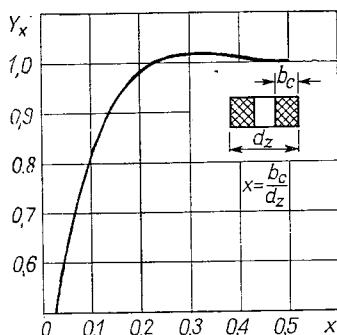
Pochodna $\frac{dY_x}{dx}$ wyrażenia (3.20) wyniesie

$$\frac{dY_x}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)^3}} (-16x^3 + 32x^2 - 18x + 3). \quad (3.23)$$

Wyrażenie to ma sens dla $0 < x < 1$. Warunek ten jest jednak zawsze spełniony, ponieważ ze względów konstrukcyjnych x zawiera się w przedziale $0 < x < 0,5$. Pochodna $\frac{dY_x}{dx} = 0$ dla pierwiastków równania $-16x^3 + 32x^2 - 18x + 3 = 0$. Wynoszą one

$$x = 0,317 \quad x = 0,500 \quad x_3 = 1,183.$$

Praktyczne znaczenie ma tylko pierwszy z tych pierwiastków, x_1 , dla którego wyrażenie (3.20) osiąga wartość maksymalną; wynosi ona $Y_{x_{max}} = 1,023$. Wykres zależności $Y_x = f(x)$ przedstawiony jest na rys. 3.3. Z wykresu można określić przedział zmian wielkości



Rys. 3.3. Wykres zależności $Y_x = f(x)$

x , w którym wartość wyrażenia (3.20) niewiele odbiega od wartości maksymalnej $Y_{x_{max}}$. Dla $0,22 < x < 0,50$ zmiana Y_x nie przekracza 2,5% wartości maksymalnej. Dla dalszych obliczeń przyjmować będziemy $x = 0,3$, wówczas $Y_{x=0,3} = 1,021$, co odpowiada praktycznie maksymalnej wartości wyrażenia (3.20).

Pochodna $\frac{dY_{nM}}{dM}$ wyrażenia (3.21) przy założeniu n jako parametru zmiennego wynosi

$$\frac{dY_{nM}}{dM} = \frac{\sqrt{nM-1}}{2nM(nM-1)(M^2-1)^2} (-nM^4 + 2M^3 - 2M + n + 2M(nM-1) \times \\ \times \sqrt{M^2-1} \arctg \sqrt{M^2-1}) \exp \left(-\frac{\arctg \sqrt{M^2-1}}{\sqrt{M^2-1}} \right). \quad (3.24)$$

Wyrażenie to ma sens dla $M > 1$ oraz $nM > 1$. Warunek ten jest spełniony, rozpatrujemy bowiem przypadek ruchu okresowego galwanometru, a więc $M > 1$. Ponieważ nie produkuje się galwanometrów o zewnętrznym oporze krytycznym ujemnym, wobec tego

$R_k \geq R_g$, stąd $n = \frac{R_k}{R_g} \geq 1$, a więc $nM > 1$. Pochodna $\frac{dY_{nM}}{dM} = 0$ w przypadku, gdy

$$\frac{\arctg \sqrt{M^2-1}}{\sqrt{M^2-1}} = \frac{n(M^2+1)-2M}{2M(nM-1)}. \quad (3.25)$$

Równanie powyższe można rozwiązać tylko metodami przybliżonymi. Rozwinięcie w szereg lewej strony równania prowadzi do skomplikowanego równania wyższego rzędu,

a to na skutek zbyt wolnej zbieżności szeregu $\frac{\arctg \sqrt{M^2-1}}{\sqrt{M^2-1}}$. Dlatego równanie (3.25)

zostało rozwiązane metodą kolejnych przybliżeń. Zestawienie wyników dla różnych wartości parametru n podano w tablicy 3.1. Wykres zależności $Y_{nM} = f(n, M)$ przedstawiono na rys. 3.4. Z danych tablicy 3.1 wynika, że dla $n > 1$ funkcje Y_{nM} osiągają swoje maksima

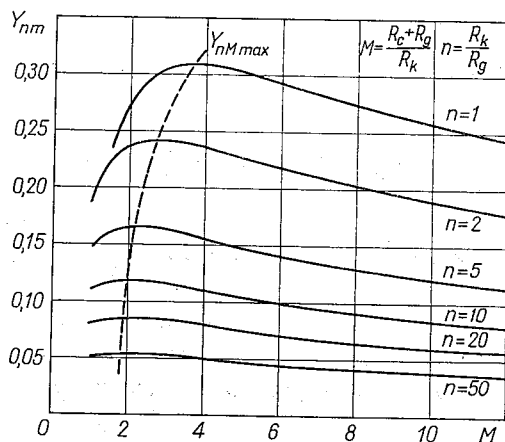
Tablica 3.1

Zestawienie wartości M oraz m spełniających równanie (3.25) przy różnych wartościach parametru n

$n = \frac{R_k}{R_g}$	1	2	5	10	20	50	∞
$M = \frac{R_c + R_g}{R_k}$	3,69	2,74	2,18	1,99	1,89	1,85	1,82
$m = \frac{R_c}{R_k}$	2,69	2,24	1,98	1,89	1,84	1,83	1,82
$Y_{nM \max}$	0,309	0,242	0,164	0,119	0,085	0,055	0

gdy $1,82 \leq M \leq 3,69$. Przedział ten można zawęzić jeszcze bardziej wprowadzając nową wielkość pomocniczą m , określoną zależnością

$$m = \frac{R_c}{R_k} = M - \frac{1}{n}. \quad (3.26)$$



Rys. 3.4. Wykres zależności $Y_{nM} = f(M, n)$ dla różnych wartości parametru n

W przypadku tym przedział wartości m , dla których funkcje Y_{nM} osiągają swoje maksimum, wynosi $1,82 \leq m \leq 2,69$. Krzywe Y_{nM} w pobliżu swoich wartości maksymalnych mają przebieg stosunkowo płaski, nie popełnimy więc wielkiego błędu zakładając, że optymalna wartość $m = 2$ niezależnie od wartości parametru n , a więc

$$R_c = 2R_k. \quad (3.27)$$

W tablicy 3.2 dokonano zestawienia dla różnych wartości parametru n , maksymalnych wartości funkcji $Y_{nM \max}$ oraz wartości przybliżonych Y_{n2} w przypadku $m = 2$. Uchyb wynikający z tego założenia upraszczającego nie przekracza w granicznym przypadku 2%.

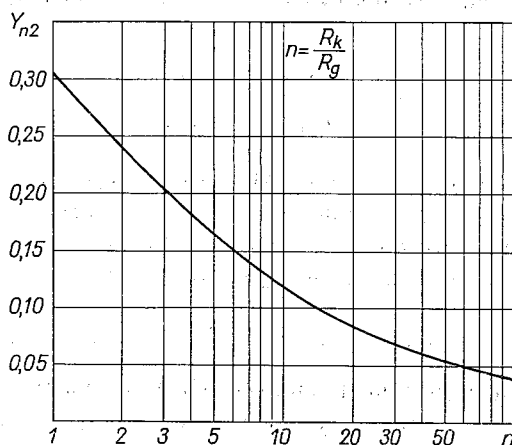
Tablica 3.2

 Zestawienie wartości Y_{nMmax} oraz Y_{n2} dla różnych wartości parametru n

$n = \frac{R_k}{R_g}$	1	2	5	10	20	50	100
Y_{nMmax}	0,309	0,242	0,164	0,119	0,085	0,055	0,039
Y_{n2}	0,305	0,241	0,164	0,119	0,085	0,054	0,038

Podstawiając do zależności (3.21) wyrażenie $M = m + \frac{1}{n}$ oraz przyjmując $m = 2$ otrzymamy

$$Y_{n2} = \frac{\sqrt{2n}}{2n+1} \exp \left(- \frac{\arctg \sqrt{3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}} \right). \quad (3.28)$$


 Rys. 3.5. Wykres zależności $Y_{n2} = f(n)$ w przypadku $R_c = 2R_k$

Wykres zależności (3.28) przedstawiony jest na rys. 3.5. Dla $n \geq 5$ można z uchybem mniejszym od 2% posługiwać się wzorem przybliżonym

$$Y_{n2} = 0,56 \frac{\sqrt{2n}}{2n+1}. \quad (3.29)$$

Po podstawieniu do wzoru (3.19) określonej poprzednio wartości $Y_{xmax} \approx 1$ oraz uwzględnieniu $Y_{nM} \approx Y_{n2}$ czułość układu wyniesie

$$S_M = k_M \frac{2\pi S_i}{T_o \sqrt{R_g}} Y_{n2} = k_M \frac{S_{bo}}{\sqrt{R_g}} Y_{n2}. \quad (3.30)$$

Na podstawie zależności (3.30) można wyciągnąć następujące wnioski:

1. W przypadku gdy mamy do wyboru szereg galwanometrów jednego typu fabrykacyjnego różniących się opornością R_g oraz czułością prądową S_i , to wobec warunku

$$\frac{S_i}{\sqrt{R_g}} = \text{const} \quad T_o = \text{const} \quad n = \frac{R_k}{R_g} = \text{const}.$$

czułość układu pomiarowego S_M jest niezależna od czułości użytego w pomiarach galwanometru przy założeniu, że oporność cewki czujnikowej jest dwukrotnie większa od oporności krytycznej galwanometru. Najkorzystniej jest wtedy wybrać galwanometr o najmniejszej czułości, który będzie również posiadał najmniejszą wartość oporności krytycznej. Cewka czujnikowa będzie miała wówczas stosunkowo najmniejszą liczbę zwojów nawiniętych drutem o stosunkowo największej średnicy. Upraszcza to wykonanie cewki czujnikowej.

2. W przypadku ogólnym, gdy mamy do wyboru kilka galwanometrów różnych typów, optymalne warunki pomiaru uzyskamy stosując galwanometr, dla którego wyrażenie

$\frac{2\pi S_i}{T_o \sqrt{R_g}} Y_{n2}$ osiąga maksimum. Zakładamy przy tym, że każdorazowo spełniony jest warunek $R_c = 2R_k$. W oparciu o wartości znamionowe galwanometrów obliczamy ich współczynniki dobroci k_d

$$k_d = \frac{2\pi S_i}{T_o \sqrt{R_g}} = \frac{S_{bo}}{\sqrt{R_g}}, \quad (3.31)$$

a wartości Y_{n2} określamy dla znanych n z wykresu podanego na rys. 3.5. Optymalne warunki pomiaru uzyskamy dla galwanometru o możliwie dużym współczynniku dobroci k_d oraz jak najmniejszej wartości współczynnika n . Zastosowany w pomiarach galwanometr powinien charakteryzować się możliwie wysoką czułością prądową, możliwie małą

opornością wewnętrzną, jak najmniejszym stosunkiem oporności $n = \frac{R_k}{R_g}$ oraz odpowiednią wartością okresu wahań nietłumionych. Czułość układu rośnie wprawdzie przy zmniejszaniu okresu wahań nietłumionych galwanometru, jednak dla wartości $T_o < 5$ s występują trudności właściwego określenia stanu równowagi.

Dla zobrazowania zagadnienia doboru galwanometru w tablicy 3.3 dokonano porównania czułości układu przy użyciu przyrządów o różnych charakterystykach [7]. Z wartości podanych w tablicy wynika, że przy doborze galwanometru nie należy się kierować wyłącznie czułością balistyczną galwanometru oraz jego opornością wewnętrzną. Można bowiem dla galwanometrów o identycznych opornościach R_g , lecz różnych czułościach balistycznych S_{bo} uzyskać prawie że jednakowe warunki pomiaru. Jako przykład mogą tu służyć galwanometry wyszczególnione w pozycji 3 i 4 oraz 5 i 6 tablicy 3.3. Podobnie uzyskuje się niekiedy prawie identyczną czułość układu dla galwanometrów o różnych wartościach wszystkich wielkości charakterystycznych. Jako przykład mogą tu służyć galwanometry wyszczególnione w pozycji 11 i 12.

Dla zorientowania się w wartości maksymalnej możliwej czułości układu pomiarowego oraz omówienia wpływu pominiętych w poprzednich rozważaniach czynników uwzględ-

dnimy we wzorze (3.30) współczynnik $k_M = \mu_o k_s \frac{\pi d_z^2}{24} \sqrt{k_i \gamma h_c}$, wówczas

$$S_M = \mu_o k_s \frac{\pi}{24} \sqrt{k_i \gamma} d_z^2 \sqrt{h_c} \frac{S_{bo}}{\sqrt{R_g}} Y_{n2}. \quad (3.32)$$

Tablica 3.3

Porównanie czułości układu $S_M = k_M \frac{S_{bo}}{\sqrt{R_g}} Y_{n2}$ — dla galwanometrów różnych typów

Lp.	R_g	R_{kz}	$n = \frac{R_k}{R_g}$	S_i	T_o	S_{bo}	$\frac{S_{bo}}{\sqrt{R_g}}$	Y_{n2}	$\frac{S_{bo}}{\sqrt{R_g}} Y_{n2}$	Firma
—	Ω	Ω	—	dZ/A	s	dz/C	$\frac{\text{dz}}{\text{C}\Omega^{1/2}}$	—	$\frac{\text{dz}}{\text{C}\Omega^{1/2}}$	—
1	50	500	11	$6,2 \cdot 10^9$	30	$1,3 \cdot 10^9$	$1,8 \cdot 10^8$	0,11	$21 \cdot 10^6$	Kipp & Zonen
2	50	1	1,0	$1,0 \cdot 10^9$	30	$2,1 \cdot 10^8$	$3,7 \cdot 10^7$	0,30	$11 \cdot 10^6$	„
3	15	150	11	$6,6 \cdot 10^8$	8	$5,2 \cdot 10^8$	$1,3 \cdot 10^8$	0,11	$15 \cdot 10^6$	Siemens Halske
4	15	0	1,0	$2,0 \cdot 10^8$	8	$1,6 \cdot 10^8$	$4,1 \cdot 10^7$	0,30	$13 \cdot 10^6$	„
5	300	100.000	334	$5,0 \cdot 10^{10}$	7	$4,5 \cdot 10^{10}$	$2,7 \cdot 10^9$	0,021	$57 \cdot 10^6$	Kipp & Zonen
6	300	700	3,3	$5,0 \cdot 10^9$	7	$4,5 \cdot 10^9$	$2,7 \cdot 10^8$	0,20	$54 \cdot 10^6$	„
7	28	95	4,4	$1,8 \cdot 10^8$	5	$2,3 \cdot 10^8$	$4,3 \cdot 10^7$	0,17	$7,4 \cdot 10^6$	Ruhrstrat
8	28	19	1,7	$1,1 \cdot 10^8$	5	$1,4 \cdot 10^8$	$2,6 \cdot 10^7$	0,26	$6,8 \cdot 10^6$	„
9	33	500	16	$3,3 \cdot 10^9$	18	$1,1 \cdot 10^9$	$2,0 \cdot 10^8$	0,093	$19 \cdot 10^6$	EAW
10	740	20.000	28	$1,2 \cdot 10^{10}$	7,5	$1,1 \cdot 10^{10}$	$3,9 \cdot 10^8$	0,073	$28 \cdot 10^6$	„
11	9,8	20	3	$3,4 \cdot 10^6$	4	$5,4 \cdot 10^5$	$1,7 \cdot 10^6$	0,21	$3,6 \cdot 10^5$	RFT
12	150	5000	34	$4,3 \cdot 10^7$	4	$6,8 \cdot 10^7$	$5,6 \cdot 10^6$	0,065	$3,6 \cdot 10^5$	„

Określimy teraz wpływ zmiany współczynnika izolacji k_i , który był poprzednio przyjęty jako wartość stała.

Średnicę drutu nawojowego określamy z zależności

$$d = \sqrt[4]{\frac{4k_i d_z^2 h_c (1-x)x}{\gamma R_c}}. \quad (3.33)$$

Przy dyskusji składowej czułości Y_x określonej wzorem (3.20) założono zmianę x w przedziale $0,22 < x < 0,5$. W oparciu o wzór (3.33) wyznaczmy dla tego przypadku stosu-

nek średnic $\frac{d_{max}}{d_{min}}$ przy stałych wymiarach zewnętrznych cewki czujnikowej oraz $R_c = \text{const}$

$$\frac{d_{max}}{d_{min}} = \sqrt[4]{\frac{k_{i1}(1-x_{max})x_{max}}{k_{i2}(1-x_{min})x_{min}}}, \quad (3.34)$$

gdzie k_{i1} oraz k_{i2} współczynnik izolacji odpowiadający maksymalnej i minimalnej średnicy drutu nawojowego.

Podstawiając $x_{max} = 0,50$ oraz $x_{min} = 0,22$ otrzymamy

$$\frac{d_{max}}{d_{min}} = 1,10 \sqrt[4]{\frac{k_{i1}}{k_{i2}}}.$$

Przy dyskusji składowej czułości Y_{n2} przedział zmian $m = \frac{R_c}{R_k}$ wynosi $1,82 < m < 2,69$.

Z zależności (3.33) określimy dla tego przypadku stosunek średnic $\frac{d_{max}}{d_{min}}$ przy stałych wymiarach zewnętrznych cewki czujnikowej oraz $x = \text{const}$

$$\frac{d_{max}}{d_{min}} = \sqrt[4]{\frac{k_{i1}m_{max}}{k_{i2}m_{min}}}. \quad (3.35)$$

Podstawiając $m_{max} = 2,69$ oraz $m_{min} = 1,82$ otrzymamy

$$\frac{d_{max}}{d_{min}} = 1,11 \sqrt[4]{\frac{k_{i1}}{k_{i2}}}.$$

Zmiana średnicy drutu nawojowego w obu tych przypadkach wynosi około 10%. Z danych katalogowych drutów nawojowych emaliowanych wynika, że zmiana współczynnika k_i w tym przypadku nie przekracza praktycznie wartości 3% [14]. Wpływ tych zmian na czułość układu jest więc pomijalny.

Czułość charakterystyczną S_M^* dla użytego w pomiarach galwanometru określamy jako

$$S_M^* = \frac{S_M}{d_z^2 \sqrt{n_c}}. \quad (3.36)$$

Z zależności (3.32) otrzymamy

$$S_M^* = \mu_o k_s \frac{\pi}{24} \sqrt[4]{\frac{S_{bo}}{k_i \gamma \sqrt{R_g}}} Y_{n2}. \quad (3.37)$$

Dla wyznaczenia granicznej czułości charakterystycznej S_M^* należy przyjąć wartości liczbowe składników występujących we wzorze (3.37).

Dla pomiarów natężenia pola pochodzenia prądowego stosuje się zwykle układ, w którym zmiana natężenia pola badanego i kompensującego następuje przez wyłączenie prądu w obu cewkach, a więc $k_s = 1$. Minimalna wartość przewodności drutów nawojowych $\gamma = 57 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega m}$ [14]. Jeśli przyjąć współczynnik izolacji $k_i = 0,7$ (dla drutów nawojowych o średnicy $d \approx 0,10$ mm) oraz opierając się o dane z tablicy 3.3 założyć,

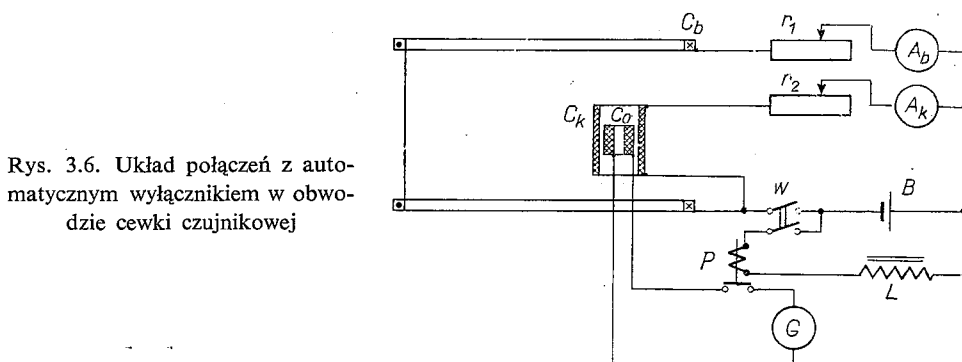
że dla galwanometrów wysokiej dobroci wyrażenie $\frac{S_{b0}}{\sqrt{R_g}} Y_{n2} \approx 60 \cdot 10^6 \frac{dz}{C\Omega^{\frac{1}{2}}}$, to wartość granicznej czułości charakterystycznej obliczonej ze wzoru (3.37) wyniesie:

$$S_M^* \approx 65 \cdot 10^3 \frac{dz}{\text{Am}^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.38)$$

Stąd graniczna czułość pomiaru

$$S_M \approx 65 \cdot 10^3 d_z^2 \sqrt{h_c}. \quad (3.39)$$

Dalsze zwiększenie czułości układu pomiarowego może być uzyskane przez zastosowanie automatycznego sterowania wyłącznika w obwodzie cewki czujnikowej [1]. Układ połączeń dla takiego przypadku jest pokazany na rys. 3.6. Ze wzorów (2.1) oraz (3.10)



Rys. 3.6. Układ połączeń z automatycznym wyłącznikiem w obwodzie cewki czujnikowej

wynika, że przy stałych wymiarach cewki czujnikowej można ją traktować jako źródło o sile elektromotorycznej e i oporności R_c , w którym obie wielkości zależą od liczby zwojów z . Źródło to połączone jest szeregowo z galwanometrem o oporności R_g . Przy określonych wymiarach cewki czujnikowej oraz stałej różnicy między natężeniem pola badanego i kompensującego wartość ładunku Q_d , który przepłynie przez galwanometr przy równoczesnej zmianie wartości pola badanego i kompensującego, zależeć będzie wyłącznie od liczby zwojów z cewki czujnikowej oraz całkowitej oporności obwodu $R = (1+p)R_g$.

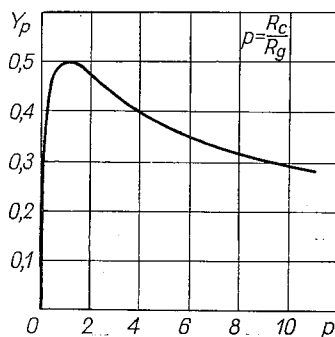
Zależność liczby zwojów od oporności cewki czujnikowej określona ze wzoru (3.8) wynosi $z = \sqrt{k_R p R_g}$, gdzie $k_R = \frac{k_i \gamma h_c b_c}{4 d_{sr}}$. Po podstawieniu do zależności (3.1) otrzymamy

$$Q_d = \frac{k}{\sqrt{R_g}} \frac{\sqrt{p}}{1+p} (H_b - H_o) = \frac{k}{\sqrt{R_g}} Y_p (H_b - H_o), \quad (3.40)$$

gdzie wartość stała $k = \mu_o k_s s \sqrt{k_R}$, a $Y_p = \frac{\sqrt{p}}{1+p}$.

Przebieg zależności $Y_p = f(p)$ przedstawiony jest na rys. 3.7. Maksymalna wartość ładunku Q_{max} przepłynie przez galwanometr o oporności R_g w przypadku $p = 1$ ($Y_p = 0,50$). Pomimo to czułość układu pomiarowego S_M będzie znikoma na skutek znacznego zmniejszenia się czułości balistycznej galwanometru przy ruchu przetłumionym. Jeśli jednak czas przepływu ładunku przez galwanometr t_Q jest znacznie mniejszy od

okresu wahań nietłumionych, to w czasie przepływu tego ładunku nastąpi niedostrzegalne jedynie odchylenie układu ruchomego galwanometru. Otwarcie obwodu pomiarowego za pośrednictwem styków przekaźnika P po czasie t_p nieco tylko większym od t_Q pozwoli



Rys. 3.7. Wykres zależności $Y_p = f(p)$

osiągnąć znacznie większe odchylenie układu ruchomego, które będzie zależeć od czułości balistycznej S_{bn} przy tłumieniu naturalnym. Ostatecznie czułość pomiaru S_{MP} omawianego układu wynosi

$$S_{MP} = k_M \frac{S_{bn}}{\sqrt{R_g}} Y_p. \quad (3.41)$$

Podstawiając $Y_p = 0,50$ oraz przyjmując $S_{bn} = 0,90 S_{bo}$ otrzymamy

$$S_{MP} = 0,45 k_M \frac{S_{bo}}{\sqrt{R_g}}. \quad (3.42)$$

W układzie z rys. 3.6 przekaźnik sterowany jest za pośrednictwem wyłącznika w , który wyłącza równocześnie prąd w cewce probierczej C_b i kompensującej C_k . Odpowiednie opóźnienie czasowe t_p otwarcia obwodu galwanometru może być nastawione przez zmianę indukcyjności L . Dla zobrazowania możliwości zwiększenia czułości opisanego układu

w stosunku do czułości układu zwykłego w tablicy 3.4 podano stosunek $\frac{S_{MP}}{S_M} = \frac{0,45}{Y_{n2}}$ dla

kilku galwanometrów. Z podanych w niej wartości wynika, że szczególnie korzystne warunki otrzymamy stosując galwanometr z poz. 5. Czułość układu wzrośnie około 20 razy. Na podstawie przeprowadzonej dyskusji oraz z porównania wartości podanych w tablicy 3.4 można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Zastosowanie układu z wyłącznikiem w obwodzie cewki czujnikowej przy odpowiednim doborze galwanometru pozwala znacznie powiększyć czułość układu, a tym samym obniżyć wydatnie dolną wartość zakresu pomiarowego.

2. Użyty w pomiarach galwanometr powinien się charakteryzować możliwie wysokim współczynnikiem dobroci $k_d = \frac{2\pi S_i}{T_o \sqrt{R_g}}$ oraz wysoką wartością oporności krytycznej R_k w stosunku do oporności galwanometru R_g . Oporność cewki czujnikowej R_c powinna być przy tym równa oporności galwanometru R_g .

Tablica 3.4

Porównanie czułości S_{MP} układu z wyłącznikiem w obwodzie galwanometru z czułością S_M układu zwykłego

Lp. z tablicy 3.3	R_g	R_{kz}	S_{bo}	$\frac{S_{MP}}{S_M}$	Firma
	Ω	Ω	dz/C	—	—
1	50	500	$1,3 \cdot 10^9$	4,0	Kipp & Zonen
5	300	100.000	$4,5 \cdot 10^{10}$	22	„
9	33	500	$1,1 \cdot 10^9$	4,8	EAW
10	740	20 000	$1,1 \cdot 10^{10}$	6,2	„
12	150	5000	$6,8 \cdot 10^7$	6,7	RFT

W tablicy 3.5 zostały zestawione wymagania dla układu zwykłego i z wyłącznikiem w obwodzie galwanometru, warunkujące uzyskanie optymalnej czułości układu pomiarowego.

Tablica 3.5

Zestawienie wymagań dla uzyskania optymalnej czułości układu pomiarowego

Rodzaj układu	Układ zwykły	Układ z wyłącznikiem w obwodzie galwanometru
Współczynnik dobroci $k_d = \frac{2\pi S_i}{T_o \sqrt{R_g}}$	możliwie duży	możliwie duży
Stosunek oporności krytycznej do oporności galwanometru $n = \frac{R_k}{R_g}$	możliwie mały	możliwie duży
Oporność cewki czujnikowej R_c	$R_c = 2R_k$	$R_c = R_g$

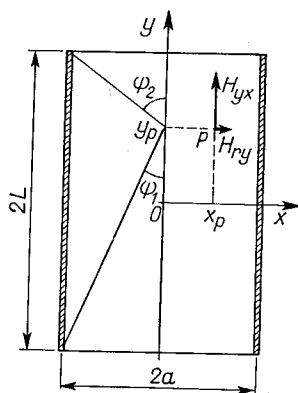
Ponieważ dokładność pomiaru natężenia słabych pól magnetycznych zależy w znacznym stopniu od uchybu nieczułości układu pomiarowego, należy szczególną uwagę zwrócić na właściwy dobór galwanometru i cewki czujnikowej w celu uzyskania możliwie dużej czułości układu.

4. POLE MAGNETYCZNE CEWKI SOLENOIDALNEJ

Warunkiem prawidłowego pomiaru natężenia pola jest jednoczesna równość natężenia pola badanego i kompensującego w środku układu oraz równość strumieni sprzężonych z cewką czujnikową. Warunek ten jest spełniony przy odpowiednim doborze wymiarów

cewki czujnikowej i kompensującej. Wymiary cewki kompensującej nie powinny być przy tym wiele większe od rozmiarów cewki czujnikowej.

Wobec symetrii osiowej cewki solenoidalnej natężenie pola magnetycznego w dowolnym punkcie P jej wnętrza jest określone przez składową osiową H_{yx} i promieniową H_{ry} (rys. 4.1).



Rys. 4.1. Określenie składowych natężenia pola wewnątrz cewki solenoidalnej

Dla solenoidu jednowarstwowego, przy założeniu, że mamy do czynienia z obwodem liniowym (przekrój przewodnika jest nieskończenie mały), składowe natężenia pola w punkcie P określone są wzorami (4.1) i (4.2) przedstawionymi w postaci szeregów [4]

$$H_{yx} = \frac{I_z}{4L} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n n!} A_{2n+1} x^{2n}, \quad (4.1)$$

$$H_{ry} = \frac{I_z}{4L} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n (n-1)!} A_{2n} x^{2n-1}, \quad (4.2)$$

gdzie:

I — prąd solenoidu,

z — liczba zwojów,

$2L$ — wysokość solenoidu,

x — odległość punktu P od osi solenoidu,

A_{2n+1} , A_{2n} — współczynniki zależne od wymiarów solenoidu i położenia punktu P .

Cztery kolejne współczynniki A_{2n+1} we wzorze (4.1) określone są wzorami

$$A_1 = \cos \psi_1 + \cos \psi_2,$$

$$A_3 = -\frac{1}{2a^2} (\cos \psi_1 \sin^4 \psi_1 + \cos \psi_2 \sin^4 \psi_2),$$

$$A_5 = \frac{1}{8a^4} [(3 \cos \psi_1 - 7 \cos^3 \psi_1) \sin^6 \psi_1 + (3 \cos \psi_2 - 7 \cos^3 \psi_2) \sin^6 \psi_2],$$

$$A_7 = -\frac{35}{256a^6} [(5 \cos \psi_1 - 30 \cos^3 \psi_1 + 33 \cos^5 \psi_1) \sin^8 \psi_1 + \\ + (5 \cos \psi_2 - 30 \cos^3 \psi_2 + 33 \cos^5 \psi_2) \sin^8 \psi_2], \quad (4.3)$$

gdzie $\cos \Psi_1$, $\cos \Psi_2$ oraz $\sin \Psi_1$, $\sin \Psi_2$ określone z rysunku 4.1 wynoszą

$$\begin{aligned}\cos \Psi_1 &= \frac{L+y}{\sqrt{a^2+(L+y)^2}}; & \cos \Psi_2 &= \frac{L-y}{\sqrt{a^2+(L-y)^2}}; \\ \sin \Psi_1 &= \frac{a}{\sqrt{a^2+(L+y)^2}}; & \sin \Psi_2 &= \frac{a}{\sqrt{a^2+(L-y)^2}}.\end{aligned}$$

Po podstawieniu stałych A_{2n+1} do wzoru (4.1) ostateczny wzór na składową osiową natężenia pola H_{yx} wynosi

$$\begin{aligned}H_{yx} = \frac{I_z}{4L} & \left\{ \cos \Psi_1 + \cos \Psi_2 + \frac{3}{4} (\cos \Psi_1 \sin^4 \Psi_1 + \cos \Psi_2 \sin^4 \Psi_2) \frac{x^2}{a^2} + \right. \\ & + \frac{15}{64} [(3 \cos \Psi_1 - 7 \cos^3 \Psi_1) \sin^6 \Psi_1 + (3 \cos \Psi_2 - 7 \cos^3 \Psi_2) \sin^6 \Psi_2] \frac{x^4}{a^4} + \\ & + \frac{35}{256} [(5 \cos \Psi_1 - 30 \cos^3 \Psi_1 + 33 \cos^5 \Psi_1) \sin^8 \Psi_1 + \\ & \left. + (5 \cos \Psi_2 - 30 \cos^3 \Psi_2 + 33 \cos^5 \Psi_2) \sin^8 \Psi_2] \frac{x^6}{a^6} \right\}. \quad (4.4)\end{aligned}$$

Dla cewki nieskończenie długiej $\cos \Psi_1 = \cos \Psi_2 = 1$, a więc $A_1 = 2$. Dalsze stałe $A_{2n+1} = 0$.

Otrzymamy wówczas $H_\infty = \frac{I_z}{2L}$.

Kolejne współczynniki A_{2n} we wzorze (4.2) określone są zależnościami:

$$\begin{aligned}A_2 &= \frac{1}{2a} (\sin^3 \Psi_1 + \sin^3 \Psi_2), \\ A_4 &= \frac{1}{8a^3} [4(\sin^5 \Psi_1 + \sin^5 \Psi_2) + 5(\sin^7 \Psi_1 + \sin^7 \Psi_2)].\end{aligned} \quad (4.5)$$

Dla cewki nieskończenie długiej $\sin \Psi_1 = \sin \Psi_2 = 0$. Składowa promieniowa natężenia pola $H_r = 0$.

W omawianej metodzie pomiarowej wypadkowa SEM w cewce czujnikowej indukuje się jedynie w wyniku zmiany składowej osiowej natężenia pola. Dlatego w dalszych rozważaniach pominięta zostanie analiza wzoru określającego składową promieniową natężenia pola.

Dla punktów leżących wzdłuż osi symetrii cewki solenoidalnej ($x = 0$) zależność (4.4) uprości się do postaci

$$H_{y0} = \frac{I_z}{4L} \left(\frac{L+y}{\sqrt{a^2+(L+y)^2}} + \frac{L-y}{\sqrt{a^2+(L-y)^2}} \right). \quad (4.6)$$

Wprowadzając oznaczenia pomocnicze: współczynnik kształtu solenoidu $k = \frac{L}{a}$ oraz

względna współrzędną $\eta = \frac{y}{L}$ otrzymamy

$$H_{y0} = \frac{I_z}{4L} \left(\frac{k(1+\eta)}{\sqrt{1+k^2(1+\eta)^2}} + \frac{k(1-\eta)}{\sqrt{1+k^2(1-\eta)^2}} \right). \quad (4.7)$$

W środku cewki solenoidalnej ($\eta = 0$) natężenie pola H_o wynosi

$$H_o = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \frac{Iz}{2L}. \quad (4.8)$$

Stosunkową zmianę natężenia pola H_o określa współczynnik $C_k = \frac{H_o}{H_\infty} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

Zestawienie jego wartości w zależności od współczynnika kształtu solenoidu k podano w tablicy 4.1.

Tablica 4.1

Stosunkowa zmiana natężenia pola $C_k = \frac{H}{H_\infty}$ w zależności od współczynnika kształtu k

k	1	2	4	6	10	50
$C = \frac{H_o}{H_\infty}$	0,7071	0,8944	0,9701	0,9864	0,9950	0,9998
$k_H = \frac{H_\infty - H_o}{H_\infty}$	0,2929	0,1056	0,0299	0,0136	0,0050	0,0002

Zakładając, że natężenie pola H w środku danej cewki jest równe natężeniu pola H_∞ cewki nieskończenie długiej, popełnia się uchyb przybliżenia, który dla $k = 10$ wynosi jeszcze 5%. Z tego względu przy dokładnym wyznaczaniu wartości natężenia pola badanego układem kompensacyjnym należy posługiwać się wzorem ścisłym (4.8).

Na podstawie wzoru (2.2) dla stanu kompensacji otrzymamy

$$H_b = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \frac{Iz}{2L} \Big| = C_k \frac{Iz}{2L}. \quad (4.9)$$

Dla określenia zmian składowej osiowej pola H_{y_0} wzdłuż osi y sprowadzimy zależności (4.7) do postaci

$$H_{y_0} = H_o \frac{1}{2C_k} \left[\left(1 + \frac{1}{k^2(1+\eta)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{1}{k^2(1-\eta)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.10)$$

Rozwijając w szereg doprowadzimy ją do postaci

$$H_{y_0} = H_o(1 + Y_\eta), \quad (4.11)$$

przy czym Y_η określa poprawkę natężenia pola w dowolnym punkcie na osi y w stosunku do natężenia pola H_o w środku cewki. Można traktować ją jako względną wartość pola dodatkowego lub uważać za stopień niejednorodności pola wzdłuż osi y .

$$Y_\eta = -\frac{3}{2k^2} \left(1 - \frac{2}{k^2} + \frac{3}{k^4} - \frac{4}{k^6} + \right) \eta^2 - \frac{5}{2k^2} \left(1 - \frac{19}{4k^2} + \frac{13}{k^4} - \frac{475}{16k^6} + \right) \eta^4 + \\ - \frac{7}{2k^2} \left(1 - \frac{17}{2k^2} + \frac{293}{8k^4} - \frac{496}{4k^6} + \right) \eta^6. \quad (4.12)$$

Ostatecznie stopień niejednorodności pola Y_η wzdłuż osi y można zapisać w postaci

$$Y_\eta = A_{k1}\eta^2 + A_{k2}\eta^4 + A_{k3}\eta^6 = \sum_{n=1} A_{kn}\eta^{2n}. \quad (4.13)$$

Wzór ten uwzględniający człony do szóstego stopnia włącznie przy założeniu $\eta < 0,2$ oraz $k \geq 3$ wyznacza stopień niejednorodności pola z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

Zestawienie stałych A_{kn} dla różnych wartości współczynnika k podano w tablicy 4.2.

Tablica 4.2

 Stałe A_{kn} dla różnych wartości współczynnika k

k	A_{k1}	A_{k2}	A_{k3}
3	-0,0135	-0,144	-0,13
4	-0,0830	-0,117	-0,129
5	-0,0555	-0,0829	-0,0995
6	-0,0394	-0,0609	-0,0766
7	-0,0294	-0,0463	-0,0601
8	-0,0227	-0,0306	-0,0479

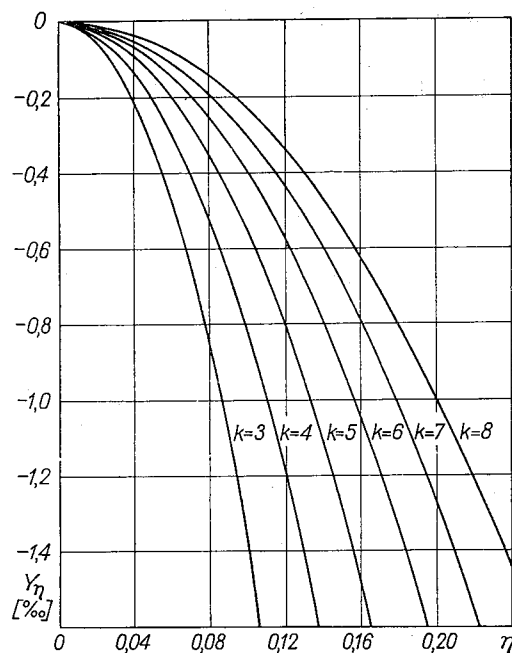
Zależności $Y_\eta = f(\eta)$ dla różnych wartości współczynnika k przedstawione są w postaci wykresów na rys. 4.2, a obliczone wartości zestawione są w tablicy 4.3. Z wykresu na rys. 4.2 można określić dla danego współczynnika k maksymalną wartość η_{max} , przy której stopień niejednorodności pola nie przekracza z góry założonej wartości. Dla pomiarów typu laboratoryjnego żądamy, by stopień niejednorodności pola Y_η nie przekraczał wartości 1‰.

Zbadamy teraz zmianę składowej osiowej natężenia pola H_{ox} dla punktów leżących na osi x . W przypadku tym

$$\cos\psi_1 = \cos\psi_2 = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}},$$

a zależność (4.4) można uprościć do postaci

$$H_{ox} = \frac{Iz}{2L} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{1}{(1+k^2)^2} \frac{x^2}{a^2} - \frac{15}{64} \frac{4k^2-3}{(1+k^2)^4} \frac{x^4}{a^4} + \right. \\ \left. + \frac{35}{256} \frac{18k^4-30k^2+5}{(1+k^2)^6} \frac{x^6}{a^6} - \right). \quad (4.14)$$



Rys. 4.2. Stopień niejednorodności $Y_\eta = f(\eta)$ dla różnych wartości współczynnika kształtu k

Tablica 4.3

Stopień niejednorodności składowej osiowej pola Y_η (%) wzdłuż osi y dla różnych wartości współczynnika k

$k \backslash \eta$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22
3	-0,05	-0,21	-0,50	-0,87	-1,38	—	—	—	—	—	—
4	-0,03	-0,13	-0,30	-0,51	-0,84	-1,20	-1,66	—	—	—	—
5	-0,02	-0,09	-0,21	-0,35	-0,57	-0,82	-1,12	-1,48	—	—	—
6	-0,016	-0,06	-0,15	-0,25	-0,40	-0,58	-0,80	-1,05	-1,35	-1,70	—
7	-0,012	-0,05	-0,11	-0,19	-0,30	-0,44	-0,60	-0,79	-1,01	-1,27	-1,56
8	-0,01	-0,04	-0,08	-0,14	-0,23	-0,34	-0,46	-0,61	-0,81	-0,98	-1,20

Wprowadzając do wzoru względną współrzędną $\sigma = \frac{x}{a}$, wyciągając przed nawias w mianownikach poszczególnych członów czynnik k^{4n} , po rozwinięciu w szereg wyrażeń typu $\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{-2n}$ oraz $\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ zależność (4.14) można doprowadzić do postaci

$$H_{ox} = H_o(1 + Y_\sigma), \quad (4.15)$$

gdzie stopień niejednorodności Y_σ wzdłuż osi σ wynosi

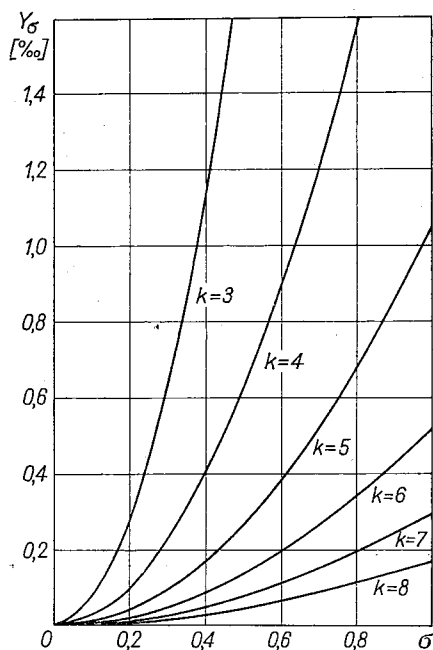
$$Y_\sigma = \frac{3}{4k^4} \left(1 - \frac{2}{k^2} + \frac{3}{k^4} - \frac{4}{k^6} + \right) \sigma^2 - \frac{15}{16k^6} \left(1 - \frac{19}{4k^2} + \frac{13}{k^4} - \frac{55}{2k^6} + \right) \sigma^4 + \frac{315}{128k^8} \left(1 - \frac{23}{3k^2} + \frac{563}{18k^4} - \frac{278}{3k^6} + \right) \sigma^6. \quad (4.16)$$

Ostatecznie

$$Y_\sigma = B_{k1}\sigma^2 + B_{k2}\sigma^4 + B_{k3}\sigma^6 = \sum_{n=1} B_{kn}\sigma^{2n}. \quad (4.17)$$

Wzór ten uwzględniający człony do szóstego stopnia włącznie przy założeniu $\sigma \leq 0,99$ oraz $k \geq 3$ określa stopień niejednorodności pola Y_σ wzdłuż osi σ z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

Zestawienie stałych B_{kn} dla różnych wartości współczynnika k podano w tablicy 4.4. Zależności $Y_\sigma = f(\sigma)$ dla różnych wartości współczynnika k przedstawione są w postaci wykresów na rys. 4.3, a obliczone wartości zestawiono w tablicy 4.5. Z wykresów wynika,



Rys. 4.3. Stopień niejednorodności $Y_\sigma = f(\sigma)$ dla różnych wartości współczynnika kształtu k

że dla dowolnie założonego stopnia niejednorodności Y_σ w miarę wzrostu współczynnika k rośnie dopuszczalna wartość σ_{max} osiągając przy dostatecznie dużym współczynniku k wartość $\sigma_{max} \approx 1$.

Określimy teraz stopień niejednorodności pola $Y_{\eta\sigma}$ dla dowolnie położonego punktu P wewnątrz cewki solenoidalnej o współrzędnych η i σ . W tym celu przekształcimy zależność

Tablica 4.4

Stałe B_{kn} dla różnych wartości współczynnika k

k	$B_{k1} \cdot 10^{-3}$	$B_{k2} \cdot 10^{-3}$	$B_{k3} \cdot 10^{-3}$
3	7,50	-0,773	0,154
4	2,59	-0,171	0,023
5	1,11	-0,050	0,005
6	0,548	-0,018	0,001
7	0,300	-0,007	0,0004
8	0,178	-0,003	0,0001

Tablica 4.5

Stopień niejednorodności składowej osiowej pola $Y_b(^{\circ}/_{\infty})$ wzdłuż osi x dla różnych wartości współczynnika k

$k \backslash \sigma$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99
3	0,07	0,30	0,67	1,18	1,84	—	—	—	—	—
4	0,03	0,10	0,23	0,41	0,55	0,91	1,23	1,59	—	—
5	0,01	0,04	0,10	0,18	0,28	0,39	0,53	0,69	0,87	1,04
6	0,005	0,02	0,05	0,09	0,14	0,20	0,27	0,34	0,43	0,52
7	0,003	0,01	0,03	0,05	0,07	0,11	0,15	0,19	0,24	0,29
8	0,002	0,007	0,02	0,03	0,04	0,06	0,09	0,11	0,14	0,17

(4.4) określającą składową osiową natężenia pola H_{yx} w oparciu o wzory (4.6) i (4.11) do postaci

$$\begin{aligned}
 H_{yx} = H_o \left\{ 1 + Y_n + \frac{3}{8C_k} (\cos \Psi_1 \sin^4 \Psi_1 + \cos \Psi_2 \sin^4 \Psi_2) \sigma^2 + \right. \\
 \frac{15}{128C_k} [(3 \cos \Psi_1 - 7 \cos^3 \Psi_1) \sin^6 \Psi_1 + (3 \cos \Psi_2 - 7 \cos^3 \Psi_2) \sin^6 \Psi_2] \sigma^4 + \\
 + \frac{35}{512C_k} [(5 \cos \Psi_1 - 30 \cos^3 \Psi_1 + 33 \cos^5 \Psi_1) \sin^8 \Psi_1 + \\
 \left. + (5 \cos \Psi_2 - 30 \cos^3 \Psi_2 + 33 \cos^5 \Psi_2) \sin^8 \Psi_2] \sigma^6 + \right\}, \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

gdzie $C_k = \frac{H_o}{H_{\infty}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

Ostatecznie będzie

$$H_{yx} = H_o(1 + Y_\eta + Y'_{\eta\sigma}) = H(1 + Y_{\eta\sigma}), \quad (4.19)$$

gdzie

$$Y_{\eta\sigma} = Y_\eta + Y'_{\eta\sigma},$$

przy czym

$$\begin{aligned} Y'_{\eta\sigma} = \frac{1}{C_k} & \left\{ \frac{3}{8} (\cos \Psi_1 \sin^4 \Psi_1 + \cos \Psi_2 \sin^4 \Psi_2) \sigma^2 + \right. \\ & + \frac{15}{128} [(3 \cos \Psi_1 - 7 \cos^3 \Psi_1) \sin^6 \Psi_1 + (3 \cos \Psi_2 - 7 \cos^3 \Psi_2) \sin^6 \Psi_2] \sigma^4 + \\ & + \frac{35}{512} [(5 \cos \Psi_1 - 30 \cos^3 \Psi_1 + 33 \cos^5 \Psi_1) \sin^8 \Psi_1 + \\ & \left. + (5 \cos \Psi_2 - 30 \cos^3 \Psi_2 + 33 \cos^5 \Psi_2) \sin^8 \Psi_2] \sigma^6 + \right\}. \quad (4.20) \end{aligned}$$

Po podstawieniu

$$\begin{aligned} \cos \Psi_1 &= \left(1 + \frac{1}{k^2(1+\eta)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}; & \cos \Psi_2 &= \left(1 + \frac{1}{k^2(1-\eta)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}; \\ \sin \Psi_1 &= \frac{1}{k(1+\eta)} \left(1 + \frac{1}{k^2(1+\eta)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}; & \sin \Psi_2 &= \frac{1}{k(1-\eta)} \left(1 + \frac{1}{k^2(1-\eta)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

oraz rozwinięciu w szereg poszczególnych wyrażeń przy uwzględnieniu członów do szóstego stopnia włącznie otrzymamy po przekształceniach

$$\begin{aligned} Y'_{\eta\sigma} &= \frac{3}{4k^4} \left[1 - \frac{2}{k^2} + \frac{3}{k^4} - \frac{4}{k^6} + \left(10 - \frac{95}{2k^2} + \frac{130}{k^4} - \frac{275}{k^6} \right) \eta^2 + \right. \\ & + \left(35 - \frac{595}{2k^2} + \frac{10255}{8k^4} - \frac{15715}{4k^6} \right) \eta^4 \Big] \sigma^2 - \frac{15}{64k^6} \left[4 - \frac{19}{k^2} + \frac{52}{k^4} - \frac{110}{k^6} + \right. \\ & \left. + \left(84 - \frac{714}{k^2} + \frac{6153}{2k^4} - \frac{9429}{k^6} \right) \eta^2 \right] \sigma^4 + \frac{35}{256k^8} \left(18 - \frac{138}{k^2} + \frac{563}{k^4} - \frac{1668}{k^6} \right) \sigma^6. \quad (4.21) \end{aligned}$$

W przypadku $\eta = 0$ wyrażenie (4.21) określa nam stopień niejednorodności składowej osiowej pola wzdłuż osi x . Wynosi on wówczas

$$\begin{aligned} Y'_{o\sigma} &= \frac{3}{4k^4} \left(1 - \frac{2}{k^2} + \frac{3}{k^4} - \frac{4}{k^6} \right) \sigma^2 - \frac{15}{16k^6} \left(1 - \frac{19}{4k^2} + \frac{13}{k^4} - \frac{55}{2k^6} \right) \sigma^4 + \\ & + \frac{315}{128k^8} \left(1 - \frac{23}{3k^2} + \frac{563}{18k^4} - \frac{278}{3k^6} \right) \sigma^6. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc zależność identyczną ze wzorem (4.16). Wzór na stopień niejednorodności pola można więc zapisać w postaci

$$Y_{\eta\sigma} = Y_{\eta} + Y_{\sigma} + Y_d, \quad (4.22)$$

gdzie:

Y_{η} — stopień niejednorodności składowej osiowej natężenia pola wzdłuż osi y ,

Y_{σ} — stopień niejednorodności składowej osiowej natężenia pola wzdłuż osi x ,

Y_d — dodatkowy stopień niejednorodności składowej osiowej natężenia pola zależny od współrzędnych η oraz σ punktu P i określony zależnością (4.23);

$$Y_d = \frac{3}{4k^4} \left[\left(10 - \frac{95}{2k^2} + \frac{130}{k^4} - \frac{275}{k^6} \right) \eta^2 + \left(35 - \frac{595}{2k^2} + \frac{10255}{8k^4} - \frac{15715}{4k^6} \right) \eta^4 \right] \sigma^2 + \\ - \frac{15}{16k^6} \left[\left(21 - \frac{178}{k^2} + \frac{6153}{8k^4} - \frac{9429}{4k^6} \right) \eta^2 \right] \sigma^4. \quad (4.23)$$

Zależność tę można zapisać w postaci

$$Y_d = (C_{k11}\eta^2 + C_{k12}\eta^4)\sigma^2 + C_{k21}\eta^2\sigma^4. \quad (4.24)$$

Korzystając z zależności (4.13), (4.17), (4.22) oraz (4.24) otrzymamy

$$Y_{\eta\sigma} = A_{k1}\eta^2 + A_{k2}\eta^4 + A_{k3}\eta^6 + B_{k1}\sigma^2 + B_{k2}\sigma^4 + B_{k3}\sigma^6 + \\ + C_{k11}\eta^2\sigma^2 + C_{k12}\eta^4\sigma^2 + C_{k21}\eta^2\sigma^4. \quad (4.25)$$

Po podstawieniu $\sigma = k\varepsilon$ stopień niejednorodności pola $Y_{\eta\varepsilon}$ zależny od współrzędnych

$\eta = \frac{y}{L}$ i $\varepsilon = \frac{\sigma}{k} = \frac{x}{L}$ punktu P wyniesie

$$Y_{\eta\varepsilon} = A_{k1}\eta^2 + A_{k2}\eta^4 + A_{k3}\eta^6 + k^2 B_{k1}\varepsilon^2 + k^4 B_{k1}\varepsilon^4 + k^6 B_{k3}\varepsilon^6 + \\ + k^2 C_{k11}\eta^2\varepsilon^2 + k^2 C_{k12}\eta^4\varepsilon^2 + k^4 C_{k21}\eta^2\varepsilon^4. \quad (4.26)$$

Dla określonej wartości k będzie

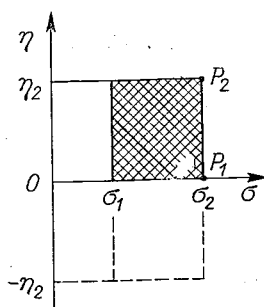
$$Y_{\eta\varepsilon} = A_1\eta^2 + A_2\eta^4 + A_3\eta^6 + B_1\varepsilon^2 + B_2\varepsilon^4 + B_3\varepsilon^6 + C_{11}\eta^2\varepsilon^2 + C_{12}\eta^4\varepsilon^2 + C_{21}\eta^2\varepsilon^4. \quad (4.27)$$

5. WYZNACZENIE OPTIMALNYCH WYMIARÓW CEWKI KOMPENSUJĄCEJ I CZUJNIKOWEJ

Maksymalna wartość zewnętrznego promienia $\sigma_2 = \frac{x_2}{a}$ cewki czujnikowej (rys. 5.1)

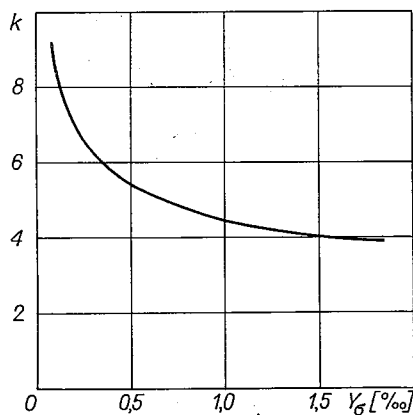
ograniczona jest wewnętrznym promieniem korpusu, na który nawinięta jest cewka kompensująca. Ze względów konstrukcyjnych promień ten nie przekroczy wartości $\sigma_2 = 0,80$. W oparciu o dane z tablicy 4.5 sporządzono wykres zależności $k = f(Y_{\sigma})$ określający wartość współczynnika kształtu cewki solenoidalnej k w zależności od stopnia niejednorodności pola Y_{σ} w punkcie P_1 o współrzędnych $\sigma_2 = 0,8$ i $\eta = 0$. Dla założonej poprzednio wartości stopnia niejednorodności pola $Y_{\sigma} = 1\%$ współczynnik kształtu określony z wykresu wynosi $k = 4,5$ (rys. 5.2).

Stopień niejednorodności pola Y_{η} wzdłuż osi cewki y posiada wartości przeciwnego znaku aniżeli stopień niejednorodności Y_{σ} wzdłuż osi x . Można więc założyć, że w dowolnym



Rys. 5.1. Oznaczenie wymiarów cewki czujnikowej

punkcie obszaru określonego przez promień σ_2 i współrzędne $\pm\eta_2$ stopień niejednorodności pola $Y_{\eta\sigma}$ nie przekroczy wartości $\pm 1\%$ w przypadku gdy $Y_{\sigma 2} = 1\%$ oraz $Y_{\eta 2} = -1\%$. Wymiary zewnętrzne cewki czujnikowej określone przez współrzędne punktu P_2 wyniosą: średnica zewnętrzna cewki $d_z = 2\sigma_2 a$ oraz wysokość $h_c = 2\eta_2 L$.


 Rys. 5.2. Wykres $k = f(Y_\sigma)$ dla $\sigma_2 = 0,8$

W konkretnym zagadnieniu wymiary cewki kompensującej i czujnikowej są ściśle określone, przy czym o ograniczeniu wymiarów solenoidalnej cewki kompensującej decydować będzie jej wysokość $2L$. Przy założeniu $L = \text{const}$ zwiększenie wartości współczynnika

kształtu $k = \frac{L}{a}$ uzyskuje się przez zmniejszenie promienia cewki a . W przypadku tym

ta sama współrzędna $\sigma = \frac{x}{a}$ przy różnych wartościach współczynnika k określa różne położenia punktów na osi x . Dlatego wygodniej jest posługiwać się współrzędną stosunkową

$$\varepsilon = \frac{x}{L} = \frac{\sigma}{k}.$$

W oparciu o wykresy $Y_\eta = f(\eta)$ oraz $Y_\sigma = f(\sigma)$ przy założeniu $|Y_{\eta 2}| = |Y_{\sigma 2}| = 1\%$ określono współrzędne σ_2 , ε_2 oraz η_2 dla różnych wartości współczynnika k . Zestawienie

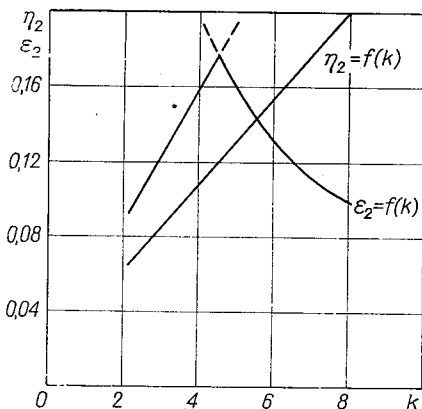
Tablica 5.1

Zestawienie współrzędnych ε_2 i η_2 dla różnych wartości współczynnika k

k	3	4	4,5	5	6	7	8
σ_2	0,371	0,636	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800
ε_2	0,123	0,159	0,177	0,160	0,133	0,144	0,100
η_2	0,086	0,110	0,121	0,132	0,156	0,178	0,201
$\varepsilon_2^2 \sqrt{\eta_2} \cdot 10^{-3}$	4,45	8,39	11,0	9,30	7,00	5,49	4,48

wartości poszczególnych współrzędnych podano w tablicy 5.1. Wykresy $\varepsilon_2 = f(k)$ oraz $\eta_2 = f(k)$ przedstawione są na rys. 5.3.

Wartość współrzędnej σ_2 rośnie początkowo wraz ze wzrostem współczynnika k osiągając wartość maksymalną σ_{max} dla $k = 4,5$. Ponieważ wzrost wartości współczynnika

Rys. 5.3. Wykres $\eta_2 = f(k)$ oraz $\varepsilon_2 = f(k)$

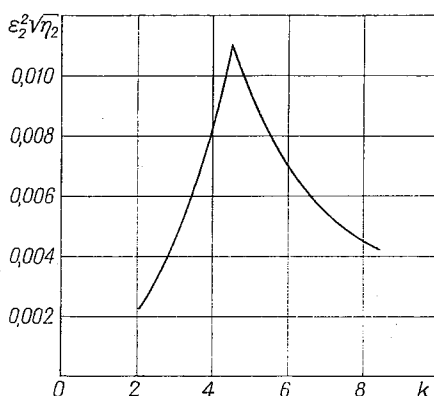
k realizowany jest przez zmniejszenie średnicy cewki solenoidalnej, dalszy wzrost k nie powoduje zmian współrzędnej σ_2 powyżej wartości 0,8, maleje więc współrzędna $\varepsilon_2 = \frac{0,80}{k}$. Natomiast zależność $\eta_2 = f(k)$ w rozważanym przedziale $3 \leq k \leq 8$ wzrasta praktycznie liniowo.

Ze wzoru (3.32) wynika, że czułość układu pomiarowego S_M zależy również od wymiarów cewki czujnikowej i to od iloczynu $d_z^2 \sqrt{h_c}$. Wyrażając wysokość h_c i średnicę d_z cewki czujnikowej przez współrzędne stosunkowe η_2 oraz ε_2 otrzymamy

$$Y_L = (2L)^{\frac{5}{2}} \varepsilon_2^2 \sqrt{\eta_2} = C_L \varepsilon_2^2 \sqrt{\eta_2}, \quad (5.1)$$

przy czym $C_L = (2L)^{\frac{5}{2}}$.

Przebieg zmian wyrażenia $\varepsilon_2^2 \sqrt{\eta_2}$ w zależności od współczynnika kształtu k przedstawiony jest na rys. 5.4. Maksimum tego wyrażenia przypada dla $k = 4,5$. Dlatego dalsze rozważania zostały przeprowadzone dla solenoidalnej cewki kompensującej, której współczynnik kształtu $k = 4,5$. W tablicy 5.2 zestawiono dla tego przypadku wartości stałych A_n , B_n i C_n występujących we wzorze (4.27).



Rys. 5.4. Wykres $\varepsilon_2^2 \sqrt{\eta_2} = f(k)$ dla $Y_{\sigma_2} = 1\%$ oraz $Y_{\eta_2} = -1\%$

Jeżeli przy obliczaniu stopnia niejednorodności pola ograniczyć się do dwóch cyfr znaczących, to w obszarze $\eta < 0,18$ oraz $\varepsilon < 0,18$ wystarczy uwzględnić jedynie człony do czwartego stopnia włącznie. Zależność (4.27) upraszcza się wówczas do postaci:

$$Y_{\eta\varepsilon} = A_1 \eta^2 + B_1 \varepsilon^2 + A_2 \eta^4 + B_2 \varepsilon^4 + C_{11} \eta^2 \varepsilon^2. \quad (5.2)$$

Tablica 5.2

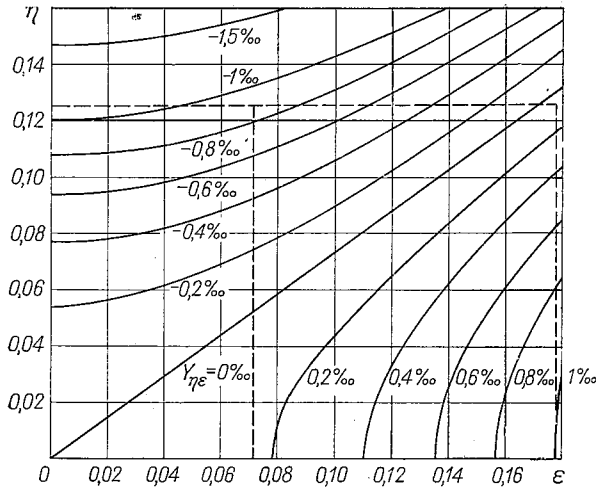
Zestawienie stałych A_n, B_n i C_n dla współczynnika kształtu $k = 4,5$

A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	C_{11}	C_{12}	C_{13}
-0,0673	-0,0980	-0,115	0,0336	-0,0369	0,0835	0,294	0,849	0,639

Zależność $Y_{\eta\varepsilon} = f(\eta, \varepsilon)$ dla współczynnika kształtu $k = 4,5$ przedstawiona jest w postaci topogramu na rys. 5.5, a obliczone wartości zestawiono w tablicy 5.3.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że przy założonym stopniu niejednorodności pola $Y_{\eta\varepsilon} \leq 1\%$ oraz promieniu przestrzeni probierczej $\sigma_2 = 0,8$ najkorzystniej jest stosować cewkę solenoidalną o współczynniku kształtu 4,5. Cewka ta przy określonej wysokości zapewnia największą przestrzeń probierczą. Przy założonym zaś promieniu cewki czujnikowej oraz stopniu niejednorodności $Y_{\eta\varepsilon} \leq 1\%$ solenoidalna cewka kompensująca o współczynniku $k = 4,5$ będzie posiadać minimalną objętość.

Zgodnie z rozdziałem 2 wymiary cewki czujnikowej powinny być tak dobrane, by równość natężenia pola badanego i pola cewki kompensującej w środku układu pociągała także równość strumieni skojarzonych z cewką czujnikową. Strumień dodatkowy pochodzący

Rys. 5.5. Stopień niejednorodności $Y_{\eta\varepsilon} = f(\eta, \varepsilon)$ dla $k = 4,5$

Tablica 5.3

Stopień niejednorodności pola $Y_{\eta\varepsilon}(\text{‰})$ dla współczynnika kształtu $k = 4,5$

$\varepsilon \backslash \eta$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18
0	0	+0,01	+0,05	+0,12	+0,21	+0,33	+0,48	+0,64	+0,84	+1,05
0,02	-0,03	-0,01	+0,03	+0,09	+0,19	+0,31	+0,45	+0,62	+0,81	+1,03
0,04	-0,11	-0,09	-0,05	+0,02	+0,11	+0,23	+0,37	+0,54	+0,74	+0,96
0,06	-0,24	-0,23	-0,19	-0,12	-0,02	+0,10	+0,25	+0,42	+0,62	+0,84
0,08	-0,43	-0,42	-0,39	-0,31	-0,21	-0,08	+0,07	+0,25	+0,45	+0,68
0,10	-0,68	-0,67	-0,62	-0,55	-0,45	-0,32	-0,16	+0,02	+0,23	+0,46
0,12	-0,99	-0,97	-0,93	-0,85	-0,75	-0,62	-0,45	-0,26	-0,04	+0,20
0,14	-1,36	-1,34	-1,29	-1,21	-1,11	-0,98	-0,80	-0,60	-0,37	-0,12
0,16	-1,79	-1,77	-1,72	-1,64	-1,52	-1,39	-1,20	-0,99	-0,76	-0,49
0,18	-2,29	-2,27	-2,22	-2,13	-2,01	-1,86	-1,67	-1,45	-1,20	-0,93

cy więc od niejednorodności pola kompensującego powinien być w przypadku kompensacji równy zeru.

Pole kompensujące $H_{\eta\varepsilon}$ w obszarze cewki kompensującej określone jest zależnością

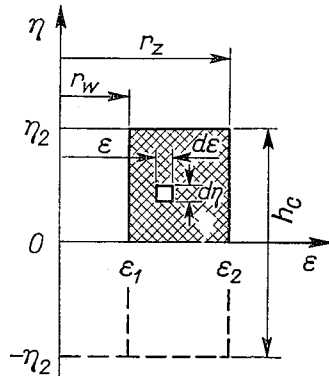
$$H_{\eta\varepsilon} = H_o(1 + Y_{\eta\varepsilon}). \quad (5.3)$$

Strumień sprzężony z cewką czujnikową, pochodzący od pola cewki kompensującej $H_{\eta\varepsilon}$ wyniesie

$$\Psi_k = \sum_{i=1}^z \Phi_i = \mu_0 H_o \pi \sum_{i=1}^z r_i^2 + \mu_0 H_o \pi \sum_{i=1}^z Y_{\eta\varepsilon} r_i^2 = \Psi_0 + \Psi_d. \quad (5.4)$$

Strumień dodatkowy Φ_{di} sprzężony z dowolnym zwojem cewki czujnikowej (rys. 5.6)

$$\Phi_{di} = 2\pi\mu_0 L^2 H_o \int_0^{\varepsilon} Y_{\eta\varepsilon} \varepsilon d\varepsilon. \quad (5.5)$$



Rys. 5.6. Obliczenie strumienia dodatkowego sprzężonego z cewką czujnikową

Po podstawieniu do wzoru (5.5) zależności (5.2)

$$\Phi_{di} = 2\pi\mu_0 L^2 H_o \int_0^{\varepsilon} [(A_1 \eta^2 + A_2 \eta^4) \varepsilon + B_1 \varepsilon^3 + B_2 \varepsilon^5 + C_{11} \eta^2 \varepsilon^3] d\varepsilon, \quad (5.6)$$

a po scałkowaniu

$$\Phi_{di} = \pi\mu_0 L^2 H_o \left[(A_1 \eta^2 + A_2 \eta^4) \varepsilon^2 + \frac{1}{2} B_1 \varepsilon^4 + \frac{1}{3} B_2 \varepsilon^6 + \frac{1}{2} C_{11} \eta^2 \varepsilon^4 \right]. \quad (5.7)$$

Strumień dodatkowy Ψ_d sprzężony z cewką o zwojach wynosi

$$\Psi_d = \frac{z}{2\eta_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \int_{-\eta_2}^{\eta_2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \Phi_{di} d\eta d\varepsilon. \quad (5.8)$$

Po uwzględnieniu zależności (5.7) i scałkowaniu otrzymamy

$$\Psi_d = \frac{\pi\mu_0 z L^2 H_o}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \left[\left(\frac{A_1}{9} \eta_2^2 + \frac{A_2}{15} \eta_2^4 \right) (\varepsilon_2^3 - \varepsilon_1^3) + \frac{B_1}{10} (\varepsilon_2^5 - \varepsilon_1^5) + \frac{B_2}{21} (\varepsilon_2^7 - \varepsilon_1^7) + \frac{C_{11}}{30} \eta_2^2 (\varepsilon_2^5 - \varepsilon_1^5) \right]. \quad (5.9)$$

Z warunku $\Psi_d = 0$ można określić wartość η_2 dla znanych wartości ε_2 oraz ε_1 . Z poprzednio podanych rozważań w rozdziale 3 wynika, że optymalna grubość cewki czujnikowej

$b_c = 0,6r_z$. Stąd $\varepsilon_2 = 0,4\varepsilon_1$, wówczas

$$\varepsilon_2^3 - \varepsilon_1^3 = 0,936\varepsilon_2^3; \quad \varepsilon_2^5 - \varepsilon_1^5 = 0,999\varepsilon_2^5; \quad \varepsilon_2^7 - \varepsilon_1^7 \approx \varepsilon_2^7.$$

Po podstawieniu do wzoru (5.9) i przyrównaniu go do zera otrzymamy

$$6,24A_2\eta_2^4 + (10,4A_1 + 3,33C_{11}\varepsilon_2^2)\eta_2^2 + 9,99B_1\varepsilon_2^2 + 4,76B_2\varepsilon_2^4 = 0. \quad (5.10)$$

Promień zewnętrzny cewki czujnikowej $\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{k}$ dla optymalnej wartości współczynnika

kształtu cewki solenoidalnej $k = 4,5$ wynosi $\varepsilon_2 = \frac{0,8}{4,5} = 0,178$.

Po uwzględnieniu wartości stałych A_n , B_n i C_n z tablicy 5.2 równanie (5.10) przybierze postać

$$0,611\eta_2^4 + 0,669\eta_2^2 - 0,0105 = 0. \quad (5.11)$$

Jedynym dodatnim pierwiastkiem równania jest $\eta_2 = 0,125$.

Wysokość cewki czujnikowej h_c oraz promień zewnętrzny r_z i wewnętrzny r_w będą wynosić

$$h_c = 2\eta_2 L = 0,250L; \quad r_z = 0,178L; \quad r_w = 0,4r_z = 0,071L.$$

Kontury cewki o tak dobranych wymiarach zostały zaznaczone linią przerywaną na rys. 5.5.

W oparciu o wzór (5.9) można udowodnić, że wyznaczona wartość η_2 w niewielkim tylko stopniu zależy od współczynnika kształtu k . Pomijając we wzorze (5.9) człony siódmego stopnia oraz przyjmując jak w poprzednim przypadku $b_c = 0,6r_z$ z warunku $\Psi_d = 0$ otrzymamy

$$\eta_2 = \sqrt{-0,961 \frac{B_1}{A_2} \varepsilon_2}. \quad (5.12)$$

Ze wzorów (4.12) i (4.16) po uwzględnieniu $\sigma^2 = k^2 \varepsilon^2$ otrzymamy $\frac{B_1}{A_1} = -\frac{1}{2}$ niezależnie od wartości współczynnika k . Stąd

$$\eta_2 = 0,694\varepsilon_2. \quad (5.13)$$

Dla założonej poprzednio wartości $\varepsilon_2 = 0,178$ otrzymamy $\eta_2 = 0,123$.

Niespełnienie warunku (5.12) spowoduje powstanie dodatkowego uchybu pomiaru $\delta_N H$, zwanego uchybem niedopasowania. Jego wartość interesuje nas jedynie ze względu na dopuszczalną tolerancję wymiarów cewki czujnikowej. Określony on jest zależnością:

$$\delta_N H = \frac{\Psi_d}{\Psi_k} = \frac{\Psi_d}{\Psi_0}, \quad (5.14)$$

gdzie:

Ψ_k — strumień sprzężony z cewką czujnikową pochodzący od pola cewki kompensującej,

Ψ_0 — strumień sprzężony z cewką czujnikową w przypadku $Y_{ne} = 0$.

Ze wzorów (3.5) i (3.6)

$$\Psi_0 = \frac{\pi\mu_0 z L^2 H_0}{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} (\varepsilon_2^3 - \varepsilon_1^3). \quad (5.15)$$

Stąd uchyb niedopasowania

$$\delta_N H = \frac{A_1}{3} \eta_2^2 + \frac{A_2}{5} \eta_2^4 + 3 \frac{B_1}{10} \frac{\varepsilon_2^5 - \varepsilon_1^5}{\varepsilon_2^3 - \varepsilon_1^3} + \frac{7}{B_2} \frac{\varepsilon_2^7 - \varepsilon_1^7}{\varepsilon_2^3 - \varepsilon_1^3} + \frac{C_{11}}{10} \eta_2^2 \frac{\varepsilon_2^5 - \varepsilon_1^5}{\varepsilon_2^3 - \varepsilon_1^3}. \quad (5.16)$$

Dla przyjętego poprzednio stosunku $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 0,4$ otrzymamy

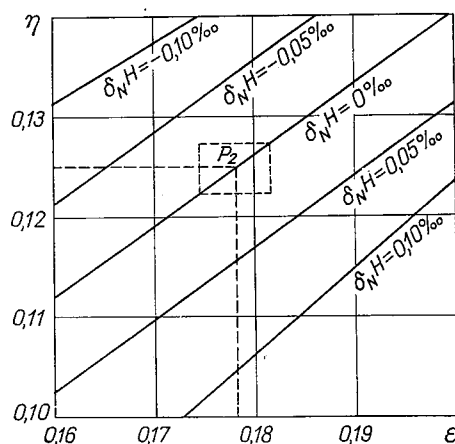
$$\delta_N H = \frac{A_1}{3} \eta_2^2 + \frac{A_2}{5} \eta_2^4 + 3,21 \frac{B_1}{10} \varepsilon_2^2 + 1,07 \frac{B_2}{7} \varepsilon_2^4 + 1,07 \frac{C_{11}}{10} \eta_2^2 \varepsilon_2^2. \quad (5.17)$$

W tabelicy 5.4 podano zestawienie wartości uchybu niedopasowania $\delta_N H$ w otoczeniu punktu P_2 o współrzędnych ε_2 i η_2 . Topogram zależności $\delta_N H = f(\varepsilon, \eta)$ przedstawiony

Tabela 5.

Wartości uchybu niedopasowania $\delta_N H(^0/_{00})$ w otoczeniu punktu P_2

$\varepsilon \backslash \eta$	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20
0,10	+0,06	+0,09	+0,13	+0,17	+0,21
0,11	+0,01	+0,05	+0,09	+0,12	+0,16
0,12	-0,04	-0,003	+0,04	+0,07	+0,12
0,13	-0,09	-0,06	-0,02	+0,02	+0,06
0,14	0,15	-0,12	-0,08	-0,04	+0,002



Rys. 5.7. Uchyb niedopasowania $\delta_N H = f(\eta, \varepsilon)$ w otoczeniu punktu P_2

jest na rys. 5.7. Z rysunku wynika, że zmiana wymiarów cewki ε_2 lub η_2 o 10% wywoła uchyb niedopasowania $\delta_N H$ rzędu 0,15‰. W rzeczywistości wymiary cewki czujnikowej mogą być bez kłopotu zrealizowane z dokładnością 2%. Uchyb niedopasowania nie przekroczy wtedy $\delta_N H < 0,03\%$.

Z przeprowadzonych w rozdziale 3 i 5 rozważań wynika, że cewka czujnikowa o wymiarach

$$d_z = 0,356L, \quad d_w = 0,142L, \quad h_c = 0,250L$$

zapewnia maksymalną czułość układu pomiarowego. Spełniony jest przy tym warunek, że strumień dodatkowy Ψ_d sprzężony z cewką czujnikową jest równy zeru.

6. WPŁYW GRUBOŚCI CEWKI KOMPENSUJĄCEJ NA WARTOŚĆ NATĘŻENIA POŁA

W dotychczasowych rozważaniach przy określeniu natężenia składowej osiowej pola zakładano, że uzwojenie cewki kompensującej jest wykonane z przewodnika o przekroju poprzecznym nieskończenie małym. Ponieważ uchyb pomiaru w omawianej metodzie kompensacyjnej nie powinien przekroczyć wartości 1‰, należy więc zbadać, w jakim stopniu grubość uzwojenia cewki kompensującej wpływa na wartość natężenia pola w jej środku. Przy znanej grubości b uzwojenia cewki solenoidu składową osiową natężenia pola oblicza się z podanego w literaturze [4] wzoru (6.1).

$$H_{yx} = \frac{Iz}{4Lb} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n n!} D_{2n+1} x^{2n}. \quad (6.1)$$

Kolejne współczynniki D_{2n+1} we wzorze (6.1) wynoszą:

$$\begin{aligned} D_1 &= (L+y) \left(\operatorname{arsh} \frac{a_z}{L+y} - \operatorname{arsh} \frac{a_w}{L+y} \right) + (L-y) \left(\operatorname{arsh} \frac{a_z}{L-y} - \operatorname{arsh} \frac{a_w}{L-y} \right), \\ D_3 &= -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{(L+y)^2} (\sin^3 \varphi_{1z} - \sin^3 \varphi_{1w}) + \frac{1}{(L-y)^2} (\sin^3 \varphi_{2z} - \sin^3 \varphi_{2w}) \right], \\ D_5 &= \frac{1}{(L+y)^3} \left[-\frac{1}{6} (\sin^3 \varphi_{1z} - \sin^3 \varphi_{1w}) + \frac{11}{40} (\sin^5 \varphi_{1z} - \sin^5 \varphi_{1w}) - \frac{1}{8} (\sin^7 \varphi_{1z} - \sin^7 \varphi_{1w}) \right] + \\ &+ \frac{1}{(L-y)^3} \left[-\frac{1}{6} (\sin^3 \varphi_{2z} - \sin^3 \varphi_{2w}) + \frac{11}{40} (\sin^5 \varphi_{2z} - \sin^5 \varphi_{2w}) - \frac{1}{8} (\sin^7 \varphi_{2z} - \sin^7 \varphi_{2w}) \right]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Stosownie do oznaczeń na rys. 6.1:

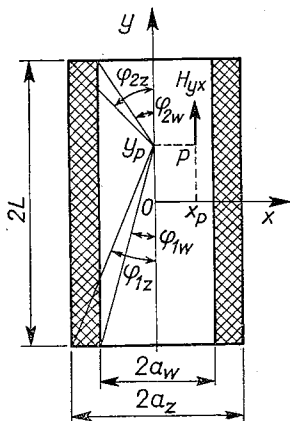
$$\begin{aligned} \sin \varphi_{1z} &= \frac{a_z}{\sqrt{a_z^2 + (L+y)^2}}, & \sin \varphi_{1w} &= \frac{a_w}{\sqrt{a_w^2 + (L+y)^2}}, \\ \sin \varphi_{2z} &= \frac{a_z}{\sqrt{a_z^2 + (L-y)^2}}, & \sin \varphi_{2w} &= \frac{a_w}{\sqrt{a_w^2 + (L-y)^2}}. \end{aligned}$$

Dla punktów leżących wzdłuż osi symetrii cewki solenoidalnej zależność (6.1) przybiera postać

$$H_{y0} = \frac{Iz}{4Lb} \left[(L+y) \left(\operatorname{arsh} \frac{a_z}{L+y} - \operatorname{arsh} \frac{a_w}{L+y} \right) + (L-y) \left(\operatorname{arsh} \frac{a_z}{L-y} - \operatorname{arsh} \frac{a_w}{L-y} \right) \right]. \quad (6.3)$$

Uwzględniając $\frac{Iz}{2L} = \frac{H_o}{C_k}$ oraz rozwijając w szereg funkcje hiperboliczne i $\frac{1}{C_k} = \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ po podstawieniu $\eta = \frac{y}{L}$ oraz $k = \frac{L}{a}$ (gdzie średni promień cewki $a = \frac{a_z + a_w}{2}$) zależność (6.3) można doprowadzić do postaci

$$H_{y0} = H_o(1 + Y'_\eta). \quad (6.4)$$



Rys. 6.1. Określenie składowych natężenia pola cewki o grubości uzwojenia b

Stopień niejednorodności pola Y'_η przy uwzględnieniu jedynie członów zawierających wyrażenie $\frac{b}{a}$ w potęgze drugiej wynosi

$$Y'_\eta = - \left(\frac{1}{24k^2} - \frac{1}{6k^4} + \frac{7}{24k^6} \right) \frac{b^2}{a^2} - \frac{3}{2k^2} \left[1 - \frac{2}{k^2} + \frac{3}{k^4} - + \left(\frac{1}{12} - \frac{29}{24k^2} + \frac{29}{6k^4} \right) \frac{b^2}{a^2} \right] \eta^2 + \\ - \frac{5}{2k^2} \left[1 - \frac{19}{4k^2} + \frac{21}{k^4} - + \left(\frac{1}{12} - \frac{31}{12k^2} + \frac{1763}{96k^4} \right) \frac{b^2}{a^2} \right] \eta^4. \quad (6.5)$$

Wprowadzając zapis analogiczny do wzoru (4.13)

$$Y'_\eta = A_{ob} + (A_1 + A_{1b})\eta^2 + (A_2 + A_{2b})\eta^4. \quad (6.6)$$

W pierwszym rzędzie zbadamy wpływ grubości b na wartość natężenia pola H_o w środku cewki. Poprawka pola w środku układu pochodząca od grubości cewki b określona jest stałą A_{ob} , a jej wartość zależy od współczynnika kształtu k cewki kompensującej oraz stosunku grubości $\frac{b}{a}$. W tablicy 6.1 podano wartości poprawek dla różnych współczynników kształtu k oraz różnych wartości stosunku $\frac{b}{a}$. Jak się później przekonamy, uchyb względny natężenia pola wynikający z tolerancji wymiarów cewki kompensującej jest rzędu 0,5%.

Tablica 6.1

Poprawka pola $A_{ob}(\text{‰})$ w środku układu cewki solenoidalnej w zależności od stosunkowej grubości $\frac{b}{a}$ i współczynnika kształtu k

$k \backslash \frac{b}{a}$	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
3,0	-0,067	-0,119	-0,186	-0,267	-0,362	-0,475
4,0	-0,045	-0,080	-0,126	-0,181	-0,245	-0,322
4,5	-0,038	-0,068	-0,106	-0,152	-0,206	-0,281
5,0	-0,032	-0,057	-0,089	-0,128	-0,173	-0,228
6,0	-0,023	-0,041	-0,065	-0,093	-0,127	-0,167

Jeśli więc poprawka $A_{ob} < \frac{0,5}{3} \text{‰}$, to jej wpływ na wartość natężenia pola H_o może być pominięty. Dla optymalnej wartości współczynnika $k = 4,5$ oraz poprawki $A_{ob} \approx 0,15$ dopuszczalna grubość cewki $b = 0,3a$.

Jeśli więc grubość uzwojenia cewki kompensującej $b \leq 0,3a$, to natężenie pola w środku cewki solenoidalnej może być określone ze wzoru (4.8) słusznego dla $b = 0$.

W celu zobrazowania wpływu grubości uzwojenia cewki kompensującej na stopień niejednorodności Y'_η w punktach leżących na osi symetrii w tablicy 6.2 podano wartości

Tablica 6.2

Zestawienie stałych A_n oraz A_{nb} dla $k = 4,5$ i $\frac{b}{a} = 0,3$

k	$\frac{b}{a}$	A_1	A_{1b}	A_2	A_{2b}
4,5	0,3	-0,0673	-0,00023	-0,0980	0,00002

stałych A_n oraz A_{nb} dla cewki solenoidalnej o współczynniku $k = 4,5$ oraz stosunkowej grubości $\frac{b}{a} = 0,3$.

Z porównania wartości stałych A_n , oraz A_{nb} wynika, że wpływ grubości uzwojenia dla założonego stosunku $\frac{b}{a} = 0,3$ zmienia wartość stopnia niejednorodności Y'_η dopiero przy trzeciej cyfrze znaczącej. Przy określaniu więc stopnia niejednorodności można pominąć wpływ grubości uzwojenia cewki kompensującej w przypadku, gdy $\frac{b}{a} \leq 0,3$.

Zbadamy teraz wpływ grubości uzwojenia cewki kompensującej na wartość składowej osiowej natężenia pola H_{ox} dla punktów leżących na osi x . Składowa H_{ox} na podstawie zależności (6.1)

$$H_{ox} = \frac{Iz}{2L} \left\{ \frac{L}{b} \left(\operatorname{arsh} \frac{a_z}{L} - \operatorname{arsh} \frac{a_w}{L} \right) + \frac{3a^2}{4Lb} (\sin^3 \varphi_z - \sin^3 \varphi_w) \sigma^2 + \right. \\ \left. - \frac{15a^4}{16L^3b} \left[\frac{1}{3} (\sin^3 \varphi_z - \sin^3 \varphi_w) - \frac{11}{20} (\sin^5 \varphi_z - \sin^5 \varphi_w) + \frac{1}{4} (\sin^7 \varphi_z - \sin^7 \varphi_w) \right] \sigma^4 + \right\}, \quad (6.7)$$

gdzie

$$\sin \varphi_z = \frac{a_z}{\sqrt{a_z^2 + L^2}}, \quad \sin \varphi_w = \frac{a_w^2}{\sqrt{a_w^2 + L^2}}.$$

Podstawiając odpowiednie wyrażenia za $\sin \varphi_z$ i $\sin \varphi_w$ po rozwinięciu w szereg kolejnych wyrazów zależność (6.7) można doprowadzić do postaci

$$H_{ox} = H_o(1 + Y'_\sigma). \quad (6.8)$$

Stopień niejednorodności Y'_σ wzdłuż osi x wynosi

$$Y'_\sigma = - \left(\frac{1}{24k^2} - \frac{1}{6k^4} + \frac{7}{24k^6} \right) \frac{b^2}{a^2} + \frac{3}{4k^4} \left[1 - \frac{2}{k^2} + \frac{3}{k^4} - \left(\frac{1}{12} - \frac{29}{24k^2} + \frac{29}{6k^4} \right) \frac{b^2}{a^2} \right] \sigma^2 + \\ - \frac{15}{16k^6} \left[1 - \frac{19}{k^2} + \frac{13}{k^4} - \left(\frac{1}{12} - \frac{31}{12k^2} + \frac{1763}{96k^4} \right) \frac{b^2}{a^2} \right] \sigma^4 + \quad (6.9)$$

Przechodząc na zapis analogiczny do wzoru (4.17)

$$Y'_\sigma = A_{ob} + (B_1 + B_{1b}) \sigma^2 + (B_2 + B_{2b}) \sigma^4 + \quad (6.10)$$

Stopień niejednorodności pola Y'_σ przy uwzględnieniu grubości uzwojenia cewki kompensującej w porównaniu ze stopniem niejednorodności Y_σ dla $b = 0$, różni się o stałą wartość A_{ob} niezależną od położenia punktu na osi x oraz o bardzo małą wartość dodatkową określoną stałymi B_{nb} i współrzędną stosunkową σ rozpatrywanego punktu. Dla określenia wpływu stałych B_{nb} w tablicy 6.3 porównano wartości stałych B_n oraz B_{nb} cewki solenoidal-

Tablica 6.3

Zestawienie stałych B_n oraz B_{nb} dla $k = 4,5$ i $\frac{b}{a} = 0,3$

k	$\frac{b}{a}$	B_1	B_{1b}	B_2	B_{2b}
4,5	0,3	$1,66 \cdot 10^{-3}$	$0,006 \cdot 10^{-3}$	$-0,090 \cdot 10^{-3}$	$0,0002 \cdot 10^{-3}$

nej o współczynniku kształtu $k = 4,5$ oraz $\frac{b}{a} = 0,3$. Z porównania wartości stałych B_n oraz B_{nb} wynika, że zmiana wartości stopnia niejednorodności Y'_σ cewki solenoidalnej o grubości $b = 0,3a$ w porównaniu ze stopniem Y_σ cewki o grubości $b = 0$ wystąpi co

najwyżej przy trzeciej cyfrze znaczącej. Jeśli więc $\frac{b}{a} \leq 0,3$, wpływ grubości cewki solenoidalnej może być pominięty w rozważaniach.

Z wyprowadzonego w rozdziale 4 wzoru (4.25) na stopień niejednorodności pola $Y_{\eta\sigma}$ dla dowolnego punktu P o współrzędnych $\eta < 0,18$ i $\sigma < 0,18$ wynika, że o wartości $Y_{\eta\sigma}$ decydują w pierwszym rzędzie stopień niejednorodności składowej osiowej pola Y_η wzdłuż osi y oraz Y_σ wzdłuż osi x . Dodatkowy stopień niejednorodności Y_d [wzór (4.23)], zależny od współrzędnych punktu P , jest kilkakrotnie mniejszy od wartości Y_η oraz Y_σ . Analogiczną zależność do wzoru (4.22) otrzymamy przy uwzględnieniu grubości cewki solenoidalnej. Ponieważ grubość cewki $b \leq 0,3a$ praktycznie nie wpływa na wartość stopnia niejednorodności Y'_η oraz Y'_σ , tym bardziej można więc pominąć wpływ grubości uzwojenia na dodatkowy stopień niejednorodności Y'_d . Jego udział przy określaniu wartości wypadkowego stopnia niejednorodności składowej osiowej natężenia pola $Y'_{\eta\sigma}$ jest kilkakrotnie mniejszy.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że stopień niejednorodności pola cewki solenoidalnej o współczynniku kształtu $k = 4,5$ oraz grubości b nie przekraczającej 30% średniego promienia a , można obliczyć ze wzoru (4.25) słusznego dla obwodu liniowego. Uchyb w określeniu wartości natężenia pola H_o w środku układu nie przekracza przy tym 0,15%.

7. WPŁYW STAŁYCH CZASOWYCH NA RÓWNOWAGĘ UKŁADU

Solenoidalna cewka kompensująca nadaje się głównie do pomiaru natężenia pola pochodzącego od prądu przepływającego przez układ cewek probierczych. Wykonanie bowiem obrotowej cewki probierczej we wnętrzu korpusu solenoidalnej cewki kompensującej nastęrcza wiele trudności. Wobec tego zmiana strumienia sprzężonego z cewką czujnikową wywołana jest przez równoczesne włączenie lub wyłączenie prądu I_b wytwarzającego pole badane oraz prądu I_k płynącego przez cewkę kompensującą.

Cewka czujnikowa znajduje się w wypadkowym polu magnetycznym $H_w = H_b - H_k$, przy czym H_b i H_k są to składowe osiowe natężenia pola cewki badanej oraz kompensującej w środku układu. Równoczesna zmiana natężenia pola badanego i kompensującego powoduje zaindukowanie w cewce czujnikowej o z zwojach zanikającej w czasie SEM e , określonej zależnością (2.1).

Prąd i_g , który popłynie w obwodzie cewki czujnikowej, określony jest równaniem

$$(L_c + L_g) \frac{di_g}{dt} + (R_c + R_g) i_g = \frac{d(\psi_b - \psi_k)}{dt}, \quad (7.1)$$

gdzie:

R_c, L_c — oporność i indukcyjność cewki czujnikowej,

R_g, L_g — oporność i indukcyjność cewki galwanometru.

Jeśli zmiana natężenia pola H_b i H_w jest wywołana przez równoczesne włączenie prądów obu cewek, to chwilowe wartości odpowiednich strumieni określone są zależnościami

$$\psi_b = \psi_{b0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_b}} \right), \quad \psi_k = \psi_{k0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_k}} \right), \quad (7.2)$$

przy czym ψ_{bo} oraz ψ_{ko} są to ustalone wartości strumieni sprzężonych z cewką czujnikową, pochodzących odpowiednio od prądu I_b oraz I_k . Zwykle szybkość narastania obu strumieni nie jest jednakowa wobec różnicy stałych czasowych $\tau_b = \frac{L_b}{R_b}$ oraz $\tau_k = \frac{L_k}{R_k}$. Rozwiązanie równania (7.1) po uwzględnieniu zależności (8.2) i oznaczeniu

$$\tau = \frac{L_c + L_g}{R_c + R_g} \quad (7.3)$$

ma postać

$$i_g = \frac{1}{R_c + R_g} \left[\frac{\psi_{bo}}{\tau_b - \tau} \left(e^{-\frac{t}{\tau_b}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - \frac{\psi_{ko}}{\tau_k - \tau} \left(e^{-\frac{t}{\tau_k}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right]. \quad (7.4)$$

Analiza równania (7.4) w przypadku ogólnym jest dosyć skomplikowana. Dla uproszczenia dyskusji ograniczymy się do przypadków szczególnych, interesujących nas w rozpatrywanym układzie pomiarowym. Wartość stałej czasowej τ_k cewki kompensującej określa jej oporność i indukcyjność. Oporność R_k cewki o średnim promieniu a , przekroju uzwojenia $2Lb$ oraz współczynnika izolacji $k_i = \frac{d^2}{d_i^2}$ wynosi

$$R_k = \frac{4az^2}{k_i \gamma b L}. \quad (7.5)$$

Indukcyjność L_k cewki kompensującej określona jest zależnością [3]

$$L_k = \mu_o k_L \pi a^2 \frac{z^2}{2L}, \quad (7.6)$$

przy czym współczynnik $k_L = f\left(\frac{L}{a}\right)$ dla $k = \frac{L}{a} = 4,5$ wynosi $k_L = 0,89$. Stała czasowa cewki

$$\tau_k = \frac{\pi}{8} \mu_o k_L k_i \gamma \frac{b}{a} a^2. \quad (7.7)$$

Po podstawieniu $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, $\gamma = 57 \cdot 10^6 \text{ 1}/\Omega\text{m}$, $\frac{b}{a} = 0,3$, $k_i = 0,75$ oraz uwzględnieniu $a = \frac{L}{k}$ otrzymamy

$$\tau_k = 0,278 L^{\frac{2}{k}}.$$

Zmiana wysokości $2L$ cewki kompensującej w przedziale 20÷60 cm powoduje zmianę stałej czasowej τ_k od 3 do 25 ms.

Obliczając w podobny sposób stałą czasową τ_c cewki czujnikowej przy uwzględnieniu warunków dopasowania otrzymamy

$$\tau_c = 0,0446 L.$$

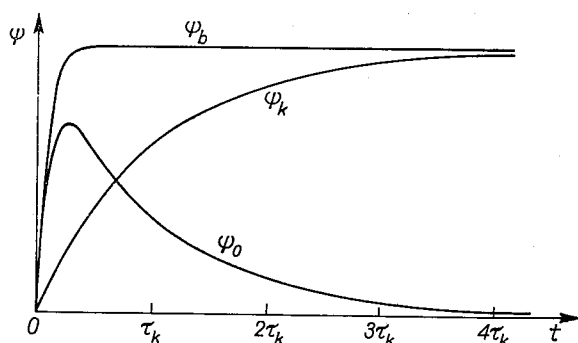
W stosunku do stałej czasowej cewki czujnikowej τ_c stała czasowa cewki kompensującej τ_k jest około 6-krotnie większa, natomiast stała czasowa galwanometru $\tau = \frac{L_g}{R_g}$ jest

zwykle 10-krotnie mniejsza. Wobec tego wzór (7.3) możemy uprościć do postaci $\tau = \tau_c$. Stała czasowa układu cewek probierczych zależy od rozmiarów oraz sposobu wykonania. Jeżeli interesująca nas przestrzeń probiercza ma mieć znaczne rozmiary, to do wytworzenia pola badanego korzystnie jest stosować cewkę podwójną w układzie Helmholtza. Wówczas stała czasowa $\tau_b \ll \tau_c$. Dla przykładu stosowana w laboratorium cewka probiercza o średnicy 5 m oraz przekroju uzwojenia 6 cm^2 posiada stałą czasową $\tau_b \approx 10^{-8} \text{ s}$.

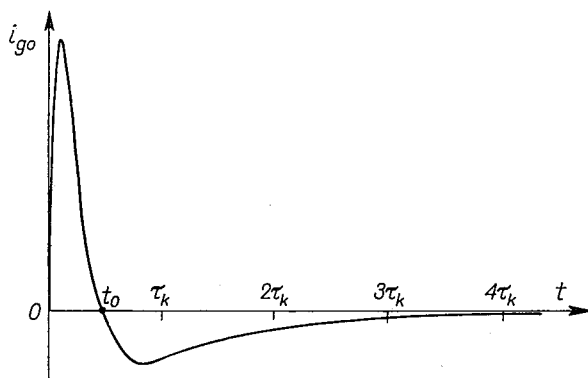
Zakładając równość strumieni ustalonych $\psi_{bo} = \psi_{ko}$ ze wzoru (7.4) otrzymamy

$$i_{go} = \frac{\psi_{ko}}{R_c + R_g} \left[\frac{1}{\tau_b - \tau_c} \left(e^{-\frac{t}{\tau_b}} - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right) - \frac{1}{\tau_k - \tau_c} \left(e^{-\frac{t}{\tau_k}} - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right) \right]. \quad (7.8)$$

Zależność ta określa prąd, jaki popłynie przez galwanometr pomimo całkowitej kompensacji pola badanego. Przebieg strumieni ψ_b i ψ_k oraz prądu i_{go} w funkcji czasu przedsta-



Rys. 7.1. Przebieg wypadkowego strumienia ψ_o sprzężonego z cewką czujnikową; ψ_b — strumień od cewki probierczej, ψ_k — strumień od cewki kompensującej



Rys. 7.2. Przebieg prądu i_{go} w obwodzie cewki czujnikowej dla $\psi_{bo} = \psi_{ko}$

wiono na rys. 7.1. i 7.2. Jak wynika z wykresu, w stanie kompensacji przez galwanometr przepłyną dwa ładunki $Q_{o1} = \int_0^{t_0} i_{go} dt$ oraz $Q_{o2} = \int_{t_0}^{\infty} i_{go} dt$, równe co do wielkości, lecz przeciwnych znaków. Przepływ tych ładunków może spowodować odchylenie układu rucho-

meo galwanometru, które w niekorzystnych warunkach uniemożliwia dokładne ustalenie stanu kompensacji.

Dla zorientowania się o wartości tych zakłóceń określimy zmianę odchylenia układu ruchomego galwanometru w czasie przyływu obu ładunków. Odchylenie galwanometru α_t dla ruchu okresowego tłumionego w dowolnej chwili czasu t opisuje równanie [6]

$$\alpha_t = \frac{K_n e^{-ut}}{\theta v} \left(\sin vt \int_0^t i_{go} e^{ut} \cos vt dt - \cos vt \int_0^t i_{go} e^{ut} \sin vt dt \right), \quad (7.9)$$

gdzie: K_n — stała napędowa galwanometru,

θ — moment bezwładności organu ruchomego przyrządu względem osi obrotu,

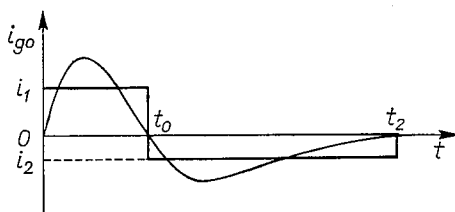
u, v — parametry pomocnicze ($u = \omega_o \beta$, $v = \omega_o \sqrt{1 - \beta^2}$),

ω_o — pulsacja wahań nietłumionych galwanometru,

β — stopień tłumienia.

Dla uproszczenia dalszych rozważań wprowadzimy zastępczą krzywą prądu i_{go} o kształcie przedstawionym na rys. 7.3, przy czym

$$i_1 = \frac{Q_{01}}{t_1} \quad i_2 = \frac{Q_{02}}{t_2 - t_0}.$$



Rys. 7.3. Krzywa zastępcza prądu i_{go}

W takim przypadku odchylenie układu ruchomego galwanometru α'_t dla czasu $0 \leq t \leq t_0$ wynosi

$$\alpha'_t = S_i \cdot i_1 \left[1 - e^{-ut} \left(\cos vt + \frac{u}{v} \sin vt \right) \right], \quad (7.10)$$

gdzie: S_i — czułość prądowa galwanometru.

Dla czasu $t < \frac{T_o}{50}$ zależność (7.10) można z uchybem nie przekraczającym 4% uprościć do postaci

$$\alpha'_t = \frac{1}{2} \omega_o S_{bo} i_1 t^2; \quad (7.11)$$

w chwili $t = t_0$ odchylenie α'_{t_0} wynosi

$$\alpha'_{t_0} = \frac{1}{2} \omega_o S_{bo} Q_{01} t_0.$$

Gdyby pominąć przepływ prądu i_2 dla czasu $t > t_0$, to odchylenie plamki galwanometru dla czasu $t \leq T_0$ wzrastałoby początkowo ze stałą prędkością

$$\left(\frac{d\alpha'_t}{dt}\right)_{t=t_0} = \frac{2\pi}{T_0} S_{b0} Q_{01}. \quad (7.12)$$

Równanie ruchu dla $t > t_0$ miałoby wówczas postać

$$\alpha'_t = \frac{1}{2} \omega_0 S_{b0} Q_{01} i_1 (2t - t_0) \quad (7.13)$$

Analogicznie przy uwzględnieniu jedynie prądu i_2 równanie ruchu dla czasu $t_0 \leq t \leq t_2$ wynosiłoby

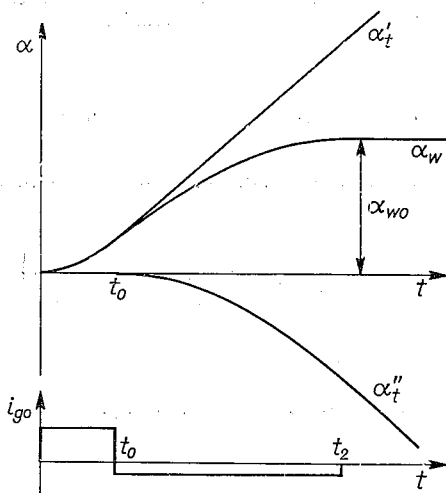
$$\alpha''_t = \frac{1}{2} \omega_0 S_{b0} i_2 (t - t_0)^2$$

oraz dla czasu $t > t_2$

$$\alpha''_t = \frac{1}{2} \omega_0 S_{b0} Q_{02} (2t - t_2 - t_0). \quad (7.15)$$

Jeśli uwzględnimy przepływ zarówno ładunku dodatniego, jak i ujemnego, to zaobserwujemy odchylenie $\alpha_w = \alpha'_t + \alpha''_t$, które po czasie $t > t_2$ ustali się do wartości α_{w0}

$$\alpha_{w0} = \frac{1}{2} \omega_0 S_{b0} Q_{01} t_2. \quad (7.16)$$



Rys. 7.4. Odchylenie plamki galwanometru przy przepływie prądu zastępczego i_{go}

Przebieg odchylenia α'_t , α''_t oraz α_w w funkcji czasu podano na rys. 7.4. Na skutek istnienia momentu zwracającego, plamka galwanometru dążyć będzie od odchylenia ustalonego α_{w0} do zera z prędkością wielokrotnie mniejszą, ponieważ $t_2 \ll T_0$.

Dla określenia wartości odchylenia α_{w_0} należy zgodnie ze wzorem (7.16) wyznaczyć ładunki $Q_{01} = -Q_{02}$ oraz czas ich przepływu t_2 . W naszym przypadku dla $\tau_k > 6\tau$ możemy przyjąć $t_2 = 4\tau_k$. Ładunek Q_{01} określimy jako

$$Q_{01} = - \int_{t_0}^{\infty} i_{g_0} dt. \quad (7.17)$$

Czas t_0 , po którym prąd i_{g_0} osiąga po raz pierwszy wartość zerową, określamy przyrównując zależność (7.8) do zera. Wynosi on dla $\tau_b \ll \tau_c$

$$t_0 = \frac{\tau_k}{\frac{\tau_k}{\tau_c} - 1} \ln \frac{\tau_k - \tau_b}{\tau - \tau_b} \approx \frac{\tau_k}{\frac{\tau_k}{\tau_c} - 1} \ln \frac{\tau_k}{\tau}. \quad (7.18)$$

Dla obliczanego poprzednio stosunku $\frac{\tau_k}{\tau_c} = 6$ otrzymamy $t_0 \approx 0,36\tau_k$. Ładunek Q_{01} z wzoru (7.17) po uwzględnieniu zależności (7.18):

$$Q_{01} = \frac{\psi_{k_0}}{R_c + R_g} \left(\frac{\tau_c - \tau_b}{\tau_k - \tau_b} \right)^{\frac{1}{\frac{\tau_k}{\tau_c} - 1}} \approx \frac{\psi_{k_0}}{R_c + R_g} \left(\frac{\tau_c}{\tau_k} \right)^{\frac{1}{\frac{\tau_k}{\tau_c} - 1}}. \quad (7.19)$$

Rozpatrywanie wpływu zmiany stosunku $\frac{\tau_k}{\tau_c}$ na wartość ładunku Q_{01} jest w omawianym przypadku nieistotne, ponieważ $\frac{\tau_k}{\tau_c} = \text{const}$ niezależnie od zmiany wysokości cewki kompensującej.

Jeśli nie zachodzi równość strumieni ψ_{b_0} i ψ_{k_0} , to równoczesne włączenie prądów I_b oraz I_k spowoduje przepłynięcie przez galwanometr dodatkowego ładunku nierównowagi

$$Q_d = \int_0^{\infty} i_g dt$$

$$Q_d = \frac{\psi_{b_0} - \psi_{k_0}}{R_c + R_g}. \quad (7.20)$$

Jeśli pomiar ma być wykonany z uchybem poniżej 1‰, to powinien być spełniony warunek $\frac{\psi_{b_0} - \psi_{k_0}}{\psi_{k_0}} < 1‰$. Minimalna wartość ładunku $Q_{d \min}$, który spowoduje dostrzegalne odchylenie galwanometru, powinna więc wynosić

$$Q_{d \min} = \frac{\psi_{k_0}}{R_c + R_g} \cdot 10^{-3}. \quad (7.21)$$

Aby właściwie ocenić stan kompensacji, należy żądać, by odchylenie $\alpha_d = S_b Q_{d \min}$ spowodowane dopuszczalnym ładunkiem nierównowagi było co najmniej trzykrotnie większe od odchylenia zakłócającego α_{w_0} . Z warunku $\alpha_d > 3\alpha_{w_0}$

$$S_b Q_{d \min} > \frac{3}{2} \omega_0 S_{b_0} Q_{01} t_2. \quad (7.22)$$

Stąd wyznacza się maksymalną wartość stałej czasowej τ_k w odniesieniu do okresu wahań niel tłumionych T_o galwanometru, przy której można pominąć wpływ zakłócenia α_{wo} na określenie stanu równowagi, a mianowicie

$$\frac{\tau_{kmax}}{T_o} = \frac{1}{12\pi} \frac{S_b}{S_{bo}} \left(\frac{\tau_k}{\tau_c} \right)^{\frac{1}{\frac{\tau_k}{\tau_c} - 1}} \cdot 10^{-3}. \quad (7.23)$$

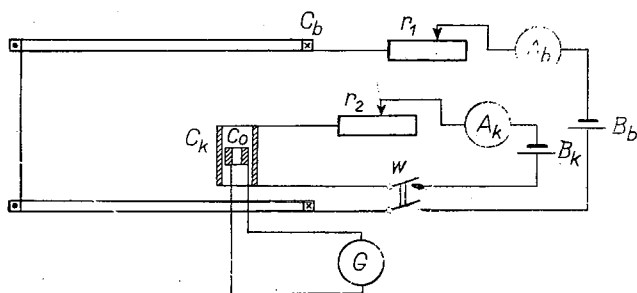
Z warunku dopasowania cewki czujnikowej $\frac{R_c}{R_k} = 2$ wynika $\frac{S_b}{S_{bo}} \approx 0,55$. Podstawiając

$\frac{\tau_k}{\tau_c} = 6$ oraz zakładając $T = 5$ s ostatecznie otrzymamy

$$\tau_{kmax} = 0,1 \text{ ms.}$$

Porównując otrzymany wynik z obliczonymi poprzednio wartościami stałej czasowej $\tau_k = 3 \div 25$ ms dochodzi się do wniosku, że występujące odchylenia zakłócające będą zbyt duże, by można było dokładnie ustalić stan kompensacji.

Podobne zjawisko wystąpi również, gdy cewka probiercza oraz cewka kompensująca przyłączone są do dwóch niezależnych źródeł zasilających jak w układzie z rys. 7.5. Za-



Rys. 7.5. Schemat ideowy układu w przypadku niezależnych źródeł zasilających cewkę probierczą i kompensującą

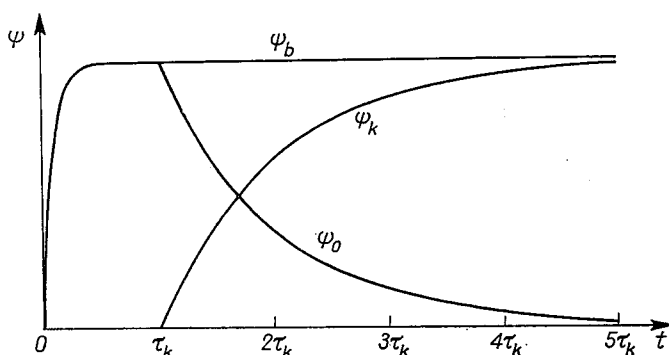
mknięcie wyłącznika nie powoduje równoczesnego włączenia prądów obu cewek na skutek nierównoczesnego zamknięcia styków obu noży. Nawet w przypadku całkowitej kompensacji oraz równości stałych czasowych obu cewek, przez galwanometr, analogicznie jak w poprzednim przypadku, przepłyną ładunki Q_{01} oraz Q_{02} równe co do wartości, lecz przeciwnych znaków. W efekcie może powstać odchylenie zakłócające α_{wo} uniemożliwiające dokładne określenie stanu równowagi. Nierównoczesność zamykania styków wyłącznika pomierzono falomierzem liczącym. W zależności od rodzaju styków i szybkości łączenia waha się ona w granicach $t_z = 0,5 \div 5$ ms. W oparciu o uzyskane wyniki przyjęto średnią wartość czasu $t_z = 3$ ms.

Przyjmując jak w poprzednim przypadku $\tau_c > 4\tau_b$ oraz zakładając równość strumieni $\psi_{bo} = \psi_{ko}$ określimy prąd i_{go} , jaki przepłynie przez galwanometr, przy założeniu, że wcześ-

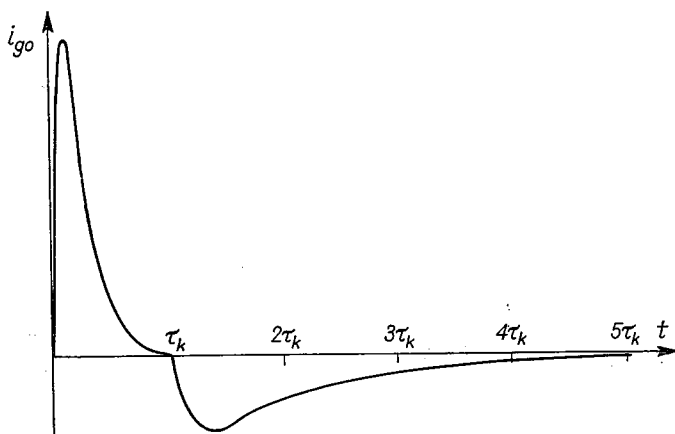
niej został włączony prąd I_b :

$$\begin{aligned} \text{dla } t \leq t_z \quad i_{go} &= \frac{\psi_{ko}}{R_c + R_g} \frac{1}{\tau_b - \tau_c} \left(e^{-\frac{t}{\tau_b}} - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right), \\ \text{dla } t \geq t_z \quad i_{go} &= \frac{\psi_{ko}}{R_c + R_g} \left[\frac{1}{\tau_b - \tau_c} \left(e^{-\frac{t}{\tau_b}} - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right) - \frac{1}{\tau_k - \tau_c} \left(e^{-\frac{t-t_z}{\tau_k}} - e^{-\frac{t-t_z}{\tau_c}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Przebieg strumienia sprzężonego z cewką czujnikową oraz prądu i_{go} w funkcji czasu, dla najniekorzystniejszego przypadku, w którym $\tau_k = t_z$, jest podany na rys. 7.6 i 7.7. Ponieważ $\tau_c = \frac{1}{6} \tau_k$, możemy przyjąć $Q_{01} = -Q_{02} = \frac{\psi_{ko}}{R_c + R_g}$, a czas przepływu ładunków $t_2 = t_z + 4\tau_k \approx 5\tau_k$.



Rys. 7.6. Przebieg wypadkowego strumienia Ψ_o sprzężonego z cewką czujnikową w przypadku dwóch niezależnych źródeł zasilających układ pomiarowy



Rys. 7.7. Przebieg prądu i_{go} w obwodzie cewki czujnikowej

Z warunku (7.22) określa się maksymalną wartość stałej czasowej τ_k odniesioną do okresu wahań nietłumionych T_0 . Wynosi ona

$$\frac{\tau_{kmax}}{T_0} = \frac{1}{15\pi} \frac{S_b}{S_{bo}} \cdot 10^{-3}. \quad (7.26)$$

Stąd dla $T_o = 5$ s otrzymamy $\tau_{kmax} \leq 0,05$ ms, a więc warunek zbliżony do przypadku poprzedniego.

Zachodzące zjawiska przejściowe zostały rozpatrzone przy włączaniu prądów obu cewek. Sposób ten jest jednak niekorzystny. Pomiar natężenia prądu metodą kompensacyjną może być bowiem zakończony dopiero po pewnej chwili od momentu jego włączenia. W ciągu tego czasu może nastąpić niewielkie zmniejszenie wartości natężenia prądu w wyniku zmiany *SEM* źródła zasilającego. Nie da się więc dokładnie określić rzeczywistej zmiany natężenia pola badanego.

Z tych samych względów nie należy stosować zmiany pola badanego i kompensującego przez zmianę kierunku prądów w obu cewkach. Najkorzystniejsze wyniki uzyskamy stosując wyłączanie obu prądów natychmiast po wykonaniu ich pomiarów. Uzyskane wówczas przebiegi mogą się nieco różnić od podanych na rys. 7.5, a to na skutek zmiennej oporności łuku. Pewnemu skróceniu może ulec również czas przepływu t_2 prądu galwanometru.

Dla wyeliminowania występujących w pomiarach zakłóceń należy zastosować wyrównanie stałych czasowych obu obwodów. Najlepsze efekty uzyskuje się przez szeregowe włączenie regulowanej indukcyjności do obwodu cewki o mniejszej stałej czasowej.

Na zakończenie zbadamy jeszcze wpływ czasu nierównoczesności t_z zamykania styków wyłącznika przy równości stałych czasowych $\tau_b = \tau_k$. Czas t_0 przejścia prądu przez wartość zerową określony po przyrównaniu zależności (7.25) do zera wynosi:

$$t_0 = \frac{\tau_k}{\frac{\tau_k}{\tau_c} - 1} \ln \frac{e^{\frac{t_z}{\tau_c}} - 1}{e^{\frac{t_z}{\tau_k}} - 1}. \quad (7.27)$$

Ładunek Q_{01} określimy, całkując wyrażenie (7.25) dla $\tau_k = \tau_b$ w przedziale od $t = 0$ do $t = t_z$. W wyniku otrzymamy

$$Q_{01} = \frac{\psi_{ko}}{R_z + R_g} \left(e^{\frac{t_z}{\tau_k}} - 1 \right) \left(\frac{e^{\frac{t_z}{\tau_k}} - 1}{e^{\frac{t_z}{\tau_c}} - 1} \right)^{\frac{1}{\frac{\tau_k}{\tau_c} - 1}} = \frac{\psi_{ko}}{R_c + R_g} Y_{tz}. \quad (7.28)$$

Zmiany wyrażenia Y_{tz} w przypadku $\tau = \frac{\tau_k}{6}$ oraz $\tau_k = 2 \div 20$ ms są przedstawione w tablicy 7.1. Przyjmując czas przepływu ładunków przy kompensacji analogicznie jak w poprzednim przypadku $t_2 = 5\tau_k$, określa się z warunku (7.22) maksymalną wartość stałej czasowej τ_{kmax} w odniesieniu do okresu wahań nietłumionych T_o .

$$\frac{\tau_{kmax}}{T_o} = \frac{1}{15\pi} \frac{S_b}{S_{b0}} \frac{1}{Y_{tz}} \cdot 10^{-3}. \quad (7.29)$$

Obliczone z zależności (7.29) dopuszczalne wartości τ_{kmax} przy założeniu $T_o = 5$ s zestawione są w tablicy 7.1. Z porównania zestawionych w tablicy wartości τ_k oraz τ_{kmax} wynika, że zastosowanie wyłącznika dwubiegunowego do włączania prądu I_b oraz I_k jest niewskazane nawet w przypadku równości stałych czasowych $\tau_b = \tau_k$. Jeżeli nie jest jednak możliwe stosowanie wspólnego źródła dla zasilania układu obu cewek, należy używać

Tablica 7.1

 Wartości Y_{tz} w zależności od t_z , oraz τ_k dla $\tau_c = \frac{\tau_k}{6}$

t_z [ms]	2				0,1	
τ_k [ms]	2	5	10	20	2	20
Y_{tz}	0,576	0,270	0,138	0,070	0,0348	0,0035
τ_{kmax} [ms]	0,10	0,22	0,42	0,83	1,7	17

wyłącznika konstrukcji specjalnej, dla którego czas nierównoczesności zamykania styków jest mniejszy od 0,1 ms.

Na podstawie przeprowadzonych rozważań można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Jeżeli zmiana pola badanego i kompensującego jest wytwarzana przez zmianę prądów obu cewek, konieczne jest wyrównanie stałych czasowych tych cewek, dla wyeliminowania zakłóceń, które uniemożliwiają dokładne określenie stanu równowagi.

2. Z tego samego powodu przerywanie prądów cewki badanej i kompensującej powinno być wykonane za pośrednictwem wyłącznika jednonożowego.

3. Różnice stałych czasowych nie odgrywają roli, gdy zmiana natężenia pola badanego i kompensującego następuje przez półobrot cewki czujnikowej. Należy jednak pamiętać, by oś obrotowa cewki czujnikowej pokrywała się wówczas z kierunkiem nie mierzonej składowej natężenia pola. Tak więc przy pomiarze składowej pionowej pola oś obrotu cewki czujnikowej powinna się pokrywać z kierunkiem składowej poziomej. Niespełnienie tego warunku spowoduje zakłócające odchylenie plamki galwanometru, które uniemożliwia dokładne ustalenie stanu kompensacji analogicznie jak w poprzednio omawianych przypadkach.

8. DOKŁADNOŚĆ POMIARU

W warunkach odniesienia dokładność pomiaru określa podstawowy uchyb względny $\delta_p H$. Oblicza się go jako średnią geometryczną uchybów składowych poszczególnych wielkości, które traktujemy jako zmienne niezależne.

$$\delta_p H = \sqrt{\sum_{k=1}^n (w_k \delta X_k)^2} \quad (8.1)$$

gdzie:

δX_k — uchyb względny od wielkości składowych X_k ,

w_k — współczynnik ważkości określony wzorem

$$w_k = \frac{X_k}{H} \frac{\partial H}{\partial X_k}. \quad (8.2)$$

Współczynnik ważkości równy jest więc jedności dla wszystkich wielkości, które wpływają liniowo na wartość mierzoną.

Uchyb dodatkowy $\delta_a H$, gdy ustalone warunki pomiaru mieszczą się w granicach dopuszczalnej tolerancji, powinien być pomijalny w porównaniu z uchybem podstawowym.

Poszczególne składowe uchyby podstawowego zostaną przeanalizowane w oparciu o wzór określający wartość natężenia pola badanego

$$H = \frac{I_z}{2L} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{I_z}{2L} \frac{1}{\sqrt{L^2+a^2}}. \quad (8.3)$$

Uchyb w określeniu wartości prądu I zależny jest od stosowanej metody mierniczej. Pomiar prądu przy użyciu kompensatora laboratoryjnego może być wykonany z uchybem poniżej 0,5‰. Do zasilania cewki kompensującej oraz wytwarzającej pole badane należy stosować źródło o wysokiej stabilności. Na podkreślenie zasługuje przy tym fakt, że nawet przy zasilaniu obu cewek z jednego źródła napięcia, mogą wystąpić zmiany w rozplywie prądów na skutek nierównomiernych przyrostów oporności poszczególnych cewek, wywołanych odmiennymi warunkami chłodzenia.

Dokładne określenie liczby zwojów przy prawidłowo działającym liczniku obrotów nawijarki nie nastręcza żadnych trudności.

Całkowitą długość cewki $2L$ przy starannym jej wykonaniu można pomierzyć z dokładnością $\pm 0,1$ mm. Przyjmując, że długość cewki kompensującej jest większa od 20 cm, otrzymamy względny uchyb długości $\delta L < 0,5\%$. Współczynnik ważkości w_L obliczony ze wzoru (8.2) wynosi $w_L = \frac{k^2}{1+k^2}$. Dla $k = 4,5$ otrzymamy $w_L = 0,95 \approx 1$.

Średni promień cewki solenoidalnej a określa się w oparciu o średnicę d_w korpusu, na którym nawinięto uzwojenie, oraz średnicę zewnętrzną d_k cewki kompensującej z zależności:

$$a = \frac{1}{4} (d_w + d_k).$$

Pomiarzenie średnicy d_w z uchybem $\pm 0,1$ mm nie nastręcza większych trudności. Przy pomiarze średnicy d_k , na skutek niewielkich rozbieżności wymiarów wzdłuż obwodu, należy przyjąć uchyb dwukrotnie większy, a mianowicie $\pm 0,2$ mm. Ostatecznie więc uchyb bezwzględny promienia a będzie wynosić $\Delta a = \pm 0,06$ mm, a więc $\Delta a \approx \frac{\Delta L}{2}$. Przy za-

łożeniu $a = \frac{L}{k}$, uchyb względny $\delta a = \frac{\Delta a}{a} \approx k \delta L$. Współczynnik ważkości obliczany

ze wzoru (8.2) wynosi $w_a = \frac{1}{1+k^2}$. Dla $k = 4,5$ otrzymamy $w_a = 0,047 \approx 0,05$. Chociaż więc uchyb względny δa przy pomiarze promienia jest k -krotnie większy od uchybu względnego δL , to wpływ jego jest k^2 -krotnie mniejszy. W efekcie wpływ uchybu δa na wartość natężenia pola badanego jest znikomo mały.

Z przeprowadzonej dyskusji uchybów składowych wynika, że o wartości uchybu podstawowego decyduje głównie uchyb pomiaru prądu oraz uchyb pomiaru długości cewki. Ostatecznie dla $2L > 20$ cm uchyb podstawowy nie przekroczy wartości

$$\delta_p H = \sqrt{(\delta I)^2 + (w_i \delta L)^2 + (w_a k \delta L)^2} = 0,70\%.$$

Z kolei zostanie omówiony wpływ poszczególnych uchybów dodatkowych. Wymiary cewki czujnikowej powinny być tak dobrane, by strumień dodatkowy sprzężony z cewką czujnikową był równy zeru. Warunek ten jest spełniony dla ściśle określonego stosunku boków. Zagadnienie to było już omówione w rozdziale 5. Stwierdzono tam, że niezachowanie tego stosunku w granicy $\pm 2\%$ powoduje uchyb niedopasowania $\delta_N H \approx 0,03\%$. Zachowanie wymiarów cewki czujnikowej z tolerancją $\pm 2\%$ w przypadku $2L > 20$ cm nie nastęrcza większych trudności.

Wpływ grubości cewki kompensującej na wartość składowej osiowej natężenia pola był omawiany w rozdziale 6. Stwierdzono tam, że przy zachowaniu warunku $b < 0,3a$ uchyb w określeniu składowej pionowej pola w przypadku posługiwania się wzorem wyprowadzonym dla obwodu liniowego nie przekracza wartości $0,15\%$. Wartość ta jest blisko pięciokrotnie mniejsza od wypadkowego uchybu podstawowego, dlatego wpływ jej na całkowity uchyb pomiaru jest praktycznie pomijalny.

Ustawienie cewki czujnikowej symetrycznie wzdłuż osi cewki kompensującej jest stosunkowo łatwe. Kołnierze cewki czujnikowej opierając się o wewnętrzne ścianki korpusu cewki kompensującej służą bowiem równocześnie jako przewodnice. Pewne trudności nastęrcza natomiast ustawienie cewki czujnikowej w środku wysokości cewki kompensującej, gdyż przesunięcie w stosunku do środka może dochodzić do ± 1 mm. Przy założeniu, że wysokość cewki czujnikowej jest większa od 20 cm, uchyb przesunięcia środka cewki czujnikowej nie przekroczy 4% . Dla małych równoległych przesunięć cewki czujnikowej, zgodnie z rys. 5.5, niejednorodność pola zmienia się jednak praktycznie liniowo. Przyrosty pola dla punktów górnej połówki cewki są odwrotnego znaku niż dla dolnej i kompensują się wzajemnie. Zmiany zaś pola w pobliżu osi poziomej dla przesunięć pionowych oraz w pobliżu osi pionowej dla przesunięć poziomych przy podanej tolerancji 4% są zgodnie z poprzednim rysunkiem pomijalne.

Uchyb od nieczułości układu wynika z wartości natężenia pola badanego H oraz czułości układu S_M . Wpływ jego zaznaczy się w pobliżu dolnej wartości zakresu pomiarowego. Wartość uchybu $\delta_n H$ od nieczułości układu obliczamy ze wzoru

$$\delta_n H = \frac{k_a}{S_M H}, \quad (8.4)$$

gdzie k_a — dostrzegalna wartość odchylenia plamki galwanometru.

Przy wyeliminowaniu zakłóceń spowodowanych nierównomiernością zanikania strumieni cewki probierczej i kompensującej można przyjąć $k_a = 0,5$ dz. Uchyb od nieczułości układu przy dolnej wartości zakresu pomiarowego nie powinien być większy od uchybu podstawowego, a więc $(\delta_n H)_{\max} < 0,7\%$. Stąd przy znanej czułości S_M dolna wartość zakresu pomiarowego

$$H_{\min} = \frac{k_a}{(\delta_n H)_{\max} S_M}. \quad (8.5)$$

Opierając się o dane galwanometrów z tablicy 3.3 przyjmujemy czułość charakterystyczną $S_M^* \approx 45 \cdot 10^3 \frac{dz}{Am^2}$. Czułość tego rzędu może być osiągnięta w przypadku zastosowania galwanometru firmy EAW (poz. 10 tablicy 3.3) dla odległości podziałki od lusterka gal-

wanometru równej 1,5 m. Galwanometr tego typu jest dostępny na rynku krajowym i posiada przy tym dość znaczny współczynnik dobroci.

Czułość układu pomiarowego zależy także od wymiarów cewki czujnikowej, są one przy tym ściśle związane z wysokością $2L$ cewki kompensującej, a mianowicie $d_z = 0,356L$ oraz $h_c = 0,250L$. Podstawiając je do zależności (3.39) otrzymamy

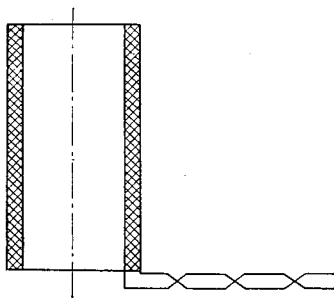
$$S_M = 2,85 \cdot 10^3 \sqrt{L^5}. \quad (8.6)$$

Jeżeli długość cewki $2L = 20$ cm, to $S_M = 9 \frac{dz}{A/m}$, a dolna wartość zakresu pomiarowego określona ze wzoru (8.5) wynosi $H_{min} = 80$ A/m. Obniżenie dolnego zakresu pomiarowego poniżej wartości 80 A/m jest możliwe w przypadku zwiększenia czułości układu pomiarowego, a to przez zastosowanie układu z wyłącznikiem w obwodzie cewki czujnikowej bądź przez dobór galwanometru o wyższym współczynniku dobroci, bądź też przez zwiększenie wymiarów cewki kompensującej i czujnikowej.

Zastosowanie galwanometru firmy Kipp & Zonen (poz. 5 tablicy 3.3) w układzie z wyłącznikiem w obwodzie cewki czujnikowej powiększy czułość układu dwudziestokrotnie. W efekcie przy poprzednich wymiarach cewki czujnikowej dolny zakres pomiarowy może być obniżony do 2 A/m.

Wzrost czułości układu pomiarowego przez zwiększenie wymiarów cewki kompensującej i czujnikowej może być określony ze wzoru (8.6). Dwukrotne zwiększenie wysokości cewki kompensującej obniży blisko trzykrotnie wartość dolnego zakresu pomiarowego.

W celu wyeliminowania zakłóceń w polu badanym pochodzących od przewodów zasilających, należy zwrócić uwagę na to, aby koniec i początek uzwojenia kompensującego znajdował się po tej samej stronie korpusu (rys. 8.1), a przewody zasilające były starannie skrócone.



Rys. 8.1. Wyprowadzenie zacisków i przewodów zasilających cewkę kompensującą

Spośród omawianych uchybów dodatkowych na dokładność pomiaru wpływa jedynie uchyb od nieczułości układu i to przy dolnej wartości zakresu pomiarowego. Graniczny uchyb względny pomiaru natężenia pola określony jest zależnością

$$\delta H = \sqrt{(\delta_p H)^2 + (\delta_n H)^2} \quad (8.7)$$

przy założeniu, że $\delta_n H < 0,7\%$ będzie wynosić $\delta H = 1\%$. Jest on więc dwukrotnie mniejszy od uchybu występującego w układzie z cewką podwójną [12].

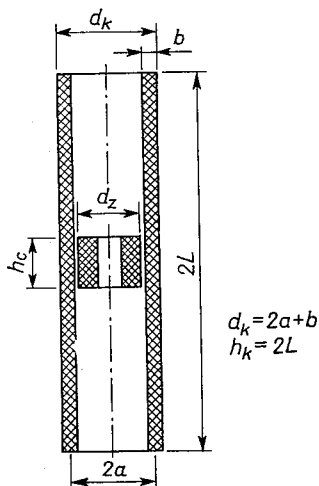
9. PORÓWNANIE CEWKI SOLENOIDALNEJ Z CEWKĄ PODWÓJNĄ

Istnieją dwie zasadnicze odmiany cewek kompensujących, a mianowicie: podwójna w układzie Helmholtza oraz rozpatrywana w niniejszej pracy cewka solenoidalna. W tablicy 9.1 dokonano porównania charakterystycznych wielkości dla cewki solenoidalnej oraz podwójnej. Uwzględniono przy tym następujące warianty. ■

1. Jednakowe średnice cewek kompensujących. Przypadek taki występuje przy ograniczeniu średnicy zewnętrznej układu, podczas gdy jego wysokość nie odgrywa roli. Dla jednakowych średnic cewek kompensujących, cewka czujnikowa umieszczona wewnątrz solenoidu może mieć znacznie większą średnicę w porównaniu z cewką czujnikową układu Helmholtza. Spełniony jednak musi być warunek liniowości pola badanego w obszarze cewki czujnikowej o większej średnicy.

2. Jednakowe średnice cewek czujnikowych. Przypadek ten interesuje nas, gdy wymiary cewki czujnikowej ograniczone są niejednorodnością pola badanego, a nie ma natomiast specjalnych ograniczeń odnośnie wymiarów cewki kompensującej. Średnicę cewki czujnikowej dobiera się wówczas tak, by pole badane można było jeszcze uważać za liniowo zmienne w jej obszarze.

3. Jednakowa wysokość cewek kompensujących. Przypadek ten zachodzi, gdy o ograniczeniu wymiarów układu pomiarowego decyduje jego wysokość. Wówczas cewka czujnikowa układu Helmholtza może mieć znacznie większą średnicę, o ile spełniony jest warunek liniowości pola badanego w jej obszarze.



Rys. 9.1. Oznaczenie wymiarów cewki solenoidalnej

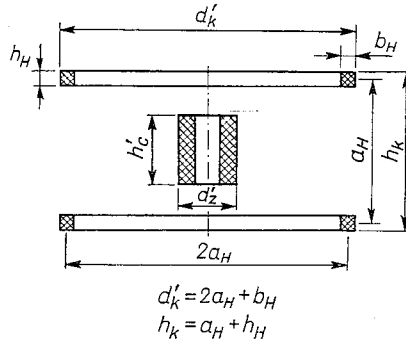
Oznaczenie zasadniczych wymiarów cewek kompensujących podano na rys. 9.1 oraz 9.2. Przekrój czynny miedzi s_{Cu} cewki solenoidalnej przy współczynniku wypełnienia

$$k_w = \frac{\pi}{4} k_i \text{ wynosi}$$

$$s_{Cu} = 2k_w b L = 2k_w \frac{b}{a} \frac{L^2}{k}. \quad (9.1)$$

Podstawiając $\frac{b}{a} = 0,3$ oraz $k = 4,5$ otrzymamy $s_{Cu} = 0,133 k_w L^2$. Przy założonej gęstości prądu j można określić przepływ cewki $Iz = 0,133 j k_w L^2$. Na podstawie wzoru (4.9) maksymalna wartość natężenia pola $H_{o\max}$, jakie może wytworzyć cewka solenoidalna w środku układu, wyniesie

$$H_{o\max} = 0,0648 j k_w L. \quad (9.2)$$



Rys. 9.2. Oznaczenie wymiarów cewki podwójnej

Przekrój czynny miedzi dla cewki podwójnej

$$s'_{Cu} = 2k_w b_H h_H. \quad (9.3)$$

Jeśli przyjąć $b_H = 0,1 a_H$ oraz $h_H = 0,09 a_H$, to uchyb wynikający z założenia liniowości obwodu prądowego wynosi 0,65% [12]. Warto tutaj przypomnieć, że dla cewki solenoidalnej o grubości $b = 0,3 a$ uchyb wynikający z tego założenia jest czterokrotnie mniejszy. Po podstawieniu przyjętych wartości do wzoru (9.3) otrzymamy $s'_{Cu} = 0,0180 k_w a_H^2$. Stąd przepływ $Iz' = 0,0180 j k_w a_H^2$. Natężenie pola w środku cewki podwójnej określone jest zależnością:

$$H'_o = C_H \frac{Iz'}{a_H}, \quad (9.4)$$

przy czym stała $C_H = 0,716$ [12].

Maksymalna wartość natężenia pola $H'_{o\max}$ dla założonego przepływu wyniesie

$$H'_{o\max} = 0,0129 j k_w a_H. \quad (9.5)$$

Dla znanej maksymalnej wartości natężenia pola oraz objętości miedzi V_{Cu} stopień wyzyskania cewki kompensującej $k_{wk} = \frac{H'_{o\max}}{V_{Cu}}$, przy czym $V_{Cu} = 2\pi a s_{Cu}$. Stopień wyzyskania cewki solenoidalnej

$$k_{wk} = \frac{j}{\pi} \frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}} \frac{1}{(2L)^2}. \quad (9.6)$$

Analogicznie stopień wyzyskania cewki podwójnej

$$k'_{wk} = \frac{j}{\pi} \frac{2C_H}{(2a_H)^2}. \quad (9.7)$$

Z porównania wzoru (9.6) i (9.7) można wyznaczyć stosunek $\frac{L}{a_H}$, przy którym stopień wyzyskania obu układów posiada jednakową wartość, a mianowicie

$$\frac{L}{a_H} = \frac{k}{\sqrt{2C_H \sqrt{1+k^2}}}. \quad (9.8)$$

Dla $k = 4,5$ otrzymamy $\frac{L}{a_H} = 1,75$. Jeśli więc $L < 1,75a_H$, to cewka solenoidalna posiada lepszy stopień wyzyskania w porównaniu z cewką podwójną.

Dla wszystkich rozpatrywanych przypadków wymiary cewki czujnikowej są tak dobrane, by niejednorodność pola kompensującego w ich zasięgu nie przekraczała wartości 1‰ oraz by uchyb niedopasowania cewki czujnikowej był równy zeru. Tak więc średnica

Tablica 9.1

Zestawienie charakterystycznych wielkości cewki solenoidalnej i podwójnej w układzie Helmholtza

Rodzaj cewki kompensującej	Jednakowe średnice cewek kompensujących		Jednakowe średnice cewek czujnikowych		Jednakowe wysokości cewek kompensujących	
	Cewka solenoidalna	Cewka podwójna	Cewka solenoidalna	Cewka podwójna	Cewka solenoidalna	Cewka podwójna
Średnica cewki kompensującej d_k	1	1	1,43	4,77	0,256	1,91
Wysokość cewki kompensującej h_k	3,92	0,525	5,61	2,50	1	1
Objętość cewki kompensującej V_k	3,08	0,412	8,83	44,6	0,0514	2,86
Przekrój czynny miedzi s_{Cu}	$0,512k_{zw}$	$0,00406k_{zw}$	$1,06k_{zw}$	$0,102k_{zw}$	$0,0332k_{zw}$	$0,0149k_{zw}$
Objętość miedzi V_{Cu}	$1,40k_{zw}$	$0,0121k_{zw}$	$4,14k_{zw}$	$1,45k_{zw}$	$0,0232k_{zw}$	$0,0848k_{zw}$
Maksymalna wartość natężenia pola H_{max}	$0,127jk_{zw}$	$0,0614jk_{zw}$	$0,182jk_{zw}$	$0,0307jk_{zw}$	$0,0324jk_{zw}$	$0,0117jk_{zw}$
Stopień wyzyskania $k = \frac{H_{max}}{V_{Cu}}$	0,0906j	0,506j	0,440j	0,0212j	1,40j	0,138j
Średnica cewki czujnikowej d_z	0,696	0,210	1	1	0,177	0,399
Wysokość cewki czujnikowej h_c	0,490	0,238	0,702	1,14	0,125	0,454
Czułość układu $S_M = S_M^* d_z^2 \sqrt{h_c}$	$0,339S_M^*$	$0,0215S_M^*$	$0,835S_M^*$	$1,14S_M^*$	$0,011S_M^*$	$0,095S_M^*$

zewnątrzną cewki czujnikowej współpracującej z cewką solenoidalną wynosi $d_z = 0,356L$, a jej wysokość $h_c = 0,250L$. Odpowiednie wymiary dla cewki czujnikowej w układzie cewki podwójnej: $d'_z = 0,44a_H$ oraz $h'_c = 0,50a_H$ [12].

Na podstawie danych liczbowych z tablicy 9.1 wynika, co następuje:

1. Jeżeli nie ma specjalnych ograniczeń dla wymiarów cewki kompensującej, to o wymiarach układu decyduje wówczas założona średnica cewki czujnikowej. W przypadku tym korzystnie jest stosować cewkę solenoidalną, która przy tym samym nakładzie miedzi pozwala zwiększyć trzykrotnie wartość górnego zakresu pomiarowego, przy praktycznie nie zmienionej wartości zakresu dolnego.

2. Jeśli o ograniczeniu wymiarów układu decyduje jego średnica, to należy wówczas stosować cewkę solenoidalną, która zapewni 20-krotne powiększenie wartości górnego zakresu pomiarowego, oraz 15-krotne obniżenie wartości dolnego zakresu, pomimo że posiada ona pięciokrotnie gorszy stopień wyzyskania w porównaniu z cewką podwójną.

3. Jeżeli ograniczeni jesteśmy wysokością cewki kompensującej, to należy zdecydować się na podwójną cewkę kompensującą. Posiada ona wprawdzie 10-krotnie gorszy stopień wyzyskania oraz 3-krotnie niższą wartość górnego zakresu pomiarowego, ale zapewnia równocześnie 10-krotne obniżenie wartości dolnego zakresu.

W obu ostatnich przypadkach o wyborze układu decyduje jego zakres pomiaru, a nie ekonomiczność rozwiązania.

Zestawienie podstawowych parametrów układu z cewką solenoidalną w zależności od wysokości cewki kompensującej podano w tablicy 9.2.

Tablica 9.2

Zestawienie głównych parametrów cewki solenoidalnej w zależności od jej wysokości

Wysokość cewki $2L$ [cm]		20	40	60
Ciężar miedzi [kG]		1	8	27
Czułość układu $S_M \left[\frac{dz}{A/m} \right]$		$3,2 \cdot 10^{-3} S_M^*$	$1,8 \cdot 10^{-2} S_M^*$	$5,0 \cdot 10^{-2} S_M^*$
Górna granica zakresu pomiarowego H_{max} [A/m] dla gęstości prądu $j = 2 \cdot 10^6$ A/m ²		8,000	16,000	24,000
Dolna granica zakresu pomiarowego H_{min} [A/m]	dla galwanometru Lp. 10 z tablicy 3.3	80	14	5
	dla galwanometru Lp. 5 z tablicy 3.3 w układzie z rys. 3.6	2	0,3	0,01

Należy podkreślić, że cewka solenoidalna zapewnia wyższą dokładność pomiaru w porównaniu z cewką podwójną. Wynika to stąd, że niedotrzymanie założonych wymiarów średnicy cewki solenoidalnej powoduje znacznie mniejszy uchyb pomiaru aniżeli w układzie cewki podwójnej. Zmiana długości cewki solenoidalnej oraz odstępów dwóch cewek w ukła-

dzie Helmholtza wpływa wprawdzie w sposób zbliżony na dokładność pomiaru, ale dla równych średnic cewek czujnikowych cewka solenoidalna jest dwukrotnie wyższa od cewki podwójnej. Przy jednakowych tolerancjach bezwzględnych wysokości tolerancja względna jest dwukrotnie mniejsza. Mniejszy więc będzie wynikający stąd uchyb pomiaru.

Zasadniczą wadą cewki solenoidalnej jest trudny dostęp do przestrzeni probierczej, w której jest umieszczona cewka czujnikowa. Dlatego też przy określaniu wymiarów solenoidalnej cewki kompensującej nie przewidziano możliwości obracania cewki czujnikowej. W efekcie układ z cewką solenoidalną może być stosowany do pomiarów pól magnetycznych pochodzenia prądowego, nie nadaje się natomiast do pomiaru natężenia pola ziemskiego, gdy zmiana strumienia sprzężonego z cewką czujnikową wytwarzana jest przez jej półobrot. Trudność tę można ominąć przez zastosowanie układu z rys. 2.2 z dwoma cewkami czujnikowymi. Wówczas równocześnie z półobrotem cewki czujnikowej C_{ob} umieszczonej w obszarze pola badanego należy wyłączyć prąd cewki kompensującej. Układ ten jest jednak bardziej skomplikowany w porównaniu z układem cewki podwójnej. Istnieją poza tym trudności z eliminacją zakłócających odchyłeń płamki galwanometru, spowodowanych nierównomiernością zmian w czasie obu strumieni. Dla pomiaru natężenia pola ziemskiego lepszy i prostszy jest układ z podwójną cewką kompensującą.

10. SPRAWDZENIE CZUŁOŚCI UKŁADU POMIAROWEGO

Wartość dolnego zakresu pomiaru małych pól magnetycznych w metodzie kompensacyjnej jest ograniczona czułością układu pomiarowego. Istotnym więc zagadnieniem jest taki dobór parametrów układu oraz metody pomiaru, które zapewnią optymalną czułość. Dla lepszego zobrazowania tego zagadnienia przeprowadzono pomiary czułości układu dla galwanometrów wyszczególnionych w tablicy 10.1.

Tablica 10.1

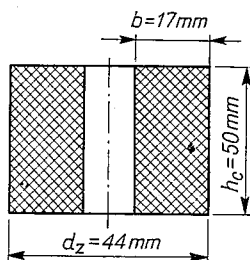
Dane charakterystyczne galwanometrów

Oznaczenie galwanometru	S_i	R_g	R_k	T_0	$n = \frac{R_k}{R_g}$
—	dz/A	Ω	Ω	s	—
G_1	$6,9 \cdot 10^9$	700	11.700	7,5	17
G_2	$3,4 \cdot 10^6$	9,8	30	4	3,1
G_3	$4,3 \cdot 10^7$	150	5.150	4	34

1. Wyznaczenie czułości układu pomiarowego. Pomiar czułości układu przeprowadzono dla galwanometru G_1 oraz cewki czujnikowej o wymiarach podanych na rys. 10.1. Parametry cewki i układu są zestawione w tablicy 10.2. Cewka czujnikowa została umieszczona w polu magnetycznym cewki probierczej o stałej $C_p = 1,13 \frac{\text{A/m}}{\text{mA}}$. Zmiana strumienia sprzężonego z cewką była wytwarzana przez włączenie

lub wyłączenie prądu zasilającego I . Odchylenie płamki galwanometru α spowodowane jest wówczas zmianą pola magnetycznego o wartości $H = C_p \cdot I$. Czułość układu pomiarowego oblicza się ze wzoru

$$S_M = \frac{\alpha}{H} = \frac{\alpha}{C_p \cdot I}. \quad (10.1)$$



Rys. 10.1. Wymiary cewki czujnikowej

Tablica 10.2

Parametry cewki czujnikowej

Oporność cewki	$R_c = 12.120 \, \Omega$
Średnica drutu nawojowego	$d = 0,10 \, \text{mm}$
Liczba zwojów	$z = 67.000$
Stosunkowa grubość $x = \frac{b}{a}$	$x = 0,386$
Współczynnik $M = \frac{R_g + R_c}{R_k}$	$M = 1,10$

Pomierzoną czułość układu porównano z wartością obliczoną ze wzoru (3.19) dla znanych parametrów cewki czujnikowej i układu. Wyniki zestawione są w tablicy 10.3.

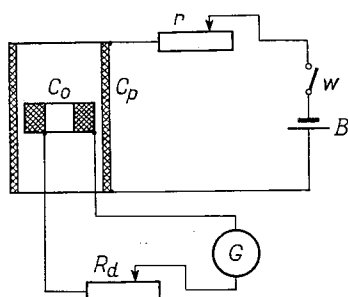
2. Wyznaczenie charakterystyki $S_M = f(M, n)$ dla $M = \frac{R_c + R_g}{R_k}$ oraz $n = \frac{R_k}{R_g} = \text{const.}$ Wyznaczenie charakterystyki $S_M = f(M, n)$ zostało przeprowadzone w układzie zastępczym z rys. 10.2 dla galwanometrów G_2 i G_3 różniących się znacznie wartością parametru n . Cewkę czujnikową o wymiarach podanych poprzednio, liczbie zwojów $z_c = 1400$ oraz oporności $R_c = 5,43 \, \Omega$ umieszczono w polu magnetycznym cewki o stałej $C_p = 11,1 \frac{\text{A/m}}{\text{mA}}$. Zmianę stosunku M realizowano przez zmianę oporu dekadowego R_d , a pozorny wzrost liczby zwojów następował przez proporcjonalne zwiększenie prądu zasilającego I cewkę probierczą. Przy obliczaniu czułości układu niezależnie od nastawionej wartości prądu I zmiana natężenia pola H powodująca odchylenie α płamki galwanometru wynosiła

$$H = C_p I_c, \quad (10.2)$$

Tablica 10.3

Pomiar czułości układu

Lp.	I	α	H	S_M	
				pomierzona	obliczona
—	mA	dz	A/m	$\frac{dz}{A/m}$	$\frac{dz}{A/m}$
1	1,0	11	1,13	9,75	9,72
2	1,5	17	1,69	10,0	
3	2,0	22	2,26	9,75	


 Rys. 10.2. Układ zastępczy do wyznaczenia charakterystyki $S_M = f(M, n)$

Tablica 10.4

 Określenie charakterystyki $S_{Mpom} = f(M, n)$ oraz $S_{Mobl} = f(M, n)$ dla galwanometru G_2

$M = \frac{R_c + R_g}{R_k}$	0,51	0,75	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	10
$R_c [\Omega]$	5,43	12,7	20,2	35,2	50,2	65,2	80,2	110	170	290
z	1 410	2 150	2 720	3 590	4 300	4 890	5 410	6 350	7 880	10 300
$I [A]$	0,300	0,458	0,580	0,785	0,915	1,04	1,15	1,35	1,68	2,19
$\alpha [dz]$	32	44	52	57	59	59	58	55	50	43
$H [A/m]$	339 = const									
$S_{Mpom} \left[\frac{dz}{A/m} \right]$	0,094	0,130	0,153	0,168	0,174	0,174	0,171	0,162	0,148	0,127
$S_{Mobl} \left[\frac{dz}{A/m} \right]$	0,089	0,129	0,150	0,169	0,176	0,177	0,176	0,169	0,156	0,134

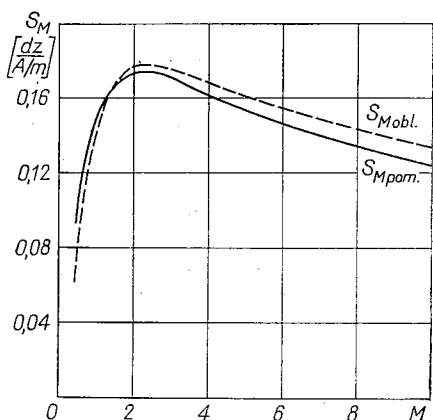
gdzie I_c — prąd zasilający cewkę probierczą w przypadku,

gdy $R_d = 0$.

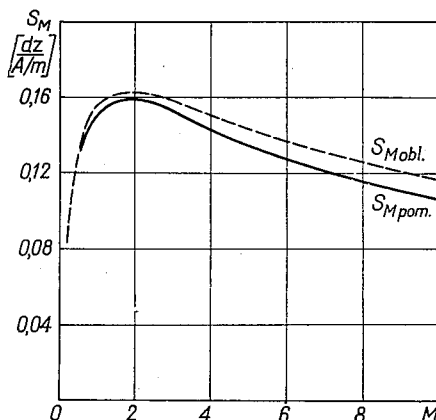
Tablica 10.5

Określenie charakterystyki $S_{Mpom} = f(M, n)$ oraz $S_{Mobl} = f(M, n)$ dla galwanometru G_3

$M = \frac{R_c + R_g}{R_k}$	0,03	0,50	0,75	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	10
$R_c [\Omega]$	5,43	2 420	3 700	5 000	7 575	10.150	12.750	15.300	20.450	30.750	51.350
z	1 410	27.500	34.100	39.600	48.600	56.200	63.300	69.200	80.000	98.000	128.000
$I [A]$	0,230	4,49	5,56	6,45	7,93	9,17	10,3	11,3	13,1	15,8	20,9
$\alpha [dz]$	—	34	38	39	41	41	41	40	37	33	28
$H [A/m]$	260 = const										
$S_{Mpom} \left[\frac{dz}{A/m} \right]$	—	0,131	0,146	0,150	0,158	0,158	0,158	0,154	0,143	0,127	0,107
$S_M \left[\frac{dz}{A/m} \right]$	—	0,128	0,147	0,154	0,162	0,163	0,161	0,158	0,151	0,137	0,116



Rys. 10.3. Wykres zależności $S_M = f(M, n)$ dla galwanometru G_2

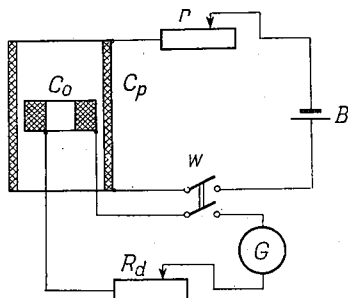


Rys. 10.4. Wykres zależności $S_M = f(M, n)$ dla galwanometru G_3

Pomierzone i obliczone ze wzoru teoretycznego wartości czułości S_M zostały zestawione w tablicy 10.4 dla galwanometru G_2 oraz w tablicy 10.5 dla galwanometru G_3 . Wykresy zależności $S_M = f(M, n)$ przedstawiono na rys. 10.3 i 10.4.

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że czułość obu układów jest prawie identyczna pomimo 10-krotnej różnicy współczynników dobroci $k_d = \frac{2\pi S_i}{T_o \sqrt{R_g}}$, przy czym nieco większą czułość posiada galwanometr nawet o mniejszej wartości współczynnika k_d .

3. Porównanie czułości układu zwykłego oraz z wyłącznikiem w obwodzie cewki czujnikowej. Pomiar przeprowadzono w układzie zastępczym z rys. 10.5. Rozwieranie obwodu galwanometru było realizowane za po-



Rys. 10.5. Pomiar czułości układu z wyłącznikiem w obwodzie cewki czujnikowej

średnictwem wyłącznika dwubiegunowego. Jeden z noży wyłączał prąd zasilający cewkę probierczą, drugi z pewnym opóźnieniem przerywał obwód cewki czujnikowej. Dla użytych w pomiarach galwanometrów określono optymalną czułość S_M układu zwykłego dla $R_c = 2R_k$ oraz czułość układu S_{MP} z wyłącznikiem w obwodzie cewki czujnikowej

Tablica 10.6

Porównanie czułości układu zwykłego dla $R_c = 2R_k$ oraz z wyłącznikiem w obwodzie cewki czujnikowej dla $R_c = R_g$

Oznaczenie galwanometru	H A/m	α		S_M dz A/m	S_{MP}		$\frac{S_{MP}}{S_M}$ —
		$R_c = 2R_k$	$R_c = R_g$		pomierzona	obliczona	
		dz	dz		dz A/m	dz A/m	
G_1	4,52	45	185	9,9	41	42,5	4,1
G_2	40,5	7	14,5	0,17	0,36	0,406	2,1
G_3	31,6	5	35	0,16	1,1	1,15	7,0

dla $R_c = R_g$. Zestawienie otrzymanych wyników podano w tablicy 10.6. Dodatkowo obliczono czułość S_{MP} ze wzoru teoretycznego 3.41.

Z zestawionych w tablicy 10.6 wyników widać wyraźnie zalety stosowania układu z wyłącznikiem w obwodzie cewki czujnikowej, przy czym korzyści stąd wynikające wzras-

tają wraz ze wzrostem stosunku $n = \frac{R_k}{R_g}$. Zwiększenie czułości dla galwanometru $G_2(n = 3,1)$ wynosi 2,1, podczas gdy galwanometru $G_3(n = 34)$ aż 7,0. Przy zbliżonej czułości obu układów uzyskuje się różne czułości w układzie z wyłącznikiem w obwodzie cewki czujnikowej.

11. ZAKOŃCZENIE

Omawiany układ nadaje się do dokładnego pomiaru natężenia pola pochodzenia prądowego, które w obszarze cewki czujnikowej można traktować jako liniowe. Ze względu na trudności umieszczenia wewnątrz cewki solenoidalnej obrotowej cewki czujnikowej, występują komplikacje w pomiarze natężenia pola ziemskiego. Analizowany układ pomiarowy może być zaliczony do absolutnej metody pomiaru małych pól magnetycznych. Wartość pola mierzonego jest bowiem określana z pomiaru prądu cewki kompensującej oraz wymiarów geometrycznych układu. Górny zakres pomiarowy tej metody zachodzi na dolny zakres pomiaru metody rezonansu jądrowego, która również uchodzi za absolutną, ale dla większych natężeń pola. Metoda kompensacyjna stanowi więc przedłużenie dokładnej metody rezonansu jądrowego dla niewielkich wartości natężenia pola.

Stosowane w praktyce układy do pomiaru natężenia pola magnetycznego posiadają wprawdzie większą czułość i lepiej nadają się do pomiarów porównawczych, nie mogą jednak pod względem dokładności konkurować z metodą kompensacyjną. W pracy rozpatrzono aparaturę o uchybie pomiaru 1%. Przy precyzyjnym wykonaniu cewki kompensującej, zacieśnieniu tolerancji wymiarów i przestrzeni probierczej oraz uwzględnieniu poprawki od grubości cewki, można osiągnąć jeszcze większą dokładność pomiaru.

Praca posiada praktyczne znaczenie przy projektowaniu cewek probierczych mających zapewnić dużą jednorodność pola w obszarach o znacznych rozmiarach. Uzyskanie takiego obszaru najwygodniej jest otrzymać stosując cewki o nierównomiernej grubości uzwojenia, bądź też składające się z kilku sekcji o określonych stosunkach liczby zwojów. Wzory teoretyczne określające natężenie pola są wówczas skomplikowane, a wynik może być obciążony znacznym uchybem. Mogą również występować zakłócenia w rozkładzie pola, pochodzące od wpływu konstrukcji stalowych budynku. Konieczne jest wówczas dokładne określenie wartości natężenia pola drogą pomiarową, co może być zrealizowane jedynie za pośrednictwem omawianej metody kompensacyjnej.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. Cayrel, Mesure balistique des petit flux d'induction, Le Journal de Physique et le Radium, 22, Juin 1961.
2. P. Gruvet, Mesure radioélectrique des champs magnétiques, Révue Générale de l'Électricité, 67, Juillet 1958.
3. W. Goworkow, Pole elektryczne i magnetyczne, Warszawa 1962.
4. B. Janowski, Magnetyzm ziemski, Warszawa 1958.
5. J. Kuryłowicz, Badania materiałów magnetycznych, Warszawa 1962.
6. F. Laws, Electrical Measurements, New York 1938.
7. E. Meyer, C. Moerder, Spiegelgalvanometer und Lichtzeigerinstrumente, Leipzig 1957.

8. M. Nałęcz, Niektóre metody wytwarzania jednorodnych małych pól magnetycznych, *Rozprawy Elektrotechniczne*, 3, 3, 1957.
9. H. Neumann, Messung magnetischer Gleichfelder nach dem induktiven Verfahren. Direkte Verfahren, *Archiv für Technisches Messen*, 391, 7, 1954.
10. H. Neumann, Messung magnetischer Gleichfelder nach dem induktiven Verfahren. Kompensationsverfahren, *Archiv für Technisches Messen*, 391, 8, 1954.
11. W. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, New York 1950.
12. A. Spichalski, Analiza układu kompensacyjnego do pomiaru małych pól magnetycznych, *Rozprawy Elektrotechniczne*, 10, 4, 1964.
13. S. Trzetrzewiński, Dokładność pomiarów elektrycznych, *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej*, 1952.
14. Katalog drutów nawojowych 8-K, Biuro Wydawnictw SEP, Warszawa 1960.

L. REFEROWSKI

THE OPTIMIZATION OF THE CIRCUIT FOR THE MEASUREMENT OF SMALL MAGNETIC FIELDS BY THE COMPENSATION METHOD WITH A SOLENOIDAL COIL

Summary

In the paper there are examined conditions for correct measurement of small magnetic fields by means of the compensation method using a solenoidal coil. There are defined the criteria for the most sensitive galvanometer in an ordinary set and in a set with a switch in the circuit of a coil detector. The author determines the optimum ratio length to diameter of the solenoidal coil. It is 4,5 in the case when the inhomogeneity of magnetic field does not exceed the value of 1‰ in the space of a coil detector. Next there are chosen the dimensions of the coil detector in such a way that the equality of explored and compensation field causes that the magnetic flux linkage with coil detector is equal zero. There is examined the influence of the winding of the compensation solenoidal coil on the value of magnetic field in the space of the detecting coil. There are also discussed disturbances which make it difficult to determine the condition of full compensation. This is caused by the differences between the time constant of the compensation coil and the same constant of the circuit which forms the exploring magnetic field. The methods of elimination of these disturbances are described. The comparison between the compensation solenoidal coil and the double coil in Helmholtz system is carried out. The total error and the limits of the measuring range are defined. When the current of the compensation coil is measured by a compensator the error does not exceed the value of 1‰ in the range from 2 to 8000 A/m.

L. REFEROWSKI

L'OPTIMISATION DU SCHÉMA DE MESURE DE PETITS CHAMPS MAGNÉTIQUES D'APRÈS LA MÉTHODE DE COMPENSATION AVEC BOBINE-SOLÉNOÏDE

Résumé

On a examiné dans cet ouvrage les conditions des mesures corrects de petits champs magnétiques d'après la méthode de compensation avec un solénoïde. On a déterminé les critères de choisir un galvanomètre assurant une sensibilité maximale au schéma ordinaire ainsi qu'au schéma avec interrupteur dans le circuit d'une bobine-captrice. On a déterminé la valeur optimum de la relation de la longueur du solénoïde au diamètre acceptant, que l'irrégularité du champ magnétique n'a pas excédé, dans l'espace de la bobine-captrice, la valeur de 1‰. En cas de la relation définie 4,5 on a choisi les dimensions de la bobine-captrice de telle façon que pour l'égalité du champ étudié et celui compensé le flux résultant, accouplé à la bobine, deviendrait zero. On a examiné aussi l'influence de l'épaisseur du bobinage du solénoïde sur la valeur du champ magnétique dans l'espace de la bobine-captrice. On a discuté les perturbations, existant en cours

de déterminer la compensation, causées par la différence des constantes de temps de la bobine de compensation et des bobines produisant le champ magnétique exploré. On a suggéré un moyen d'éliminer ces perturbations. On a comparé les bobines de compensation avec un solénoïde à une bobine double dans le schéma de Helmholtz. On a déterminé l'erreur totale de mesure ainsi que la sphère d'applicabilité du schéma. Quand le courant de la bobine de compensation est mesuré par le compensateur, l'erreur du mesure ne dépasse pas 1‰ dans l'espace de 2 à 8000 A/m.

L. REFEROWSKI

DIE OPTIMALISIERUNG DER SCHALTUNG FÜR DIE MESSUNG KLEINER MAGNETISCHER FELDER NACH DER KOMPENSATIONSMETHODE MIT DER SOLENOIDISCHEN SPULE

Zusammenfassung

Es werden in dieser Arbeit die Bedingungen für regelmässige Messungen kleiner magnetischer Felder nach der Kompensationsmethode mit einer solenoidischen Spule dargestellt. Die Auswahlregel für die beste Galvanometerempfindlichkeit in üblichen Schaltung und mit einem Ausschalter im Spulengeberkreise ist vorgeführt worden. Für die solenoidische Kompensationsspule wurde das optimale Verhältnis ihrer Länge zum Durchmesser bestimmt. Dabei wurde angenommen, dass die Heterogenität des magnetischen Feldes im Spulenquerschnitt einen Wert von 1‰ nicht überschreitet. Die Spulengeberdimensionen für das bestimmte Verhältnis 4,5 sind so gewählt, dass bei der Prüf- und Kompensationsfeldgleichheit der mit der Spule gekoppelte magnetische Fluss gleich Null ist. Es wurde auch der Einfluss der Kompensations-spulenwicklung auf den Wert des magnetischen Feldes im Raume des Spulengebers besprochen. Die Störeffekte des Abgeglichenen Zustandes, die bei der Zeitkonstantendifferenz der Kompensations- und Prüfspule entstehen, wurden untersucht. Es ist doch eine Elimination dieser Störungen möglich. Die Vergleichung der Kompensationsspule in solenoidischen und Helmholtzscher Anordnung ist vorgeführt worden. Der Gesamtfehler und der Messbereich dieser Methode wurde dargestellt. Wird der Strom der Kompensationsspule mit einem Kompensator gemessen, so überschreitet nicht der Messfehler den Wert von 1 ‰ im Messbereich von 2 bis 8.000 A/m.

Л. РЕФЭРОВСКИ

ОПТИМИЗАЦИЯ СХЕМЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ СЛАБЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ КОМПЕНСАЦИОННЫМ МЕТОДОМ С СОЛЕНОИДНОЙ КАТУШКОЙ

Резюме

В работе рассматриваются условия правильного измерения слабых магнитных полей компенсационным методом с соленоидной катушкой. Определены критерии выбора гальванометра, гарантирующие максимальную чувствительность измерения в обыкновенной схеме и в схеме с выключателем в цепи катушки датчика. Была определена оптимальная величина отношения длины соленоидной компенсирующей катушки к диаметру принимая, что неоднородность поля в области, где находится катушка датчика, не больше чем 1‰. Для определенного отношения 4,5 размеры катушки датчика такими, чтобы при равенстве исследуемого и компенсирующего полей поток связанный с катушкой, был равен нулю. Рассматривается тоже влияние толщины обмотки соленоидной компенсирующей катушки на величину напряженности поля в области катушки датчика. Описаны возмущения, возникающие при определении состояния равновесия и вызываемые разными постоянными времени компенсирующей катушки и системы катушек, создающих исследуемое магнитное поле. Приводится способ исключения этих возмущений. Проведено сравнение компенсирующей катушки с катушкой в схеме Гельмгольца. Определена полная погрешность измерения и пределы применимости схемы. При измерении тока компенсирующей катушки компенсатором погрешность измерения не превосходит 1‰ в диапазоне от 2 до 8000 а/м.

621.372.542.21

Synteza łańcuchowych filtrów elektromechanicznych za pomocą układów zastępczych o stałych rozłożonych

FRANCISZEK KAMIŃSKI (WARSZAWA)
 Instytut Technologii Elektronowej PAN

Otrzymano 27.4.1968

Przedstawiono metodę syntezy łańcuchowych filtrów elektromechanicznych o charakterystyce równofalistej i maksymalnie płaskiej za pomocą układów zastępczych o stałych rozłożonych, dla których jest znane ścisłe rozwiązanie problemu syntezy. Podano uzasadnienie postaci macierzy transmisyjnej zastępczego toru niejednorodnego, reprezentującego właściwości filtru elektromechanicznego w roboczym pasmie częstotliwości. Rozpatrzono układy filtrów ze sprzęgaczami różnego rodzaju, jak sprzęgacze proste, złożone oraz kombinowane. Opracowano zasady postępowania przy syntezie filtrów elektromechanicznych ze szczególnym uwzględnieniem bezpośredniej metody obliczeń, opartej na związkach analitycznych. Rezultaty pracy są przydatne przy syntezie filtrów o różnym przeznaczeniu, a szczególnie filtrów wąskopasmowych.

1. POSTAWIENIE PROBLEMU

Stosowane metody syntezy łańcuchowych filtrów elektromechanicznych o zadanych charakterystykach roboczych oparte są na układach zastępczych, złożonych z elementów skupionych (zob. np. [7], [17], [18], [19], [20]). Dodatnią stroną takiego ujęcia jest to, że korzysta się z bogatego dorobku teorii liniowych układów biernych o stałych skupionych [1], [2]. Jednocześnie jednak należy liczyć się z występowaniem efektów niepożądanych w postaci niezgodności wyników doświadczalnych z parametrami założonymi w trakcie obliczeń.

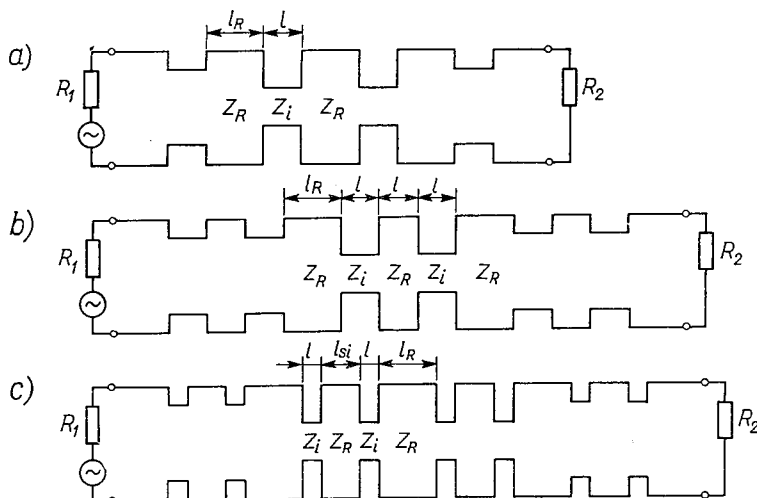
W niniejszej pracy przedstawiono zarys syntezy łańcuchowych filtrów elektromechanicznych o charakterystykach tłumieniowych zbliżonych do krzywej Czebyszewa i Butterwortha za pomocą układów zastępczych o stałych rozłożonych, zgodnie z ideą podaną po raz pierwszy w [14]. Typowe struktury rozpatrywanych mechanicznych linii filtrujących są naszkicowane na rys. 1 [7], [17], [18]. Jak widać, linia filtrująca składa się z rezonatorów oraz prostych lub złożonych sprzęgaczy. Ponieważ dobroć mechaniczna materiału, z którego wykonuje się linię, jest rzędu 1000 i więcej, zatem tego rodzaju układ filtrujący można rozpatrywać jako tor niejednorodny złożony z odcinków jednorodnych bez strat [8], [9], a na tej podstawie właściwości transmisyjne układu można badać przy użyciu unormowanej macierzy transmisyjnej toru o postaci [4], [5], [8], [9], [12]:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \mathbf{J}(\theta_1) \mathbf{M}_2 \dots \mathbf{M}_i \mathbf{J}(\theta_i) \mathbf{M}_{i+1} \dots \mathbf{M}_n \mathbf{J}(\theta_n) \mathbf{M}_{n+1}, \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} v_i & \operatorname{sh} v_i \\ \operatorname{sh} v_i & \operatorname{ch} v_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}(j\theta_i) = \begin{bmatrix} e^{j\theta_i} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_i} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$v_i = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{m_i}, \quad m_1 = \frac{R_1}{Z_1}, \quad m_i = \frac{Z_{i-1}}{Z_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad m_{n+1} = \frac{Z_n}{R_2}, \quad (3)$$

gdzie: $\theta_i = 2\pi \frac{l_i}{\lambda}$ — przesuwność falowa odcinka linii jednorodnej, l_i — długość i -tego odcinka jednorodnego, λ — długość fali w torze, n — liczba odcinków jednorodnych w torze, m_i — współczynnik skoku oporu falowego na styku odcinków z numerem $i-1$ oraz i , Z_i — opór falowy i -tego odcinka jednorodnego, R_1, R_2 — opory obciążenia toru.



Rys. 1. Typowe struktury mechanicznych linii filtrujących a) Linia ze sprzągaczami prostymi, b) Linia ze sprzągaczami złożonymi, c) Linia ze sprzągaczami kombinowanymi

Element t_{11} jest określany mianem funkcji transmisji, a element t_{21} — funkcji filtracji toru [4], [5], [8], [9].

Na podstawie analizy typowych struktur łańcuchowych linii filtrujących (rys. 1) dochodzi się do wniosku, że charakteryzująca je macierz transmisyjna $\mathbf{T}$ daje się zapisać następująco:

Liczba rezonatorów nieparzysta

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}_1(j\theta) \mathbf{J}(jq_1\theta) \mathbf{P}_2(j\theta) \mathbf{J}(jq_2\theta) \mathbf{P}_3(j\theta) \dots \mathbf{P}_k(j\theta) \mathbf{J}(jq_k\theta) \mathbf{P}_k(j\theta) \dots \mathbf{P}_3(j\theta) \mathbf{J}(jq_2\theta) \mathbf{P}_2(j\theta) \mathbf{J}(jq_1\theta) \mathbf{P}_1(j\theta). \quad (4)$$

Liczba rezonatorów parzysta

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}_1(j\theta) \mathbf{J}(jq_1\theta) \mathbf{P}_2(j\theta) \mathbf{J}(jq_2\theta) \mathbf{P}_3(j\theta) \dots \mathbf{J}(jq_{k-1}\theta) \mathbf{P}_k(j\theta) \mathbf{J}(jq_{k-1}\theta) \dots \mathbf{P}_3(j\theta) \mathbf{J}(jq_2\theta) \mathbf{P}_2(j\theta) \mathbf{J}(jq_1\theta) \mathbf{P}_1(j\theta). \quad (5)$$

Macierz $\mathbf{P}_i(j\theta)$ występująca we wzorach (4), (5) jest macierzą transmisyjną i -tego układu sprzęgającego w filtrze; w przypadku ogólnym jej postać jest następująca:

$$\mathbf{P}_i(j\theta) = \mathbf{M}_i \mathbf{J}(j\theta) \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{J}(jr_i\theta) \mathbf{M}_i \mathbf{J}(j\theta) \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{J}(jr_i\theta) \dots \mathbf{J}(jr_i\theta) \mathbf{M}_i \mathbf{J}(j\theta) \mathbf{M}_i^{-1}, \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, k; \quad \theta = 2\pi \frac{l}{\lambda}.$$

Sens poszczególnych oznaczeń we wzorach (4)÷(6):

$\mathbf{J}(jq_v\theta)$ — macierz transmisyjna rezonatora w warunkach dopasowania falowego; $q_v = l_{Rv}/l$, l_{Rv} — długość rezonatora z numerem v ; l — długość odcinka odniesienia (lub też najkrótszego odcinka linii jednorodnej w sprzęgaczu); $r_i = l_{si}/l$, l_{si} — długość odcinka jednorodnego występującego między dwoma odcinkami o długości l w sprzęgaczu kombinowanym; $v = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ (lub $\frac{n}{2}$), n — liczba rezonatorów; $k = \frac{n+1}{2}$ dla n — liczby nieparzystej, $k = \frac{n}{2} + 1$ dla n — liczby parzystej.

W związku ze wzorem (6) należy zaznaczyć, że najczęściej w praktyce macierz $\mathbf{P}_1(j\theta)$ redukuje się do pojedynczej macierzy typu $\mathbf{M}$.

Opis właściwości transmisyjnych łańcuchowych filtrów elektromechanicznych za pomocą macierzy $\mathbf{T}$ według wzorów (4)÷(6) jest dostatecznie ścisły. Dlatego zrozumiałe jest dążenie do opracowania takich metod syntezy omawianej klasy czwórników, które uwzględniają istotę przytoczonych związków. Dla przykładu można wymienić wyniki uzyskane w pracach [10], [22], które są poświęcone zastosowaniu macierzy transmisyjnej do syntezy pewnej grupy filtrów elektromechanicznych, a mianowicie tzw. łańcuchowych struktur regularnych. W podobnym kierunku zmierza tematyka pracy [14], w której przedstawiono ideę syntezy najczęściej stosowanych wąskopasmowych linii filtrujących za pomocą układów zastępczych o stałych rozłożonych. Uzyskane wyniki znalazły potwierdzenie w praktyce doświadczalnej. Dlatego zrozumiała jest chęć rozszerzenia zakresu przydatności nowo opracowanej metody syntezy i nadanie jej charakteru bardziej uniwersalnego. Właśnie tej problematyce poświęcona jest niniejsza praca.

Rozważany problem jest następujący: W oparciu o teorię torów niejednorodnych złożonych z bezstratnych odcinków jednorodnych zrealizować syntezę łańcuchowego filtru elektromechanicznego o zadanej strukturze według rys. 1, tak aby jego charakterystyka tłumieniowa była zbliżona do krzywej Czebyszewa lub Butterwortha.

Synteza omawianej klasy torów niejednorodnych jest zagadnieniem znanym [5], [8], [11], [15]. Na podstawie zadanej funkcji strat $L(s)$, $s = \sigma + j\theta$,

$$L(s) \stackrel{\text{df}}{=} t_{11}(s)t_{22}(s) = 1 + t_{12}(s)t_{21}(s), \quad (7)$$

spełniającej warunki fizycznej realizacji [8], [15], wyznacza się elementy macierzy transmisyjnej $\mathbf{T}(s)$. Następnie zgodnie z wytycznymi prac [5], [8], [11], [12], oblicza się wartości poszukiwanych parametrów toru niejednorodnego, przy czym warto zaznaczyć, że obliczenia mają charakter ścisły, nie związany ze stosowaniem układów zastępczych o stałych skupionych.

Funkcja strat toru filtrującego o charakterystyce Czebyszewa, w postaci dogodnej dla potrzeb niniejszej pracy, wyraża się następującym wzorem [4], [5], [21]:

$$L(s) = 1 + \left[h P_n \left(\frac{shs}{jS} \right) \right]^2, \quad (8)$$

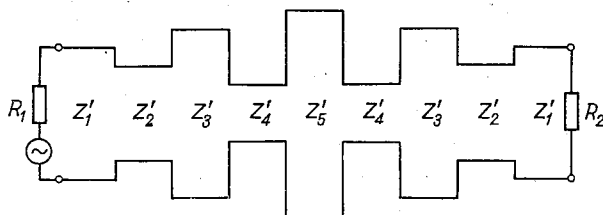
gdzie $P_n \left(\frac{shs}{jS} \right)$ — wielomian Czebyszewa I rodzaju n -tego stopnia względem zmiennej $x = \frac{shs}{jS}$, h — maksymalnie dopuszczalna wartość modułu funkcji filtracji w pasmie przepustowym użytkowym, S — współczynnik skali.

W przypadku syntezy torów o charakterystyce Butterwortha przyjmuje się funkcję strat o postaci

$$L(s) = 1 + \left[\frac{h}{(jS)^n} \right]^2 sh^{2n}s. \quad (9)$$

Problematyka syntezy torów filtrujących o funkcji strat według (8), (9) jest dostatecznie głęboko opracowana (zob. np. [4], [5], [8], [11], [12], [15], [16], [21]). Opublikowane wzory analityczne, katalogi oraz specjalne reguły postępowania w trakcie syntezy umożliwiają szybkie i ściśle wyznaczenie parametrów toru. Dlatego przystosowanie wymienionych rezultatów do syntezy łańcuchowych filtrów elektromechanicznych powinno przynieść w efekcie poważne korzyści rachunkowe i realizacyjne.

Struktura torów filtrujących według (8), (9) jest podana na rys. 2 [4], [5], [21], a zatem — jak wynika z porównania z rys. 1 — jest odmienna od typowej struktury filtru elek-



Rys. 2. Przykład struktury toru niejednorodnego realizującego charakterystykę Czebyszewa lub Butterwortha

tromechanicznego. Z tego powodu nie można realizować syntezy filtru bezpośrednio w oparciu o zależności (8) lub (9). Niezbędne są pewne przekształcenia we wzorach (4) — (6), które mają doprowadzić do tego, aby wynikowa postać macierzy transmisyjnej filtru była identyczna z macierzą T toru niejednorodnego o strukturze według rys. 2. W ten sposób staje się jasna myśl przewodnia proponowanej metody syntezy:

Poszukuje się wyrażenia wyznaczającego macierz transmisyjną sprzęgacza przy częstotliwości $f \cong f_o$ (f_o — częstotliwość środkowa pasma przepustowego filtru) i następnie w oparciu o założenie wąskopasmowości filtru wyznacza się macierz zastępczą sprzęgacza oraz całej linii filtrującej. Przekształcenia macierzy są tak realizowane, aby uwypuklić związek między parametrami projektowanej linii filtrującej a parametrami torów niejednorodnych o charakterystyce Czebyszewa [wzór (8)] i Butterwortha [wzór (9)].

Rozważania są ujęte w następujące ramy:

1. Wyznaczenie zastępczej macierzy transmisyjnej mechanicznej linii filtrującej ze sprzęgaczami prostymi.
2. Wyznaczenie zastępczej macierzy transmisyjnej mechanicznej linii filtrującej ze sprzęgaczami złożonymi i kombinowanymi.
3. Schemat syntezy toru filtrującego o charakterystyce tłumieniowej Czebyszewa i Butterwortha.
4. Synteza mechanicznej linii filtrującej za pomocą zastępczego toru niejednorodnego.

2. WYZNACZENIE ZASTĘPCZEJ MACIERZY TRANSMISYJNEJ MECHANICZNEJ LINII FILTRUJĄCEJ ZE SPRZĘGACZAMI PROSTYMI

W niniejszym rozdziale przedstawiono zasady wyznaczania zastępczej macierzy transmisyjnej mechanicznej linii filtrującej z prostymi sprzęgaczami o jednakowej długości. Sposób wykorzystania uzyskanych wyników w procesie syntezy filtrów elektromechanicznych zostanie omówiony w rozdziałach następnych.

Zgodnie ze wzorem (6) macierz transmisyjna sprzęgacza prostego z numerem i daje się zapisać następująco:

$$\mathbf{P}_i(j\theta) = \mathbf{M}_i \mathbf{J}(j\theta) \mathbf{M}_i^{-1}. \quad (10)$$

Po przemnożeniu poszczególnych macierzy-mnożników i dokonaniu nieskomplikowanych przekształceń macierz $\mathbf{P}_i(j\theta)$ przyjmie postać:

$$\mathbf{P}_i(j\theta) = j\mathbf{J}\left(j\frac{\beta_i}{2}\right)\mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta, \theta'_0)\mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta'_0)\bar{\mathbf{E}}\mathbf{J}\left(j\frac{\beta_i}{2}\right), \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta, \theta'_0) = \mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta)\mathbf{M}_i^{-1}(2\nu_i, \theta'_0); \quad \bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta) = \begin{bmatrix} \sqrt{1 + \sin^2 \theta \operatorname{sh}^2 2\nu_i} & \sin \theta \operatorname{sh} 2\nu_i \\ \sin \theta \operatorname{sh} 2\nu_i & \sqrt{1 + \sin^2 \theta \operatorname{sh}^2 2\nu_i} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\beta_i = -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ch} 2\nu_i}. \quad (14)$$

Przez θ'_0 oznaczono przesuwność falową odcinka sprzęgającego dla częstotliwości f'_0 , równej częstotliwości środkowej pasma przepustowego użytkowego filtru f_0 , względnie częstotliwości, przy której przesuwność falowa sprzęgacza wynosi $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ lub jakąś inną ustaloną wartość uwarunkowaną przez długość sprzęgacza (np. dla sprzęgacza ćwierćfalowego $\theta'_0 = \frac{\pi}{2}$); należy zaznaczyć, że w każdym z tych przypadków $f'_0 \cong f_0$, $\theta'_0 \cong \theta_0$.

Elementy macierzy $\mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta, \theta'_o)$ według (12) wynoszą:

$$\begin{aligned} [M_{11}(2\nu_i, \theta, \theta'_o)]_i &= [M_{22}(2\nu_i, \theta, \theta'_o)]_i = \\ &= \sqrt{(1 + \sin^2 \theta \operatorname{sh}^2 2\nu_i)(1 + \sin^2 \theta'_o \operatorname{sh}^2 2\nu_i)} - \sin \theta \sin \theta'_o \operatorname{sh}^2 2\nu_i, \\ [M_{12}(2\nu_i, \theta, \theta'_o)]_i &= [M_{21}(2\nu_i, \theta, \theta'_o)]_i = \\ &= \operatorname{sh} 2\nu_i (\sin \theta \sqrt{1 + \sin^2 \theta'_o \operatorname{sh}^2 2\nu_i} - \sin \theta'_o \sqrt{1 + \sin^2 \theta \operatorname{sh}^2 2\nu_i}), \end{aligned} \quad (15)$$

przy czym $\det \mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta, \theta'_o) = 1$.

W zakresie wartości θ i ν_i , dla których spełnione są nierówności

$$\sin^2 \theta \operatorname{sh}^2 2\nu_i \gg 1, \quad \sin^2 \theta'_o \operatorname{sh}^2 2\nu_i \gg 1, \quad (16)$$

ślusne są następujące wzory, wyznaczające przybliżoną wartość elementów macierzy $\mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta, \theta'_o)$:

$$\begin{aligned} [M_{11}(2\nu_i, \theta, \theta'_o)]_i &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \theta}{\sin \theta'_o} + \frac{\sin \theta'_o}{\sin \theta} \right] = \operatorname{ch} \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta'_o}, \\ [M_{21}(2\nu_i, \theta, \theta'_o)]_i &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \theta}{\sin \theta'_o} - \frac{\sin \theta'_o}{\sin \theta} \right] = \operatorname{sh} \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta'_o}. \end{aligned} \quad (17)$$

Z przytoczonych związków wynika, że elementy macierzy $\mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta, \theta'_o)$ — przy spełnieniu nierówności (16) — zależą wyłącznie od parametrów θ i θ'_o i stanowią swoistą miarę różnicy między zmiennym parametrem θ a ustaloną wartością θ'_o . W dalszych rozważaniach przyjmuje się oznaczanie macierzy z elementami $M_{11} = M_{22}$, $M_{12} = M_{21}$ według zależności (17) symbolem $\mathbf{M}(\theta, \theta'_o)$:

$$\mathbf{M}(\theta, \theta'_o) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta'_o} & \operatorname{sh} \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta'_o} \\ \operatorname{sh} \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta'_o} & \operatorname{ch} \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta'_o} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Parametr β_i , określony przez zależność (14), daje się zapisać jako suma dwu składowych:

$$\beta_i = \beta_i^0 + \Delta\beta_i. \quad (19)$$

Składowa β_i^0 odpowiada wartości parametru β_i dla częstotliwości f'_o , a składowa $\Delta\beta_i$ reprezentuje zmianę tego parametru w funkcji θ .

Uwzględniając wyniki (18), (19) oraz równość $\bar{\mathbf{E}}\mathbf{J} = \mathbf{J}\bar{\mathbf{E}}$ w (11), uzyskuje się poszukiwaną postać zastępczej macierzy transmisyjnej prostego sprzęgacza:

$$\mathbf{P}(j\theta) = j\mathbf{J} \left[j \frac{1}{2} (\beta_i^0 + \Delta\beta_i) \right] \mathbf{M}(\theta, \theta'_o) \mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta'_o) \bar{\mathbf{E}}\mathbf{J} \left[j \frac{1}{2} (\beta_i^0 + \Delta\beta_i) \right]. \quad (20)$$

Jeżeli do wyrażenia (20) wprowadzić uproszczenia wynikające z założenia o wąskopasmowości filtra, to w roboczym pasmie częstotliwości ślusne będą w pierwszym przybliżeniu następujące równości:

$$\Delta\beta_i \cong 0, \quad \mathbf{M}(\theta, \theta'_o) \cong \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Zatem zastępcza macierz transmisyjna sprzęgacza prostego w filtrze wąskopasmowym daje się wyrazić jako

$$\mathbf{P}(j\theta)|_{\theta \cong \theta'_0} = \mathbf{P}(j\theta'_0) = j\mathbf{J}\left(j\frac{\beta_i^0}{2}\right)\mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta'_0)\bar{\mathbf{E}}\mathbf{J}\left(j\frac{\beta_i^0}{2}\right). \quad (22)$$

Uzyskane wyniki (20) i (22) są podstawowe dla proponowanej metody syntezy łańcuchowej linii mechanicznej z prostymi sprzęgaczami o jednakowej długości. Po uwzględnieniu tych wyników we wzorach (4), (5) i wprowadzeniu przekształceń wynikających z równości

$$\bar{\mathbf{E}}\mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta)\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{M}_i(-2\nu_i, \theta) = \mathbf{M}_i^{-1}(2\nu_i, \theta)$$

uzyskuje się macierze transmisyjne łańcuchowych filtrów elektromechanicznych w postaci dogodnej do dalszych rozważań:

Liczba rezonatorów nieparzysta

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & j^{2k}\mathbf{J}\left(j\frac{\beta_1}{2}\right)\mathbf{M}'_1\mathbf{J}\left[jq_1\theta + j\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)\right]\mathbf{M}'_2\mathbf{J}\left[jq_2\theta + j\frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3)\right] \dots \\ & \dots \mathbf{M}'_k\mathbf{J}(jq_k\theta + j\beta_k)\mathbf{M}'_{k-1} \dots \mathbf{M}'_2\mathbf{J}\left[jq_1\theta + j\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)\right]\mathbf{M}'_1\mathbf{J}\left(j\frac{\beta_1}{2}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Liczba rezonatorów parzysta

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & j^{2k-1}\mathbf{J}\left(j\frac{\beta_1}{2}\right)\mathbf{M}'_1\mathbf{J}\left[jq_1\theta + j\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)\right]\mathbf{M}'_2\mathbf{J}\left[jq_2\theta + j\frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3)\right] \dots \\ & \dots \mathbf{M}'_{k-1}\mathbf{J}\left[jq_{k-1}\theta + j\frac{1}{2}(\beta_{k-1} + \beta_k)\right]\mathbf{M}'_k\mathbf{J}\left[jq_{k-1}\theta + j\frac{1}{2}(\beta_{k-1} + \beta_k)\right]\mathbf{M}'_{k-1} \dots \\ & \dots \mathbf{M}'_2\mathbf{J}\left[jq_1\theta + j\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)\right]\mathbf{M}'_1\mathbf{J}\left(j\frac{\beta_1}{2}\right)\bar{\mathbf{E}}, \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie

$$\mathbf{M}'_i = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \nu'_i & \operatorname{sh} \nu'_i \\ \operatorname{sh} \nu'_i & \operatorname{ch} \nu'_i \end{bmatrix} = \mathbf{M}_i^{(-1)^{i+1}}(2\nu_i, \theta); \quad \nu'_i = \{\operatorname{Arsh}[M_{21}(2\nu_i, \theta)]_i\}(-1)^{i+1}, \quad (25)$$

zaś $[M_{21}(2\nu_i, \theta)]_i$ jest elementem macierzy $\mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta)$ według (13).

Podane wzory można interpretować rozmaicie, w zależności od rozważanego problemu. W przypadku ogólnym, kiedy obowiązują wzory (14) i (25), macierz $\mathbf{T}$ według (23), (24) jest jedynie odmiennym zapisem zależności (4), (5). Jeżeli jednak wiadomo, iż w rozpatrywanym paśmie częstotliwości spełnione są warunki (16), to wtedy zgodnie z (12), (18) można przyjąć:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_i = & [\mathbf{M}(\theta, \theta'_0)\mathbf{M}_i(2\nu_i, \theta'_0)]^{(-1)^{i+1}}, \\ \nu'_i = & \left[\ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta'_0} + \operatorname{Arsh}(\sin \theta'_0 \operatorname{sh} 2\nu_i) \right] (-1)^{i+1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Z tego wynika, że parametr ν'_i daje się wyrazić jako suma dwu składowych: stałej (ν'_i), i zmiennej $\Delta \nu'_i$. Składowa stała jest znacznie większa od składowej zmiennej (co do wartości

bezwzględnej) i przez to jej dobór odgrywa istotne znaczenie dla kształtowania właściwości filtru w badanym pasmie częstotliwości. Składowa zmienna zależy wyłącznie od częstotliwości, a ponieważ zgodnie z ustalonym doбором θ'_0 zachodzi $\sin\theta/\sin\theta'_0 \cong 1$, więc $\Delta\nu'_i \cong 0$. Stąd widać, że składowa $\Delta\nu'_i$ wprowadza jedynie nieznaczną deformację charakterystyki w pasmie przepustowym filtru.

Po uwzględnieniu zależności (26) w (23), (24) otrzymuje się w wyniku zastępczą macierz transmisyjną dla macierzy $\mathbf{T}$ według (4), (5), opisującą z dobrym przybliżeniem właściwości filtru w roboczym pasmie częstotliwości. Jednocześnie należy zauważyć, że jej postać jest podobna do postaci związanej ze strukturą toru według rys. 2, która daje się zapisać jako

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}_1 \mathbf{J}(s) \mathbf{M}_2 \mathbf{J}(s) \mathbf{M}_3 \dots \mathbf{M}_n \mathbf{J}(s) \mathbf{M}_{n+1}, \quad \mathbf{M}_i \neq \mathbf{E}, \quad (27)$$

przy czym elementy macierzy $\mathbf{M}_i$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, są niezależne od częstotliwości.

W przypadku filtrów wąskopasmowych słuszne będzie przybliżenie (21), a zatem:

$$\mathbf{M}'_i = \mathbf{M}_i^{(-1)^{i+1}}(2\nu_i, \theta'_0), \quad \nu'_i = (\nu'_i)_0 = [\text{Arsh}(\sin\theta'_0 \text{sh} 2\nu_i)](-1)^{i+1}, \quad (28)$$

$$\beta_i = \beta'_i.$$

Jeżeli wzory (23), (24) rozpatrywać łącznie z (28), to otrzyma się macierz $\mathbf{T} = j^{2k} \mathbf{J}\left(j\frac{\beta_1^0}{2}\right) \times \times \mathbf{T}_z \mathbf{J}\left(j\frac{\beta_1^0}{2}\right)$ lub $\mathbf{T} = j^{2k-1} \mathbf{J}\left(j\frac{\beta_1^0}{2}\right) \mathbf{T}_z \mathbf{J}\left(j\frac{\beta_1^0}{2}\right) \bar{\mathbf{E}}$, gdzie $\mathbf{T}_z$ — macierz transmisyjna toru niejednorodnego o strukturze według rys. 2, który można traktować jako układ zastępczy projektowanej mechanicznej linii filtrującej w roboczym pasmie częstotliwości.

Wzory (23), (24) zostały podane przy założeniu, że linia filtrująca jest zakończona na wejściu i wyjściu układem sprzęgającym. Jeżeli jednak założenie to nie jest spełnione i elementami końcowymi linii są rezonatory, to należy: a) zmienić wykładnik potęgowy z liczby $2k$ na $2(k-1)$ we wzorze (23), względnie z $2k-1$ na $2k-3$ we wzorze (24); b) pominąć w podanych wzorach macierze-mnożniki $\mathbf{J}(j\beta_1/2)$; c) parametry macierzy $\mathbf{M}'_i$ wyznaczać z równości $\mathbf{M}'_i = \mathbf{M}_i$ (macierz $\mathbf{M}_i$ określa dopasowanie oporu obciążenia do oporu falowego końcowego rezonatora).

Jak już na wstępie wspomniano, wszystkie powyższe rozważania dotyczyły mechanicznej linii filtrującej z prostymi sprzęgaczami o jednakowej długości. Oczywiście zagadnienie można sformułować inaczej przyjmując, że wszystkie rezonatory są tej samej długości, natomiast długość poszczególnych sprzęgaczy wynika z wymagań syntezy. W tych warunkach:

$$\mathbf{P}_i(j\theta_i) = j\mathbf{J}\left(j\frac{\beta_i}{2}\right) \mathbf{M}_i(2\nu_i, p_i \theta_R) \bar{\mathbf{E}} \mathbf{J}\left(j\frac{\beta_i}{2}\right), \quad (29)$$

$$\beta_i = -\text{arctg} \frac{\text{ctg} p_i \theta_R}{\text{ch} 2\nu_i}, \quad p_i = \frac{l_{si}}{l_R}, \quad \theta_R = 2\pi \frac{l_R}{\lambda}.$$

Po uwzględnieniu (29) w (4), (5) uzyskuje się macierz $\mathbf{T}$ o postaci podobnej do (23), (24), z tym jednak, iż

$$\mathbf{M}'_i = \mathbf{M}_i^{(-1)^{i+1}}(2\nu_i, p_i \theta_R), \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}\left[j\theta_R + j\frac{1}{2}(\beta_i + \beta_{i+1})\right]. \quad (30)$$

Można zatem wnioskować, że obranie zastępczej macierzy transmisyjnej nie określa jednoznacznie sposobu realizacji linii filtrującej; pewne szczegóły pozostają do decyzji projektanta.

Na zakończenie niniejszego rozdziału należy zwrócić uwagę na fakt, iż w trakcie wyrowadzania powyższych zależności nie poczyniono żadnych założeń odnośnie do wzajemnego stosunku długości rezonatorów i sprzęgaczy. Oznacza to, że uzyskane zależności mogą służyć do wyznaczania parametrów filtru elektromechanicznego ze sprzęgaczami prostymi o różnej długości, np. $\lambda_o/8$, $\lambda_o/4$ lub też o jakiejś innej ustalonej wartości, zaś rezonatory mogą być np. półfalowe. Jak wiadomo [17], dobór długości sprzęgacza wpływa na kształt charakterystyki tłumieniowej filtru, m.in. na jej symetrię oraz na stromość poszczególnych jej zboczy.

3. WYZNACZENIE ZASTĘPCZEJ MACIERZY TRANSMISYJNEJ MECHANICZNEJ LINII FILTRUJĄCEJ ZE SPRZĘGACZAMI ZŁOŻONYMI I KOMBINOWANYMI

Rozważania niniejszego rozdziału zmierzają do wyznaczenia zastępczej macierzy transmisyjnej mechanicznej linii filtrującej ze sprzęgaczami złożonymi i kombinowanymi. Jak wiadomo [17], stosowanie bardziej złożonych układów sprzęgających służy do realizacji filtrów superwąskopasmowych, w których wymagane wartości skoków oporu falowego nie mogą być uzyskane ze względów technologicznych przy użyciu sprzęgaczy prostych. O tym warunku superwąskopasmowości należy pamiętać przy ocenie przydatności przedłożonej metody syntezy.

3.1. Analiza przypadku linii filtrującej ze sprzęgaczami złożonymi

Zgodnie z wyrażeniem (6) macierz transmisyjna sprzęgacza złożonego, wykonanego z p ($p = 1, 3, 5, \dots$) elementów sprzęgających o jednakowej długości, ma postać:

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} p_{11} & -p_{21} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_i \mathbf{J}(j\theta) \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{J}(j\theta) \mathbf{M}_i \dots \mathbf{M}_i \mathbf{J}(j\theta) \mathbf{M}_i^{-1}, \quad (31)$$

gdzie iloczyn $\mathbf{P}_i$ obejmuje p macierzy-mnożników $\mathbf{J}(j\theta)$ oraz $p+1$ macierzy-mnożników typu $\mathbf{M}$. Jeżeli przyjąć oznaczenie

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{M}_i \begin{pmatrix} v_i \\ 2 \end{pmatrix} \mathbf{J}(j\theta) \mathbf{M}_i^{-1} \begin{pmatrix} v_i \\ 2 \end{pmatrix} = j \begin{bmatrix} \sin \theta \operatorname{ch} v_i - j \cos \theta & \sin \theta \operatorname{sh} v_i \\ \sin \theta \operatorname{sh} v_i & \sin \theta \operatorname{ch} v_i + j \cos \theta \end{bmatrix} \bar{\mathbf{E}},$$

to wzór (31) przyjmie postać:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{M}_i \begin{pmatrix} v_i \\ 2 \end{pmatrix} \mathbf{T}_i (\mathbf{T}_i)_t \mathbf{T}_i (\mathbf{T}_i)_t \dots \mathbf{T}_i \mathbf{M}_i^{-1} \begin{pmatrix} v_i \\ 2 \end{pmatrix} = j^p \mathbf{M}_i \begin{pmatrix} v_i \\ 2 \end{pmatrix} (-j \mathbf{T}_i \bar{\mathbf{E}})^p \mathbf{M}_i \begin{pmatrix} v_i \\ 2 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{E}}, \quad (32)$$

gdzie macierz $(\mathbf{T}_i)_t$ jest macierzą transponowaną względem macierzy $\mathbf{T}_i$.

Elementy macierzy $(-j\mathbf{T}_i\bar{\mathbf{E}})^p$ mogą być wyznaczone ze związków ogólnych wyprowadzonych w [5] (zob. także [4], [10]); w wyniku uzyskuje się:

$$(-j\mathbf{T}_i\bar{\mathbf{E}})^p = \begin{bmatrix} P_p(\varphi_i) - j\cos\theta U_{p-1}(\varphi_i) & \sin\theta \operatorname{sh}\nu_i U_{p-1}(\varphi_i) \\ \sin\theta \operatorname{sh}\nu_i U_{p-1}(\varphi_i) & P(\varphi_i) + j\cos\theta U_{p-1}(\varphi_i) \end{bmatrix},$$

$$\varphi_i = \sin\theta \operatorname{ch}\nu_i, \quad P_p(\varphi_i) = \operatorname{ch}(p \operatorname{Arch}\varphi_i), \quad U_{p-1}(\varphi_i) = \frac{\operatorname{sh}(p \operatorname{Arch}\varphi_i)}{\operatorname{sh}\operatorname{Arch}\varphi_i}.$$

Ostatecznie po podstawieniu tej zależności do (32) dochodzi się do wniosku, że elementy macierzy $\mathbf{P}_i$ dają się wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} (p_{11})_i &= j^p [\operatorname{ch}\nu_i P_p(\varphi_i) + \sin\theta \operatorname{sh}^2\nu_i U_{p-1}(\varphi_i) - j\cos\theta U_{p-1}(\varphi_i)], \\ (p_{21})_i &= j^p \operatorname{sh}\nu_i [\sin\theta \operatorname{ch}\nu_i U_{p-1}(\varphi_i) + P_p(\varphi_i)]. \end{aligned} \quad (33)$$

Jeżeli z kolei określić macierz $\mathbf{M}_i(\theta, p)$ jako

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i(\theta, p) &= \begin{bmatrix} [M_{11}(\theta, p)]_i & [M_{21}(\theta, p)]_i \\ [M_{21}(\theta, p)]_i & [M_{11}(\theta, p)]_i \end{bmatrix}, \\ [M_{21}(\theta, p)]_i &= (-j)^p (p_{21})_i = \operatorname{sh}\nu_i [\sin\theta \operatorname{ch}\nu_i U_{p-1}(\varphi_i) + P_p(\varphi_i)], \\ [M_{11}(\theta, p)]_i &= |p_{11}|_i = \sqrt{1 + [M_{21}^2(\theta, p)]_i}, \end{aligned} \quad (34)$$

i wprowadzić ją do wzorów (31), (32), to w wyniku otrzyma się poszukiwaną, dogodną dla dalszych rozważań postać macierzy transmisyjnej sprzęgacza złożonego:

$$\mathbf{P}_i = j^p \mathbf{J} \left(j \frac{\beta_i}{2} \right) \mathbf{M}_i(\varphi_i, \varphi_i^0) \mathbf{M}_i(\theta_o, p) \bar{\mathbf{E}} \mathbf{J} \left(j \frac{\beta_i}{2} \right), \quad (35)$$

$$\mathbf{M}_i(\varphi_i, \varphi_i^0) = \mathbf{M}_i(\theta, p) \mathbf{M}_i^{-1}(\theta_o, p) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\nu_i(\varphi_i, \varphi_i^0) & \operatorname{sh}\nu_i(\varphi_i, \varphi_i^0) \\ \operatorname{sh}\nu_i(\varphi_i, \varphi_i^0) & \operatorname{ch}\nu_i(\varphi_i, \varphi_i^0) \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\nu_i(\varphi_i, \varphi_i^0) = \operatorname{Arsh}[M_{21}(\theta, p) M_{11}(\theta_o, p) - M_{21}(\theta_o, p) M_{11}(\theta, p)]_i,$$

$$\varphi_i = \sin\theta \operatorname{ch}\nu_i, \quad \varphi_i^0 = \varphi_i(\theta_o),$$

$$\beta_i(\theta) = -\operatorname{arctg} \frac{\cos\theta U_{p-1}(\varphi_i)}{\operatorname{ch}\nu_i P_p(\varphi_i) + \sin\theta \operatorname{sh}^2\nu_i U_{p-1}(\varphi_i)} = -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\operatorname{sh}^2\nu_i + \operatorname{ch}^2\nu_i \frac{P_p(\varphi_i)}{\varphi_i U_{p-1}(\varphi_i)}}. \quad (37)$$

Jak wiadomo, w praktyce spełniony jest warunek $|p_{21}|_i^2 \gg 1$, a zatem parametr $\nu_i(\varphi_i, \varphi_i^0)$ we wzorze (36) można obliczać ze związku:

$$\nu_i(\varphi_i, \varphi_i^0) \cong \ln \frac{\varphi_i U_{p-1}(\varphi_i) + P_p(\varphi_i)}{\varphi_i^0 U_{p-1}(\varphi_i^0) + P_p(\varphi_i^0)}.$$

Jeżeli z kolei przyjąć, iż $\varphi_i^2 = (\sin\theta \operatorname{ch}\nu_i)^2 \gg 1$, to podana zależność przyjmie postać:

$$\nu_i(\varphi_i, \varphi_i^0) \cong \ln \left[1 + p \left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_o} - 1 \right) \right]. \quad (38)$$

Na tej samej podstawie:

$$\beta_i(\theta) \cong -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ch} 2\nu_i}, \quad (39)$$

gdź $P_p(\varphi_i)/\varphi_i U_{p-1}(\varphi_i) \cong 1$ dla $\varphi_i^2 \gg 1$.

Ponieważ, jak już wyżej wspomniano, filtry elektromechaniczne ze sprzęgaczami złożonymi są z reguły superwąskopasmowe, więc w całym pasmie częstotliwości roboczych zachodzi $|\theta - \theta_o| \cong 0$. Po uwzględnieniu tego faktu w (38) otrzymuje się następującą zależność, dogodną dla wyznaczania elementów macierzy $\mathbf{M}_i(\varphi_i, \varphi_i^0)$.

$$\operatorname{sh} \nu_i(\varphi_i, \varphi_i^0) \cong \nu_i(\varphi_i, \varphi_i^0) \cong p \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_o} - 1 \right) \cong p(\theta - \theta_o) \operatorname{ctg} \theta_o. \quad (40)$$

Jak widać, postać (35) jest taka sama jak (20). Dlatego po podstawieniu uzyskanego wyniku do (4), (5) i wprowadzeniu oznaczeń według (25)

(z tą tylko różnicą, że

$$\nu'_i = (-1)^{i+1} \operatorname{Arsh} \{ \operatorname{sh} \nu_i [\sin \theta \operatorname{ch} \nu_i U_{p-1}(\varphi_i) + P_p(\varphi_i)] \}$$

uzyskuje się macierz transmisyjną mechanicznej linii filtrującej ze sprzęgaczami złożonymi, której postać różni się jedynie stałym mnożnikiem od postaci (23), (24). (W danym przypadku stały mnożnik wynosi j^{2kp} lub $j^{p(2k-1)}$). Dyskusja tego wyniku jest podobna do podanej w rozdz. 3 i dlatego wystarczy ograniczyć się do przytoczenia rezultatów końcowych.

Związki będące odpowiednikami wzorów (26) są w danym przypadku następujące:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_i &= [\mathbf{M}_i(\varphi_i, \varphi_i^0) \mathbf{M}_i(\theta_o, p)]^{(-1)^{i+1}}, \\ \nu'_i &= (\nu'_i)_o + \Delta \nu'_i = \\ &= (-1)^{i+1} \left\{ \operatorname{Arsh} [\operatorname{sh} \nu_i \varphi_i^0 U_{p-1}(\varphi_i^0) + \operatorname{sh} \nu_i P_p(\varphi_i^0)] + \ln \left[1 + p \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_o} - 1 \right) \right] \right\} = \\ &= (-1)^{i+1} \left\{ \operatorname{Arsh} [\operatorname{sh} 2\nu_i \sin \theta_o U_{p-1}(\varphi_i^0)] + p \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_o} - 1 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Parametr $\beta_i(\theta)$ jest określony przez (39).

Przy ograniczeniu się do pierwszego przybliżenia korzysta się ze wzorów:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_i &= [\mathbf{M}_i(\theta_o, p)]^{(-1)^{i+1}}, \quad \beta_i(\theta_o) = \beta_i^0 = -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} \theta_o}{\operatorname{ch} 2\nu_i}, \\ \nu'_i &= (\nu'_i)_o \cong (-1)^{i+1} \operatorname{Arsh} [\operatorname{sh} 2\nu_i \sin \theta_o U_{p-1}(\varphi_i^0)] \cong (-1)^{i+1} \operatorname{Arsh} [2 \operatorname{sh} \nu_i P_p(\varphi_i^0)]. \end{aligned}$$

3.2. Analiza przypadku linii filtrującej ze sprzęgaczami kombinowanymi

Z kolei zostanie rozpatrzony przypadek linii filtrującej ze sprzęgaczami kombinowanymi, obejmującymi elementy o długości l oraz $l_s = rl$ (np. $l = \lambda_o/8$, $l_s = \lambda_o/4$, $r = 2$). Macierz transmisyjna $\mathbf{P}_i$ takiego sprzęgacza jest określona przez wzór (6), który obejmuje p macierzy-mnożników $\mathbf{J}(j\theta)$ oraz $u = p-1$ macierzy-mnożników $\mathbf{J}(jr\theta)$. Elementy macierzy $\mathbf{P}_i$ dają się wyznaczyć w sposób analogiczny do przedstawionego w pkt. 3.1; dla skrócenia

wywodów wystarczy wykorzystać wyniki pracy [10], [wzory (11), (15) oraz (16)]; na tej podstawie otrzymuje się:

$$\begin{aligned}(p_{11})_i &= [P_u(\varphi_i) + \varphi_i U_{u-1}(\varphi_i)] \cos \theta - \cos r \theta U_{u-1}(\varphi_i) + \\ &\quad + j \{ [P_u(\varphi_i) + \varphi_i U_{u-1}(\varphi_i)] \operatorname{ch} 2\nu_i \sin \theta + \sin r \theta U_{u-1}(\varphi_i) \}, \\ (p_{21})_i &= j \sin \theta \operatorname{sh} 2\nu_i [P_u(\varphi_i) + \varphi_i U_{u-1}(\varphi_i)], \quad u = p-1, \\ \varphi_i &= \operatorname{ch}^2 \nu_i \cos(1+r)\theta - \operatorname{sh}^2 \nu_i \cos(1-r)\theta = \cos \theta \cos r \theta - \sin \theta \sin r \theta \operatorname{ch} 2\nu_i.\end{aligned}\quad (42)$$

W celu nadania ostatecznym wynikom rozważań identycznej postaci jak w pkt. 3.1 wprowadza się pojęcie macierzy $\mathbf{M}_i(\theta, u)$ o postaci jak w (34), której elementy wynoszą

$$\begin{aligned}[M_{21}(\theta, u)]_i &= [M_{12}(\theta, u)]_i = -j(p_{21})_i = \sin \theta \operatorname{sh} 2\nu_i [P_u(\varphi_i) + \varphi_i U_{u-1}(\varphi_i)], \\ [M_{11}(\theta, u)]_i &= [M_{22}(\theta, u)]_i = |p_{11}|_i = \sqrt{1 + [M_{21}^2(\theta, u)]_i},\end{aligned}$$

a także macierz

$$\mathbf{M}_i(\varphi_i, \varphi_i^0) = \mathbf{M}_i(\theta, u) \mathbf{M}_i^{-1}(\theta_o, u)$$

o postaci podanej w (36). W ten sposób uzyskuje się następującą postać macierzy $\mathbf{P}_i$ równoważną (6):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_i &= j\mathbf{J} \left(j \frac{\beta_i}{2} \right) \mathbf{M}_i(\varphi_i, \varphi_i^0) \mathbf{M}_i(\theta_o, u) \bar{\mathbf{E}} \mathbf{J} \left(j \frac{\beta_i}{2} \right), \\ v_i(\varphi_i, \varphi_i^0) &= \operatorname{Arsh} [M_{21}(\theta, u) M_{11}(\theta_o, u) - M_{21}(\theta_o, u) M_{11}(\theta, u)]_i, \\ \beta_i &= -\operatorname{arctg} \frac{\cos \theta - \cos r \theta \frac{U_{u-1}(\varphi_i)}{P_u(\varphi_i) + U_{u-1}(\varphi_i) \varphi_i}}{\sin \theta \operatorname{ch} 2\nu_i + \sin r \theta \frac{U_{u-1}(\varphi_i)}{P_u(\varphi_i) + U_{u-1}(\varphi_i) \varphi_i}}.\end{aligned}\quad (43)$$

Jeżeli uwzględnić w związkach (43) założenia upraszczające podobne w swej treści do wymienionych w pkt. 3.1. przy wyprowadzaniu zależności (38), (39), to uzyska się:

$$\begin{aligned}v_i(\varphi_i, \varphi_i^0) &\cong \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_o} \cdot \frac{P_u(\varphi_i) + \varphi_i U_{u-1}(\varphi_i)}{P_u(\varphi_i^0) + \varphi_i^0 U_{u-1}(\varphi_i^0)} \cong \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_o} \left[\left(\frac{\sin \theta \sin r \theta}{\sin \theta_o \sin r \theta_o} - 1 \right) u + 1 \right], \\ \beta_i(\theta) &\cong -\operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ch} 2\nu_i} - \frac{\operatorname{ctg} r \theta}{(\sin \theta \operatorname{ch} 2\nu_i)^2} \right).\end{aligned}$$

Jak łatwo sprawdzić, uwzględnienie związków (43) w (4), (5) prowadzi do analogicznej postaci macierzy transmisyjnej linii filtrującej ze sprzęgaczami kombinowanymi jak w (23), (24), przy czym obowiązuje:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}'_i &= [\mathbf{M}_i(\varphi_i, \varphi_i^0) \mathbf{M}_i(\theta_o, u)]^{(-1)^{i+1}}, \\ v'_i &= (v'_i)_o + \Delta v'_i \cong (-1)^{i+1} \operatorname{Arsh} \{ \sin \theta_o \operatorname{sh} 2\nu_i [P_u(\varphi_i^0) + \varphi_i^0 U_{u-1}(\varphi_i^0)] + \\ &\quad + (-1)^{i+1} \ln \left[1 + u \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_o} \cdot \frac{\sin r \theta}{\sin r \theta_o} - 1 \right) \right] \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \theta_o}.\end{aligned}\quad (44)$$

Przybliżony wzór na parametr $\beta_i(\theta)$ jest podany wyżej.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że w oparciu o poczynione założenia uzyskano taką postać macierzy transmisyjnej $\mathbf{T}$ linii filtrującej ze sprzęgaczami złożonymi lub kombinowanymi, która jest podobna do (27). W niej podstawowe zadania macierzy $\mathbf{P}_i$

sprzęgaczy złożonych lub kombinowanych są realizowane przez macierze typu $\mathbf{M}$, których elementy są stałe i niezależne od częstotliwości; macierze te decydują o właściwościach transmisyjnych filtru w pasmie użytkowym. Obok tego występują macierze typu $\mathbf{M}_i(\varphi_i, \varphi_i^0)$ oraz $\mathbf{J}(\Delta\beta_i)$, które reprezentują zależność elementów macierzy $\mathbf{P}_i$ od częstotliwości. W wyniku oddziaływania tych macierzy powstaje nieznaczna deformacja charakterystyki linii w badanym pasmie częstotliwości.

Na tym można zakończyć omawianie teoretycznych podstaw proponowanej metody syntezy filtrów elektromechanicznych za pomocą układów zastępczych o stałych rozłożonych i z kolei przejść do przedstawienia sposobu wykorzystania uzyskanych w rozdz. 2 i 3 rezultatów w praktyce obliczeniowej.

4. SCHEMAT SYNTEZY NIEJEDNORODNEGO TORU FILTRUJĄCEGO O CHARAKTERYSTYCE CZEBYSZEWA I BUTTERWORTHA

Na podstawie dotychczasowych rozważań z uwzględnieniem danych literatury [2], [5], [7], [8], [14], [17], [18], [21] proponuje się następujący podział całokształtu zagadnień związanych z syntezą filtru elektromechanicznego na etapy podstawowe:

1. Obliczenie — na podstawie wymagań — parametrów charakterystycznych funkcji strat filtru.
2. Przeliczenie wyników etapu 1 na parametry charakterystyczne funkcji strat zastępczego toru niejednorodnego.
3. Synteza zastępczego toru niejednorodnego.
4. Przeliczenie parametrów zastępczego toru niejednorodnego na parametry projektowanego filtru elektromechanicznego.
5. Uściślenie wyników.

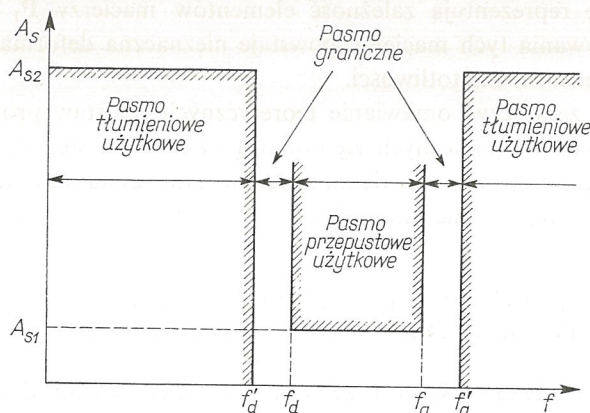
Przytoczona kolejność realizacji poszczególnych etapów syntezy jest zgodna z praktyką obliczeniową, jednakże nie jest ona zbyt dogodna ze względów metodologicznych przy objaśnianiu zasad proponowanej metody syntezy. Z tego powodu ze wspomnianych pięciu etapów zostają utworzone trzy grupy problemowe. Grupa I obejmuje problematykę związaną z realizacją etapu 3; omówieniu jej poświęcony jest niniejszy rozdział. W grupie II zebrano zagadnienia związane z realizacją etapów 1, 2 oraz 4; będą one szczegółowo omówione w rozdz. 5. Problematyka uściślenia wyników tworzy grupę III i zostanie omówiona w rozdz. 6.

Jak wiadomo [4], [7], [14], [15], [17], wymagania dotyczące filtru elektromechanicznego określają:

- a) częstotliwości skrajne pasma przepustowego użytkowego f_d i $f_g(f_d < f_g)$,
- b) częstotliwości skrajne pasma tłumieniowego użytkowego f'_d i $f'_g(f'_d < f'_g)$,
- c) maksymalną wartość tłumienności skutecznej w pasmie przepustowym użytkowym A_{s1} ,
- d) minimalną wartość tłumienności skutecznej w pasmie tłumieniowym użytkowym A_{s2} ,
- e) $R_1 = R_2$, gdzie R_1, R_2 — odpowiednio opór źródła, odbiornika,
- f) żądany kształt charakterystyki tłumieniowej w pasmie przepustowym użytkowym (krzywą aproksymacji).

Na rys. 3 podano niezbędne objaśnienia dotyczące użytych pojęć.

W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że charakterystyka filtru ma być zbliżona do krzywej równofalistej (charakterystyka Czebyszewa) lub do krzywej maksymalnie płaskiej (charakterystyka Butterwortha).



Rys. 3. Wymagania dotyczące filtru elektromechanicznego

Na podstawie powyższych warunków należy wyznaczyć parametry h , S oraz n , jednoznacznie określające funkcję strat zastępczego toru filtrującego według (8), (9). W tym celu wykorzystuje się odpowiednie wskazówki rozdz. 5. Z kolei przystępuje się do syntezy zastępczego toru niejednorodnego zgodnie z poniższym schematem postępowania.

Synteza zastępczego toru filtrującego (schemat ogólny)

Kolejność czynności	Nazwa parametru wyznaczanego	Symbol	Wzór (pozycja załącznika 1)
1	2	3	4
1	Parametry zer funkcji transmisji $t_{11}(s)$	σ_i, θ_i	(1.Z1), (2.Z1)
2	Współczynnik skoku oporu falowego, $i = 1$	m'_1	(9.Z1)
3	Stały mnożnik funkcji transmisji	A_1	(3.Z1)
4	Elementy macierzy pomocniczej $R(s)$	$r_{11}(s), r_{21}(s)$	(5.Z1), (6.Z1)
5	Iloczyn współczynników skoku oporu falowego o wskaźniku parzystym		(7.Z1), (8.Z1)
6	Iloczyn współczynników skoku oporu falowego o wskaźniku nieparzystym		(7.Z1), (8.Z1)
7	Lokalne współczynniki odbicia dla $i = 2, \frac{n}{2}$, $\frac{n}{2} + 1, \frac{n+1}{2}$ oraz odpowiednie współczynniki skoku oporu falowego	Γ'_i, m'_i	(10.Z1), (11.Z1) (6.Z1), (12.Z1) (13.Z1)
8	Lokalne współczynniki odbicia o wskaźniku „ i ” nie wymienionym w poprzednich pozycjach	Γ'_i	Stosować metodę macierzy transmisyjnej opisaną w załączniku 2
9	Opory falowe odcinków jednorodnych	Z'_i	(14.Z1), (15.Z1), (16.Z1)

Przedstawiony schemat syntezy ma charakter ogólny i nie uwzględnia możliwości pewnych uproszczeń przy niezbyt dużych liczbach n . Np. jeżeli liczba odcinków jednorodnych $n \leq 12$, to nie ma potrzeby realizować pkt. 4, 8 schematu, gdyż podane w załączniku 1 wzory obliczeniowe są wystarczające do wyznaczenia wszystkich poszukiwanych parametrów m'_i w sposób bezpośredni.

Dla całości obrazu należy zaznaczyć, że synteza zastępczych wąskopasmowych torów filtrujących jest dość pracochłonna i wymaga dokonywania obliczeń z dużą liczbą cyfr znaczących. Geneza tego zjawiska jest następująca.

Ze wzorów podanych w poz. 19 załącznika 1 wynika, że moduł funkcji $sh s$ w zerach funkcji transmisji $s_i = \sigma_i + j\theta_i$ jest proporcjonalny do współczynnika skali S . W przypadku syntezy wąskopasmowego toru filtrującego wartość S jest rzędu 0,01, a tym samym dla praktycznie spotykanych wartości h i n spełniona jest nierówność $|sh s_i| \ll 1$. Stąd dla wszystkich wskaźników „ i ”: $\sigma_i \cong 0$, $\theta_i \cong 0$, $q_i = e^{\sigma_i} \cong 1$. Biorąc pod uwagę to, iż wartości parametrów I'_i , m'_i zależą przede wszystkim od różnicy między poszczególnymi wielkościami q_i , θ_i dla różnych indeksów i (zob. np. wzory pod poz. 11, 12 w załączniku 1), wszystkie pierwsze cyfry znaczące, występujące dla przykładu w q_i , $\cos \theta_i$ itp. wyrażeniach, które są jednakowe dla wszystkich „ i ”, nie zawierają interesującej dla potrzeb syntezy informacji. Taka informacja jest reprezentowana tylko przez te cyfry, które wskazują na odmienność poszczególnych q_i , θ_i ; oczywiście liczba takich cyfr musi być dostatecznie duża. Dla przykładu można przytoczyć, że przy obliczaniu $q_i = e^{\sigma_i}$ dla $n \cong 10$ należy zapewnić około 6 cyfr znaczących różnych ze zmianą indeksu i .

Omówiony wpływ parametru S na proces obliczeń zer funkcji transmisji powoduje, że posługiwanie się ścisłymi wzorami według poz. 1, 2 w załączniku 1 jest dość uciążliwe i nieprzejryste, szczególnie ze względu na potrzebę kontroli wpływu parametru S na dokładność wyników końcowych. Dlatego zasługuje na uwagę sugestia, aby zera funkcji transmisji obliczać za pomocą wzorów podanych w załączniku 1, poz. 19, które są oparte na rozwinięciu funkcji $Arsh x$, $|x| \ll 1$ w szereg potęgowy, a zostały opracowane na podstawie [6]. W tym przypadku można szybko się zorientować, ile wyrazów z rozwinięcia w szereg należy zatrzymać, aby zapewnić niezbędną dokładność obliczeń końcowych.

5. SYNTEZA MECHANICZNEJ LINII FILTRUJĄCEJ ZA POMOCĄ ZASTĘPCZEGO TORU NIEJEDNORODNEGO

W niniejszym rozdziale przedstawiono zarys syntezy łańcuchowego filtra elektromechanicznego za pomocą zastępczego toru niejednorodnego (a ściślej mówiąc: zastępczej macierzy transmisyjnej) o funkcji strat według (8), (9), który został opracowany na podstawie [4], [5], [8], [12], [14], [17], [18] z uwzględnieniem wyników niniejszej pracy. Przyjmuje się jako założenie podstawowe, że struktura filtru jest zadana, to znaczy wiadome jest, jaki typ sprzęgaczy i rezonatorów będzie użyty.

Z analizy przeprowadzonej w rozdz. 2 i 3 wynika, że w pierwszej kolejności należy znaleźć taką macierz

$$T_z = M'_1 J(jq\theta + j\beta) M'_2 J(jq\theta + j\beta) \dots M'_n J(jq\theta + j\beta) M'_{n+1}, \quad (45)$$

$$M'_i = \begin{cases} M'_{n+2-i}, & \text{jeżeli } n \text{ — liczba parzysta,} \\ M'_{n+2-i}, & \text{jeżeli } n \text{ — liczba nieparzysta,} \end{cases}$$

której elementy czynią zadość związkom (8), (9) (na osi urojonej). W tym celu trzeba ustalić sposób obliczania parametrów S , h , n oraz β ; liczba q jest znana, gdyż wynika z zadanej struktury filtru.

5.1. Obliczanie parametrów charakterystycznych funkcji strat (8), (9)

Wartości parametrów h , S oraz n , niezbędne dla realizacji syntezy zastępczego toru niejednorodnego, są obliczane metodą kolejnych przybliżeń, przy czym w praktyce wystarczy poprzestać na dwu etapach. W trakcie etapu I wyznacza się w oparciu o warunki podane w rozdz. 4 tzw. wstępne wartości omawianych parametrów.

$$h_w = \sqrt{e^{2A_{s1}} - 1}, \quad A_{s1} \text{ — w neperach,}$$

$$S_w = \sin\left(\pi \frac{f_g - f_d}{f_g + f_d}\right),$$

$$n_w \geq \begin{cases} \frac{\text{Arch} \frac{H_w}{h_w}}{\text{Arch} \frac{S'_w}{S_w}} = n'_w \text{ — charakterystyka Czebyszewa,} \\ \frac{\lg \frac{H_w}{h_w}}{\lg \frac{S'_w}{S_w}} = n'_w \text{ — charakterystyka Butterwortha.} \end{cases} \quad (46)$$

Wynik n'_w zaokrągla się w górę do najbliższej liczby całkowitej.

Wielkości H , S' występujące w powyższych wzorach mają następujący sens. H jest minimalnie dopuszczalną wartością modułu funkcji filtracji w pasmie tłumieniowym użytkowym, a S' jest współczynnikiem skali dla pasma przepustowego z uwzględnieniem pasma granicznego. Dla obliczania wstępnej wartości tych parametrów służą poniższe związki.

$$H_w = \sqrt{e^{2A_{s2}} - 1}, \quad A_{s2} \text{ — w neperach,}$$

$$S'_w = \min \left\{ \sin \left(2\pi \frac{f'_d}{f_g + f_d} \right), \left| \sin \left(2\pi \frac{f'_g}{f_g + f_d} \right) \right| \right\}.$$

Indeks „w” wyróżnia wstępną wartość poszukiwanych wielkości.

W trakcie etapu II znajduje się następne przybliżenie, które polega na uwzględnieniu istnienia wielkości $\beta(\theta)$. W obliczeniach uwzględnia się parametr $(\beta_d)_w = \beta[\theta = (\theta_d)_w]$ oraz $(\beta_g)_w = \beta[\theta = (\theta_g)_w]$. Służą do tego związki (14), (29), (39), (43) (w zależności od rodzaju sprzęgacza), w których przyjmuje się następujące wartości zmiennych ν oraz θ :

$$\beta(\theta) = -\operatorname{arctg} \frac{|\sin \theta_o|}{\operatorname{sh} \nu_w} \operatorname{ctg} \theta \quad \text{sprzęgacz prosty,}$$

$$\beta(\theta) = -\operatorname{arctg} \left[\frac{2^{\frac{p-1}{2}} |\sin \theta_o|^p}{\operatorname{sh} \nu_w} \right]^{\frac{2}{p+1}} \operatorname{ctg} \theta \quad \text{sprzęgacz złożony,}$$

$$\beta(\theta) = -\operatorname{arctg} \left[\frac{2^u |\sin^{u+1} \theta_o| |\sin^u r \theta_o|}{\operatorname{sh} \nu_w} \right]^{\frac{1}{u+1}} \operatorname{ctg} \theta \quad \text{sprzęgacz kombinowany,}$$

$$(\theta_d)_w = \frac{\pi}{q} \cdot \frac{f_d}{f_o}, \quad (\theta_g)_w = \frac{\pi}{q} \cdot \frac{f_g}{f_o}, \quad (\theta_o)_w = \frac{\pi}{q}, \quad f_o = \frac{1}{2} (f_g + f_d),$$

$$\nu_w = \begin{cases} \operatorname{Arch} \left[\left(\frac{h}{2S^n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right]_w & \text{— charakterystyka Czebyszewa,} \\ \operatorname{Arch} \left[\left(\frac{h}{2^n S^{n+1}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right]_w & \text{— charakterystyka Butterwortha.} \end{cases} \quad (47)$$

Obok parametru $\beta(\theta)$ uwzględnia się także wpływ macierzy typu $\mathbf{M}(\theta, \theta'_o)$, $\mathbf{M}(\varphi, \varphi^o)$. W tym celu wprowadza się do wzorów służących do obliczania parametrów h , H pewne współczynniki korekcyjne. Wartość tych współczynników jest dobierana na podstawie warunku, aby wymagania dotyczące A_{s1} , A_{s2} zostały spełnione nawet przy niekorzystnym oddziaływaniu wspomnianych macierzy. Ostatecznie po wprowadzeniu odpowiednich poprawek uzyskuje się bardziej dokładne wartości poszukiwanych parametrów.

$$S = \sin \left[\pi \chi_1 \left(\frac{f_g - f_d}{f_g + f_d} + \frac{\beta_g - \beta_d}{2\pi \chi_1} \right) \right], \quad (48)$$

$$S' = \min \left\{ \sin \left[\pi \chi_1 \left(\frac{f'_d}{f_o} + \frac{\beta'_d}{\pi \chi_1} \right) \right], \left| \sin \left[\pi \chi_1 \left(\frac{f'_g}{f_o} + \frac{\beta'_g}{\pi \chi_1} \right) \right] \right| \right\},$$

gdzie

$$\beta = \beta(\theta, \nu_w), \quad \theta = \chi_1 \cdot \frac{\pi}{q} \cdot \frac{f}{f_o}, \quad \chi_1 = 1 - \frac{(\beta_d)_w + (\beta_g)_w}{2\pi},$$

przy czym indeksy parametru β są zgodne ze znakowaniem częstotliwości, podanym w wymaganiach (rozdz. 4).

$$h = \chi_2 h_w = \begin{cases} \frac{h_w^2}{2S^{n_w}} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch} \nu_{\max})^{n_w+1}} & \text{— charakterystyka Czebyszewa,} \\ \frac{h_w^2}{(2S)^{n_w}} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch} \nu_{\max})^{n_w+1}} & \text{— charakterystyka Butterwortha,} \end{cases} \quad (49)$$

$$H = \chi_3 H_w = \begin{cases} \frac{H_w h_w}{2S^{n_w}} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch} \nu_{\min})^{n_w+1}} & \text{— charakterystyka Czebyszewa,} \\ \frac{H_w h_w}{(2S)^{n_w}} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch} \nu_{\min})^{n_w+1}} & \text{— charakterystyka Butterwortha,} \end{cases} \quad (50)$$

przy czym

$$v_{\max} = \max\{v_d, v_w, v_g\}, \quad v_{\min} = \min\{v_d, v_w, v_g\},$$

gdzie

$$v_d = v_w + \Delta v(\theta_d), \quad v_g = v_w + \Delta v(\theta_g),$$

zaś v_w oblicza się na podstawie (47), a $\Delta v(\theta)$ — za pomocą (26), (41) lub (44) (w zależności od rodzaju sprzęgacza) z uwzględnieniem θ według (48).

Po obliczeniu parametrów S , S' , h oraz H za pomocą związków (48)÷(50) przystępuje się do sprawdzenia wystarczalności poprzednio ustalonej liczby odcinków jednorodnych n ; w tym celu ponownie wykorzystuje się zależność (46). Jeżeli uzyskany wynik nie będzie się różnił od n_w , to można przejść do następnego etapu syntezy, wykorzystując w tym celu poprawione wartości parametrów charakterystycznych funkcji strat toru zastępczego. W przeciwnym razie trzeba powtórzyć opisany cykl obliczeń.

5.2. Obliczanie parametrów mechanicznej linii filtrującej

1. Wyniki punktu 5.1 służą za podstawę syntezy zastępczego toru filtrującego zgodnie z wytycznymi rozdz. 4. W wyniku obliczeń zostają wyznaczone parametry $(v'_i)_z$, $i = 1, 2, \dots, n+1$.

Przystępując do przeliczania parametrów toru zastępczego na parametry mechanicznej linii filtrującej należy wskazać na istnienie dwu podstawowych wariantów realizacji, które w dalszych rozważaniach są oznaczone symbolami A i B. Wariant A dotyczy syntezy filtru elektromechanicznego przy założeniu, że we wszystkich sprzęgaczach długość najkrótszego odcinka linii jednorodnej jest jednakowa i wynosi l [zob. wzór (6)]. W wariacie B przyjmuje się założenie, że długość wszystkich rezonatorów w linii jest jednakowa i wynosi l_R , a obok tego uwzględnia się założenie wariantu A.

2. Długość najkrótszego odcinka linii jednorodnej w sprzęgaczu wynosi

$$l = \chi_1 \frac{\lambda_o}{2q},$$

gdzie λ_o — długość fali w podanym odcinku linii przy częstotliwości f_o , χ_1 — według (48).

Jeżeli filtr ma być wykonany ze sprzęgaczami kombinowanymi, to długość odcinka jednorodnego występującego między dwoma odcinkami o długości l wynosi

$l_s = rl$, gdzie r — liczba ustalona na etapie wyboru struktury filtru. (Problem ten nie jest w niniejszej pracy omawiany).

3. Wartości parametrów v_i oblicza się ze wzorów (28), (41) lub (44) jako rozwiązanie równania

$$(v'_i)_z = (v'_i)_o = F(v_i, \theta), \quad \theta = \frac{\pi}{q} \chi_1, \quad (51)$$

w którym parametr θ utożsamia się z θ_o lub θ'_o .

W przypadku syntezy filtrów o bardziej szerokich pasmach przepustowych może być celowy taki dobór parametru v_i , aby uzyskać wartość $(v'_i)_o$ równą średniej wartości funkcji

ν'_i według (26), (41) lub (44) w paśmie przepustowym. W tym celu należy określić częstotliwość, dla której funkcja ν'_i przyjmuje wartość równą średniej arytmetycznej jej ekstremów we wspomnianym paśmie, i następnie dla tej częstotliwości (korzystając z równości $\theta = \chi_1 \frac{\pi}{q} \cdot \frac{f}{f_o}$) obliczyć parametr ν_i z równania (51).

4. Długość i -tego rezonatora w przypadku wariantu A jest określona przez zależność:

$$l_{Ri} = q_i l = \frac{\lambda_o}{2} \left[1 - \frac{1}{4\pi} (\beta_d + \beta_g)_i - \frac{1}{4\pi} (\beta_d + \beta_g)_{i+1} \right] \cong \frac{\lambda_o}{2} \left[1 - \frac{1}{2\pi} (\beta_i^0 + \beta_{i+1}^0) \right],$$

gdzie $\beta_d, \beta_g, \beta^0$ są obliczane na podstawie (14), (37), (43) odpowiednio dla $\theta = \chi_1 \cdot \frac{\pi}{q} \cdot \frac{f_d}{f_o}$,

$\chi_1 \cdot \frac{\pi}{q} \cdot \frac{f_g}{f_o}$, $\chi_1 \cdot \frac{\pi}{q}$ z uwzględnieniem wyników pktu 3.

Długość rezonatorów w przypadku wariantu B wynosi

$$l_R = \chi_1 \frac{\lambda_o}{2}.$$

Warto zaznaczyć, że powyższe wzory określają minimalną długość rezonatorów, która jest zbliżona do półfalowej.

5. Wartości oporów falowych rezonatorów i elementów sprzęgających są obliczane na podstawie wyników pktu 3 za pomocą wzorów ogólnych (3) oraz zależności wymienionych w poz. 14, 15 załącznika 1. Należy nadmienić, że zgodnie z (6) opory falowe rezonatorów oraz elementów sprzęgających o parzystym usytuowaniu w sprzęgaczu są sobie równe.

6. Na podstawie wyników pktu 5 wyznacza się wymiary poprzeczne rezonatorów i elementów sprzęgających. Jak wiadomo, zależą one od rodzaju drgań, jakie wykonują poszczególne elementy filtru. Odpowiednie wskazówki można znaleźć w specjalnej literaturze, np. w [17] [18], [19].

7. Z kolei przystępuje się do rozwiązania zagadnienia współpracy linii filtrującej z przetwornikami magnetostrykcyjnymi. W tym celu korzysta się ze wskazówek podanych w [17], [18] i innych publikacjach. Warto jeszcze nadmienić, że skrajne rezonatory zaprojektowanej linii filtrującej wraz z oporami pracy mogą być rozpatrywane jako układy zastępcze przetworników.

6. UWAGI O SPOSOBACH ZWIĘKSZENIA PRZYDATNOŚCI PRZEDSTAWIONEJ METODY SYNTEZY

Metoda syntezy łańcuchowego filtru elektromechanicznego, która została omówiona w rozdz. 5, jest szczególnie przydatna przy projektowaniu układów wąsko- i superwąskopasmowych, gdyż w tym przypadku układ zastępczy reprezentuje z wystarczającą dokładnością właściwości transmisyjne badanego filtru w roboczym paśmie częstotliwości. Inaczej przedstawia się ta sprawa, kiedy stosuje się daną metodę do syntezy filtrów o bardziej

szerokich pasmach przepustowych. (Jako miarę szerokości pasma układu przyjmuje się liczbę $(f_g - f_d)/f_0$). Tu należy się liczyć z coraz większą deformacją charakterystyki układu (w stosunku do charakterystyki toru zastępczego) dla częstotliwości położonych z dala od częstotliwości środkowej pasma przepustowego. Zjawisko to wynika z niedostatecznego uwzględnienia właściwości transmisyjnych sprzęgaczy. Z uwagi na fakt, iż filtry elektromechaniczne szerokopasmowe wykonuje się z reguły ze sprzęgaczami prostymi, w dalszych rozważaniach wystarczy ograniczyć się do tego rodzaju filtrów. W tym przypadku stopień deformacji charakterystyki układu pozostaje w ścisłym związku z elementami macierzy typu $M(2\nu, \theta, \theta'_0)$ [zob. wzór (12)].

W niniejszym rozdziale omówiono pokrótce dwa sposoby zwiększenia przydatności zaproponowanej metody syntezy w odniesieniu do układów o charakterystyce Czebyszewa.

Sposób I polega na uwzględnieniu pewnych poprawek w zerach funkcji transmisji toru zastępczego. Zgodnie z wynikami rozdz. 2 (zob. także [14]) można przyjąć, że charak-

terystyka filtru w roboczym pasmie częstotliwości jest określona przez funkcję $\left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta'_0}\right)^p (t_{21})_z$, gdzie $(t_{21})_z$ — funkcja filtracji toru zastępczego, p — liczba sprzęgaczy. Jeżeli więc nadać funkcji $(t_{21})_z$ przebieg zbliżony do

$$\left(\frac{\sin \theta'_0}{\sin \theta}\right)^p hP_n\left(\frac{\sin q\theta}{S}\right),$$

to charakterystyka filtru w badanym pasmie częstotliwości będzie zbliżona do równofalistej. W tym celu należy uwzględnić obecność mnożnika $C = (\sin \theta'_0 / \sin \theta)^p$. Przyjmując $h \leq 0,5$ i poprzestając na pierwszym przybliżeniu, otrzymuje się następujące rezultaty.

Początkowe obliczenia przebiegają zgodnie z wytycznymi pktu 5.1 oraz poz. 1 schematu syntezy zastępczego toru filtrującego w rozdz. 4. Następnie dla każdego zera s_i , $i = 1, 2, \dots$,

$\frac{n}{2}$ (lub $\frac{n+1}{2}$), funkcji transmisji toru zastępczego wyznacza się mnożnik C_i :

$$C_i = \left\{ \frac{j \sin \theta'_0}{\operatorname{sh} \frac{1}{q} [\sigma_i + j(\pi - \theta_i)]} \right\}^p \cong \left[\frac{\sin \theta'_0}{\sin \frac{\pi - \theta_i}{q}} \right]^p, \quad (52)$$

a na tej podstawie — poprawione wartości parametrów K_i, N_i , służące do obliczania zer funkcji transmisji zgodnie z poz. 1 załącznika 1.

$$\begin{aligned} K'_i &= \frac{1}{2} S^2 \left[\operatorname{ch} \frac{2}{n} \left(\operatorname{Arsh} \frac{1}{h} - \ln |C_i| \right) - \cos \left(\psi_i - \frac{2}{n} \operatorname{Im} \ln C_i \right) \right], \\ N'_i &= \frac{1}{2} S^2 \left[1 - \cos \left(\psi_i - \frac{2}{n} \operatorname{Im} \ln C_i \right) \operatorname{ch} \frac{2}{n} \left(\operatorname{Arsh} \frac{1}{h} - \ln |C_i| \right) \right], \end{aligned} \quad (53)$$

gdzie $\psi_i = \frac{2i-1}{n} \pi$, jeżeli n — liczba parzysta, $\psi_i = \frac{2i-1}{n} \pi$, jeżeli n — liczba nieparzysta.

[Uwaga: Dla $i = 1$ oraz n — liczby nieparzystej przyjmuje się we wzorze (53) $\operatorname{Im} \ln C_i = 0$ niezależnie od wyniku (52)]. Dalsze obliczenia przebiegają zgodnie z wytycznymi rozdz. 4 i 5.

Inne podejście do zagadnienia polega na tym, że w oparciu o wyniki syntezy toru zastępczego tak dobiera się wartości ν_i , aby odpowiadały one pierwiastkom równania

(51) dla $\theta'_d \leq \theta'_o \leq \theta_d$ lub $\theta_g \leq \theta'_o \leq \theta'_g$, w zależności od przewidywanej deformacji charakterystyki filtru. Jednocześnie w razie potrzeby można nieznacznie przesunąć pasmo przepustowe użytkowe wzdłuż osi częstotliwości przez odpowiednią korekcję długości rezonatorów i sprzęgaczy. Opisany sposób znajduje zastosowanie przy syntezie łańcuchowych filtrów elektromechanicznych o dowolnej charakterystyce, jeżeli tylko filtry te zostały obliczone z zachowaniem zasad rozdz. 5.

7. UWAGI KOŃCOWE

W niniejszym artykule poczyniono próbę opracowania odmiennej od dotychczas stosowanej metody syntezy łańcuchowych filtrów elektromechanicznych. Zasadnicza cecha tej metody polega na korzystaniu z układów zastępczych o stałych rozłożonych, co z kolei daje możliwość uwzględnienia znacznego dorobku teorii torów niejednorodnych złożonych z odcinków jednorodnych, a w szczególności teorii syntezy torów filtrujących o charakterystyce równofalistej i maksymalnie płaskiej. Metodyka podejścia do zagadnienia oraz przedstawione wyniki stanowią kontynuację i uogólnienie propozycji wysuniętych w [14].

Podstawy teoretyczne proponowanej metody syntezy są omówione w rozdz. 2 i 3. Za punkt wyjścia rozważań służy pojęcie zastępczej macierzy transmisyjnej sprzęgacza, która z dobrym przybliżeniem opisuje właściwości transmisyjne układu sprzęgającego w roboczym pasmie częstotliwości. Takie podejście umożliwiło wyodrębnić czynniki decydujące o kształcie charakterystyki filtru i podać reguły ich obliczania. Obok tego przeanalizowano czynniki powodujące niezgodność wyników końcowych z wymaganiami. Znajomość tych czynników pozwala oszacować wielkość efektów niepożądanych i w pewnym stopniu zmniejszyć je przez nieznaczną korekcję parametrów falowych rezonatorów i sprzęgaczy.

Proponowana metoda syntezy jest przydatna przede wszystkim przy obliczeniach filtrów wąsko- i superwąskopasmowych, gdyż w tym przypadku wpływ czynników deformujących jest nieznaczący. Należy jednak zaznaczyć, że za pomocą danej metody można również projektować filtry o szerszych pasmach roboczych, co uzyskuje się przez uwzględnienie pewnych poprawek w procesie syntezy.

Obok rozważań teoretycznych praca zawiera konkretne wytyczne postępowania w trakcie syntezy filtru; są one omówione w rozdz. 4, 5 oraz 6. Istotną cechą przedstawionych wyników jest to, iż uzyskano ujednolicenie postępowania przy syntezie filtrów ze sprzęgaczami różnego rodzaju przy dostatecznie ogólnych założeniach dotyczących długości elementów sprzęgających.

Jak wykazuje doświadczenie, synteza filtrów elektromechanicznych wysokiej klasy może być najlepiej realizowana za pomocą maszyn liczących. Niezbędne do tego celu programy opracowuje się w oparciu o wzory obliczeniowe i wytyczne postępowania podane w niniejszej pracy (rozdz. 4÷6 oraz załączniki). Dzięki ujednoliceniu postępowania przy syntezie filtrów różnego rodzaju poszczególne programy obliczeń będą różniły się między sobą w sposób istotny jedynie w części końcowej, w której wyniki obliczeń zależą od struktury filtru.

Na zakończenie należy podkreślić, że przy posługiwaniu się opisaną metodą istnieje możliwość wykorzystania danych katalogowych, np. w [4], bądź opracowania specjalnych katalogów przyspieszających proces obliczeń, jak to ma miejsce przy syntezie filtrów o stałych skupionych.

Załącznik 1

PODSTAWOWE WZORY OBLICZENIOWE UŻYWANE W PROCESIE SYNTETY
NIEJEDNORODNYCH TORÓW FILTRUJĄCYCH O CHARAKTERYSTYCE
CZEBYSZEWA I BUTTERWORTHA

1. Zera $s_i = \sigma_i + j\theta_i$ funkcji transmisji $t_{11}(s)$ toru filtrującego o charakterystyce Czebyszewa według funkcji strat (8), położone w pierwszej ćwiartce płaszczyzny $Y = e^s$, oblicza się ze wzorów (na podstawie [8], [11], [12], [13], [14]):

$$\sigma_i = -\frac{1}{2} \operatorname{Arch}(K_i + \sqrt{K_i^2 - 2N_i + 1}),$$

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos(K_i - \sqrt{K_i^2 - 2N_i + 1}),$$

$$K_i = \frac{1}{2} S^2 \left[\operatorname{ch} \left(\frac{2}{n} \operatorname{Arsh} \frac{1}{h} \right) - \cos \frac{2i-1}{n} \pi \right],$$

$$N_i = \frac{1}{2} S^2 \left[1 - \cos \frac{2i-1}{n} \pi \operatorname{ch} \left(\frac{2}{n} \operatorname{Arsh} \frac{1}{h} \right) \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}, \quad n - \text{liczba parzysta},$$

$$K_i = \frac{1}{2} S^2 \left[\operatorname{ch} \left(\frac{2}{n} \operatorname{Arsh} \frac{1}{h} \right) - \cos 2 \frac{i-1}{n} \pi \right],$$

$$N_i = \frac{1}{2} S^2 \left[1 - \cos 2 \frac{i-1}{n} \pi \operatorname{ch} \left(\frac{2}{n} \operatorname{Arsh} \frac{1}{h} \right) \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}, \quad n - \text{liczba nieparzysta}.$$

2. Zera $s_i = \sigma_i + j\theta_i$ funkcji transmisji $t_{11}(s)$ toru filtrującego o charakterystyce Butterwortha według funkcji strat (9), położone w pierwszej ćwiartce płaszczyzny $Y = e^s$, oblicza się ze wzorów (na podstawie [8], [11], [13], [14]):

$$\sigma_i = -\frac{1}{2} \operatorname{Arch} \left(G_o^{-\frac{2}{n}} + \sqrt{G_o^{-\frac{4}{n}} + 2G_o^{-\frac{2}{n}} \cos \frac{2i-1}{n} \pi + 1} \right),$$

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \left(G_o^{-\frac{2}{n}} - \sqrt{G_o^{-\frac{4}{n}} + 2G_o^{-\frac{2}{n}} \cos \frac{2i-1}{n} \pi + 1} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}, \quad n - \text{liczba parzysta},$$

$$\sigma_i = -\frac{1}{2} \operatorname{Arch} \left(G_o^{-\frac{2}{n}} + \sqrt{G_o^{-\frac{4}{n}} + 2G_o^{-\frac{2}{n}} \cos 2 \frac{i-1}{n} \pi + 1} \right),$$

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \left(G_o^{-\frac{2}{n}} - \sqrt{G_o^{-\frac{4}{n}} + 2G_o^{-\frac{2}{n}} \cos 2 \frac{i-1}{n} \pi + 1} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}, \quad n - \text{liczba nieparzysta},$$

$$G_o = \frac{h}{S^n}.$$

$$3. t_{11}(s) = A_1 e^{-ns} \prod_{i=1}^{n/2} (e^{2s} - e^{2s_i}) [e^{2s} - (e^{2s_i})^*],$$

$$t_{11}(s) = A_1 e^{-ns} (e^{2s} - e^{2s_1}) \prod_{i=2}^{\frac{n+1}{2}} (e^{2s} - e^{2s_i}) [e^{2s} - (e^{2s_i})^*].$$

Symbol * wskazuje na wartość sprzężoną.

Charakterystyka Czebyszewa

$$A_1 = \begin{cases} \frac{h}{2S^n} \prod_{i=1}^{n/2} \frac{1}{\varrho_i^2} & n - \text{liczba parzysta}, \\ \frac{h}{2S^n} \frac{1}{\varrho_1} \prod_{i=2}^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\varrho_i^2} & n - \text{liczba nieparzysta}. \end{cases}$$

Charakterystyka Butterwortha

$$A_1 = \begin{cases} \frac{G_o}{2^n} \prod_{i=1}^{n/2} \frac{1}{\varrho_i^2} & n - \text{liczba parzysta} \\ \frac{G_o}{2^n} \frac{1}{\varrho_1} \prod_{i=2}^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\varrho_i^2} & n - \text{liczba nieparzysta} \end{cases}$$

$$\varrho = e^{\sigma t_i}.$$

4. Macierz transmisyjna toru filtrującego według (8), (9) ma postać [4], [5], [9]:

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{bmatrix} t_{11}(s) & -t_{21}(s) \\ t_{21}(s) & t_{22}(s) \end{bmatrix} = M'_1 J(s) M'_2 \dots M'_q J(s) M_q'^{-1} \dots M_2'^{-1} J(s) M_1'^{-1} = \\ &= R^{-1}(-s) J(s) R(s), \quad q = \frac{n+1}{2}, \quad n - \text{liczba nieparzysta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{bmatrix} t_{11}(s) & t_{21}(s) \\ t_{21}(s) & t_{22}(s) \end{bmatrix} = M'_1 J(s) M'_2 \dots J(s) M_q^0 M_q^0 J(s) \dots M_2' J(s) M_1' = \\ &= R_t(s) R(s), \quad q = \frac{n}{2}, \quad n - \text{liczba parzysta}, \quad M_q^0 M_q^0 = M_q'. \end{aligned}$$

Macierz $R_t(s)$ jest macierzą transponowaną względem macierzy $R(s)$.

$$t_{21}(s) = \begin{cases} j^n h P_n \left(\frac{\text{sh } s}{jS} \right) = j^n h \text{ch} \left(n \text{Arch} \frac{\text{sh } s}{jS} \right) & \text{— charakterystyka Czebyszewa,} \\ \frac{h}{S^n} \text{sh}^n s = G_o \text{sh}^n s & \text{— charakterystyka Butterwortha.} \end{cases}$$

5. Macierz pomocnicza $R(s)$ wynosi (na podstawie [8], [9], [11], [12], [16])

$$R(s) = \begin{bmatrix} r_{11}(s) & r_{12}(s) \\ r_{21}(s) & r_{22}(s) \end{bmatrix} = M_q'^{-1} J(s) M_{q-1}'^{-1} \dots M_2'^{-1} J(s) M_1'^{-1}, \quad q = \frac{n+1}{2},$$

$$R(s) = M_q^0 J(s) M_{q-1}' J(s) \dots M_2' J(s) M_1', \quad q = n/2,$$

n — liczba nieparzysta;

$$r_{11}(s) = \frac{\sqrt{A_1}}{2} e^{-\frac{n+1}{2}s} \left[(e^s - \varrho_1) \prod_{i=2}^{\frac{n+1}{2}} (e^{2s} + (-1)^i 2\varrho_i \cos \theta_i e^s + \varrho_i^2) + \right. \\ \left. + (e^s + \varrho_1) \prod_{i=2}^{\frac{n+1}{2}} (e^{2s} - (-1)^i 2\varrho_i \cos \theta_i e^s + \varrho_i^2) \right],$$

$$r_{21}(s) = \frac{\sqrt{A_1}}{2} e^{-\frac{n-1}{2}s} \left[(e^s - \varrho_1) \prod_{i=2}^{\frac{n+1}{2}} (e^{2s} + (-1)^i 2\varrho_i \cos \theta_i e^s + \varrho_i^2) + \right. \\ \left. - (e^s + \varrho_1) \prod_{i=2}^{\frac{n+1}{2}} (e^{2s} - (-1)^i 2\varrho_i \cos \theta_i e^s + \varrho_i^2) \right],$$

n — liczba parzysta;

$$r_{11}(s) = \frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}s} \left[A_1' \prod_{i=1}^{n/2} (e^{2s} - \varrho_i^2 e^{(-1)^{i+1}j2\theta_i}) + A_1'^* \prod_{i=1}^{n/2} (e^{2s} - \varrho_i^2 e^{(-1)^{i+1}j2\theta_i}) \right],$$

$$r_{21}(s) = \frac{1}{2j} e^{-\frac{n}{2}s} \left[A_1' \prod_{i=1}^{n/2} (e^{2s} - \varrho_i^2 e^{(-1)^{i+1}j2\theta_i}) - A_1'^* \prod_{i=1}^{n/2} (e^{2s} - \varrho_i^2 e^{(-1)^{i+1}j2\theta_i}) \right],$$

$$A_1' = \sqrt{\frac{A_1}{1 + \left(\Gamma_{\frac{n}{2}+1}^0\right)^2}} \left(1 + j\Gamma_{\frac{n}{2}+1}^0\right), \quad \Gamma_{\frac{n}{2}+1}^0 = \frac{1 - \sqrt{m_{\frac{n}{2}+1}'}}{1 + \sqrt{m_{\frac{n}{2}+1}'}}$$

$$6. m_{\frac{n}{2}+1}' = \left\{ \operatorname{tg}^2 \left[\sum_{i=1}^{n/2} (-1)^{i+1} \theta_i \right] \right\} (-1)^{\frac{n}{2}}$$

$$7. \prod_{i=1}^q m_{2i}'^2 = D_1 D_2, \quad \prod_{i=1}^v m_{2i-1}'^2 = \frac{D_2}{D_1}, \quad n \text{ — liczba nieparzysta,}$$

$$q = \begin{cases} \frac{n+1}{4} \\ \frac{n-1}{4} \end{cases}; \quad v = \begin{cases} \frac{n+1}{4}, & \text{jeżeli } \frac{n+1}{2} \text{ — liczba parzysta,} \\ \frac{n+3}{4}, & \text{jeżeli } \frac{n+1}{2} \text{ — liczba nieparzysta,} \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{cases} \sqrt{1 + \left[h \operatorname{ch} \left(n \operatorname{Arch} \frac{1}{S} \right) \right]^2} + h \operatorname{ch} \left(n \operatorname{Arch} \frac{1}{S} \right) & \text{— charakterystyka Czebyszewa,} \\ G_o + \sqrt{1 + G_o^2} & \text{— charakterystyka Butterwortha,} \end{cases}$$

$$D_2 = \frac{1-q_1}{1+q_1} \prod_{i=2}^{\frac{n+1}{2}} \frac{1+(-1)^i 2q_i \cos \theta_i + q_i^2}{1-(-1)^i 2q_i \cos \theta_i + q_i^2},$$

U w a g a. Wzory podano na podstawie [8], [14]).

$$\left. \begin{aligned} 8. \prod_{i=1}^{n/2} m'_{2i} &= \frac{\sqrt{1+h^2} - (-1)^{\frac{n}{2}} h}{\sqrt{1 + \left[h \operatorname{ch} \left(n \operatorname{Arch} \frac{1}{S} \right) \right]^2} - h \operatorname{ch} \left(n \operatorname{Arch} \frac{1}{S} \right)} \\ \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}+1} m'_{2i-1} &= \frac{\sqrt{1+h^2} - (-1)^{\frac{n}{2}} h}{\sqrt{1 + \left[h \operatorname{ch} \left(n \operatorname{Arch} \frac{1}{S} \right) \right]^2} + h \operatorname{ch} \left(n \operatorname{Arch} \frac{1}{S} \right)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} n - \text{liczba parzysta} \\ \text{charakterystyk Czebyszewa,} \end{array}$$

$$\prod_{i=1}^{n/2} m'_{2i} = \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}+1} \frac{1}{m'_{2i-1}} = G_o + \sqrt{1+G_o^2} : n - \text{liczba parzysta, charakterystyka Butterwortha,}$$

przy czym dodatkowo zachodzi warunek antymetrii $m'_i = m'_{n+2-i}$

U w a g a. Wzory podano na podstawie [8], [14]).

$$9. m'_1 = \begin{cases} -\operatorname{th} \left(\sum_{i=1}^{n/2} \sigma_i \right) \\ -\operatorname{th} \left(\frac{1}{2} \sigma_1 + \prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} \sigma_i \right). \end{cases}$$

$$10. \Gamma'_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m'_1} - m'_1 \right) \sum_{i=1}^{n/2} \operatorname{sh} 2\sigma_i \cos 2\theta_i, \quad n - \text{liczba parzysta,}$$

$$\Gamma'_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m'_1} - m'_1 \right) \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\sigma_1 + \sum_{i=2}^{\frac{n+1}{2}} \operatorname{sh} 2\sigma_i \cos 2\theta_i \right], \quad n - \text{liczba nieparzysta.}$$

$$11. \Gamma'_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{m'_{\frac{n}{2}+1}}} + \sqrt{m'_{\frac{n}{2}+1}} \right) \sum_{i=2}^{n/2} (-1)^i q_i^2 \sin 2\theta_i, \quad n - \text{liczba parzysta.}$$

$$12. \Gamma'_{\frac{n}{2}+1} = q_1 + 2 \sum_{i=2}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{i-1} q_i \cos \theta_i, \quad n - \text{liczba nieparzysta.}$$

$$13. m'_i = \frac{1 - \Gamma'_i}{1 + \Gamma'_i}, \quad \Gamma'_i = \frac{1 - m'_i}{1 + m'_i}.$$

$$14. Z'_i = R_1 \prod_{k=1}^i \frac{1}{m'_k}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}, \quad n - \text{liczba parzysta,}$$

$$Z'_{n+1-i} = \frac{R_1 R'_2}{Z'_1},$$

$$R'_2 = \begin{cases} R_1 & \text{--- charakterystyka Butterwortha,} \\ \frac{R_1}{\left[\sqrt{1+h^2} - (-1)^{\frac{n}{2}} h\right]^2} & \text{--- charakterystyka Czebyszewa.} \end{cases}$$

U w a g a. R'_2 jest oporem obciążenia zastępczego toru filtrującego (na wyjściu). Jednocześnie przyjmuje się, że opór źródła w przypadku filtru elektromechanicznego i zastępczego toru filtrującego jest jednakowy i wynosi R_1 .

$$15. Z'_i = R_1 \prod_{k=1}^i \frac{1}{m'_k}, \quad Z'_{n+1-i} = Z'_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}, \quad n - \text{liczba nieparzysta.}$$

$$16. Z'_{\frac{n}{2}} = \sqrt{m'_{\frac{n}{2}+1} R_1 R'_2}, \quad Z'_{\frac{n}{2}+1} = \sqrt{\frac{R_1 R'_2}{m'_{\frac{n}{2}+1}}}, \quad n - \text{liczba parzysta,}$$

$$Z'_{\frac{n+1}{2}} = \frac{R_1}{D_2}, \quad D_2 - \text{według poz. 7, } n - \text{liczba nieparzysta.}$$

$$17. A_1 = \prod_{i=1}^{n+1} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{m'_i} \right).$$

$$18. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Z'_i}{\sqrt{R_1 R'_2}} + \frac{\sqrt{R_1 R'_2}}{Z'_i} \right) = -2 \sum_{i=1}^{n/2} \frac{\operatorname{sh} 2\sigma_i}{\operatorname{ch} 2\sigma_i - \cos 2\theta_i} \quad n - \text{liczba parzysta,}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Z'_i}{\sqrt{R_1 R'_2}} + \frac{\sqrt{R_1 R'_2}}{Z'_i} \right) = - \left[\frac{\operatorname{ch} \sigma_1}{\operatorname{sh} \sigma_1} + 2 \sum_{i=2}^{\frac{n+1}{2}} \frac{\operatorname{sh} 2\sigma_i}{\operatorname{ch} 2\sigma_i - \cos 2\theta_i} \right], \quad n - \text{liczba nieparzysta.}$$

Przy korzystaniu z powyższych wzorów należy jednocześnie uwzględnić związki ogólne przytoczone w poz. 14 i 15.

19. Dla $s_i = \sigma_i + j\theta_i$ według poz. 1 i 2 zachodzi:

Charakterystyka Czebyszewa

n — liczba nieparzysta

$$\operatorname{sh}(\sigma_i + j\theta_i) = -\sqrt{K_i} e^{-j\beta_i} = -S \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \left(\frac{2}{n} \operatorname{Arsh} \frac{1}{h} \right) - \cos 2 \frac{i-1}{n} \pi}{2}} e^{-j\beta_i},$$

$$\beta_i = \arctg \left[\operatorname{cth} \left(\frac{1}{n} \operatorname{Arsh} \frac{1}{h} \right) \operatorname{tg} \frac{i-1}{n} \pi \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}.$$

n — liczba parzysta

$$\operatorname{sh}(\sigma_i + j\theta_i) = -\sqrt{K_i} e^{-j\beta_i} = -S \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \left(\frac{2}{n} \operatorname{Arsh} \frac{1}{h} \right) - \cos \frac{2i-1}{n} \pi}{2}} e^{-j\beta_i},$$

$$\beta_i = \arctg \left[\operatorname{cth} \left(\frac{1}{n} \operatorname{Arsh} \frac{1}{h} \right) \operatorname{tg} \frac{2i-1}{2n} \pi \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}.$$

Charakterystyka Butterwortha

$$\text{sh}(\sigma_i + j\theta_i) = \begin{cases} -\frac{S}{\sqrt[n]{h}} e^{j\frac{1-i}{n}\pi}, & i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}, \\ -\frac{S}{\sqrt[n]{h}} e^{j\frac{1-2i}{2n}\pi}, & i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Stąd przy spełnieniu nierówności $|\text{sh}(\sigma_i + j\theta_i)| \ll 1$ słuszne są następujące wzory (na podstawie [6]).

Charakterystyka Czebyszewa

$$-\sigma_i = K_i^2 \cos \beta_i + \frac{1}{6} K_i^3 \cos 3\beta_i + \frac{3}{40} K_i^5 \cos 5\beta_i + \dots,$$

$$\theta_i = K_i^2 \sin \beta_i + \frac{1}{6} K_i^3 \sin 3\beta_i + \frac{3}{40} K_i^5 \sin 5\beta_i + \dots$$

Charakterystyka Butterwortha

n — liczba nieparzysta

$$-\sigma_i = \frac{S}{h^{\frac{1}{n}}} \cos \frac{i-1}{n} \pi + \frac{1}{6} \cdot \frac{S^3}{h^{\frac{3}{n}}} \cos 3 \frac{i-1}{n} \pi + \frac{3}{40} \cdot \frac{S^5}{h^{\frac{5}{n}}} \cos 5 \frac{i-1}{n} \pi + \dots,$$

$$\theta_i = \frac{S}{h^{\frac{1}{n}}} \sin \frac{i-1}{n} \pi + \frac{1}{6} \cdot \frac{S^3}{h^{\frac{3}{n}}} \sin 3 \frac{i-1}{n} \pi + \frac{3}{40} \cdot \frac{S^5}{h^{\frac{5}{n}}} \sin 5 \frac{i-1}{n} \pi + \dots,$$

n — liczba parzysta

$$-\sigma_i = \frac{S}{h^{\frac{1}{n}}} \cos \frac{2i-1}{2n} \pi + \frac{1}{6} \cdot \frac{S^3}{h^{\frac{3}{n}}} \cos 3 \frac{2i-1}{2n} \pi + \frac{3}{40} \cdot \frac{S^5}{h^{\frac{5}{n}}} \cos 5 \frac{2i-1}{2n} \pi + \dots,$$

$$\theta_i = \frac{S}{h^{\frac{1}{n}}} \sin \frac{2i-1}{2n} \pi + \frac{1}{6} \cdot \frac{S^3}{h^{\frac{3}{n}}} \sin 3 \frac{2i-1}{2n} \pi + \frac{3}{40} \cdot \frac{S^5}{h^{\frac{5}{n}}} \sin 5 \frac{2i-1}{2n} \pi + \dots$$

Załącznik 2

METODA MACIERZY TRANSMISYJNEJ SYNTEZY TORU NIEJEDNORODNEGO ZŁOŻONEGO Z BEZSTRATNYCH ODCINKÓW JEDNORODNYCH O JEDNAKOWEJ DŁUGOŚCI

Metoda macierzy transmisyjnej syntezy toru niejednorodnego została po raz pierwszy zaproponowana i omówiona w [8], [11], [12]. Za punkt wyjścia tej metody służy unormowana macierz transmisyjna $T(s)$ toru niejednorodnego, którego parametry mają być wyznaczone, a jej istota polega na kolejnym wydzielaniu macierzy-mnożników typu M i $J(s)$ z macierzy $T(s)$.

Niech dana będzie unormowana macierz transmisyjna $T(s)$ toru niejednorodnego złożonego z bezstratnych odcinków jednorodnych o jednakowej długości. Wiadomo, że macierz ta jest iloczynem macierzy typu M i $J(s)$:

$$T(s) = M_1 J(s) M_2 \dots M_n J(s) M_{n+1}.$$

Macierz

$$T'(s) = M_2 J(s) M_3 \dots M_n J(s) M_{n+1} = J^{-1}(s) M_1^{-1} T(s)$$

jest również macierzą transmisyjną pewnego toru niejednorodnego. Między elementami macierzy $T(s)$ a $T'(s)$ zachodzą następujące związki:

$$\begin{aligned} t'_{11}(s) &= e^{-s}[t_{11}(s)\operatorname{ch} \nu_1 - t_{21}(s)\operatorname{sh} \nu_1], \\ t'_{21}(s) &= e^s[t_{21}(s)\operatorname{ch} \nu_1 - t_{11}(s)\operatorname{sh} \nu_1]. \end{aligned} \quad (1.Z2)$$

Maksymalna wartość modułu wykładnika potęgowego w wielomianach wykładniczych $t_{11}(s), t_{21}(s)$ wynosi n [gdzie n — liczba macierzy-mnożników typu $J(s)$], natomiast w $t'_{11}(s), t'_{21}(s)$: $n-1$. Stąd wniosek, że we wzorze (1.Z2) współczynniki przy wyrazach o module wykładnika potęgowego wyższym niż $n-1$ muszą być równe zeru, czyli obowiązują równości:

$$a_{-n}\operatorname{ch} \nu_1 - b_{-n}\operatorname{sh} \nu_1 = 0, \quad b_n\operatorname{ch} \nu_1 - a_n\operatorname{sh} \nu_1 = 0,$$

gdzie a_n, a_{-n} są współczynnikami wielomianu wykładniczego $t_{11}(s)$ przy wyrazach e^{ns}, e^{-ns} ; to samo dotyczy b_n, b_{-n} w odniesieniu do funkcji $t_{21}(s)$.

Zatem parametr m_1 dowolnego toru niejednorodnego omawianej klasy musi czynić zadość następującym związkom:

$$\frac{1-m_1}{1+m_1} = \Gamma_1 = \frac{a_{-n}}{b_{-n}} = \frac{b_n}{a_n}, \quad (2.Z2)$$

gdzie Γ_1 — lokalny współczynnik odbicia na wejściu toru.

Jak widać z przytoczonego rozumowania, w celu wyznaczenia wartości współczynnika skoku oporu falowego m_1 (od strony źródła) wystarczy skorzystać ze wzoru (2.Z2) i obliczyć lokalny współczynnik odbicia Γ_1 , a następnie

$$m_1 = \frac{1-\Gamma_1}{1+\Gamma_1}, \quad \text{ i w konsekwencji } Z_1 = \frac{R_1}{m_1}. \quad (3.Z2)$$

Jeżeli z kolei wartość parametru m_1 obliczoną za pomocą wzorów (2.Z2), (3.Z2) podstawić do wzoru (1.Z2), to w wyniku otrzyma się funkcję transmisji i funkcję filtracji toru niejednorodnego o macierzy transmisyjnej $T'(s)$. Oczywiście nic nie stoi na przeszkodzie, aby ponownie skorzystać ze wzorów (2.Z2), (3.Z2) i obliczyć na podstawie elementów macierzy $T'(s)$ wartość parametru m_2 . Opisane postępowanie można kontynuować dalej: spełniając na każdym etapie warunek (2.Z2) uzyskuje się w wyniku — wzór (3.Z2) — pewną liczbę dodatnią, którą utożsamia się ze współczynnikiem skoku oporu falowego, a następnie — uwzględniając tę liczbę we wzorze (1.Z2) — otrzymuje się elementy nowej macierzy transmisyjnej; elementy te są niższego stopnia niż stopień wielomianów wykładniczych w macierzy poprzedniej. Można więc twierdzić, że na zakończenie tego procesu, po skończonej liczbie etapów, uzyska się macierz transmisyjną utworzoną z elementów stopnia zerowego (macierz typu M).

W ten sposób schemat postępowania przy korzystaniu z metody macierzy transmisyjnej syntezy toru niejednorodnego jest następujący.

Jeżeli dana jest unormowana macierz transmisyjna $T(s)$ toru niejednorodnego złożonego z bezstratnych odcinków jednorodnych o jednakowej długości, to opory falowe poszczególnych odcinków jednorodnych oblicza się w następującej kolejności:

1. Za pomocą wzorów (2.Z2), (3.Z2) wyznacza się współczynnik skoku oporu falowego na zaciskach wejściowych toru (zgodnie z umową znajdują się one po lewej stronie toru).

2. Za pomocą wzoru (1.Z2) oblicza się elementy nowej macierzy transmisyjnej $T'(s)$; stopień tych elementów jest niższy od stopnia elementów macierzy $T(s)$.

3. Zalecenie 1 należy zastosować wobec elementów macierzy $T'(s)$ i wyznaczyć współczynnik skoku oporu falowego na zaciskach wejściowych toru opisanego przez macierz $T'(s)$. Z kolei powtórzyć zalecenie 2 wobec elementów macierzy $T'(s)$ i wyznaczyć elementy nowej macierzy transmisyjnej $T''(s)$. Ponownie wykonać zalecenie 1 oraz 2 i dalej kontynuować proces obniżania stopnia elementów kolejnych macierzy transmisyjnych, aż uzyska się macierz transmisyjną, której elementy są stopnia zerowego.

4. Opory falowe poszczególnych odcinków jednorodnych oblicza się ze wzorów podanych w załączniku 1, poz. 14÷16.

Należy zauważyć, że przytoczony schemat postępowania dotyczy syntezy toru od wejścia (z lewa na prawo). Jest rzeczą oczywistą, że nie stanowi to warunku koniecznego realizacji i z równym powodzeniem

można przeprowadzić syntezę toru od jego wyjścia (z prawa na lewo). W tym celu rozpatruje się zadaną macierz $T(s)$ oraz macierz $T_1(s)$:

$$T_1(s) = T(s)M_{n+1}^{-1}J^{-1}(s) = M_1J(s)M_2 \dots M_{n-1}J(s)M_n.$$

Elementy macierzy $T_1(s)$ wynoszą:

$$\begin{aligned} [t_{11}(s)]_1 &= e^{-s}[t_{11}(s)\operatorname{ch} \nu_{n+1} - t_{12}(s)\operatorname{sh} \nu_{n+1}], \\ [t_{21}(s)]_1 &= e^{-s}[t_{21}(s)\operatorname{ch} \nu_{n+1} - t_{22}(s)\operatorname{sh} \nu_{n+1}], \\ [t_{22}(s)]_1 &= [t_{11}(-s)]_1, \quad [t_{12}(s)]_1 = [t_{21}(-s)]_1. \end{aligned} \quad (4.Z2)$$

Z warunku, że stopień elementów macierzy $T_1(s)$ ma być niższy od stopnia elementów macierzy $T(s)$, uzyskuje się:

$$a_{-n}\operatorname{ch} \nu_{n+1} - b_n\operatorname{sh} \nu_{n+1} = 0, \quad b_{-n}\operatorname{ch} \nu_{n+1} - a_n\operatorname{sh} \nu_{n+1} = 0,$$

skąd

$$\frac{1-m_{n+1}}{1+m_{n+1}} = \Gamma_{n+1} = \frac{a_{-n}}{b_n} = \frac{b_{-n}}{a_n}; \quad Z_n = R_2 m_{n+1}. \quad (5.Z2)$$

Po obliczeniu wartości parametru m_{n+1} i uwzględnieniu jej we wzorze (4.Z2) otrzymuje się elementy macierzy transmisyjnej $T_1(s)$, co pozwala powtórnie zastosować zabieg określony wzorami (4.Z2), (5.Z2) i kontynuować proces tak długo, póki nie uzyska się macierzy transmisyjnej utworzonej z elementów stopnia zerowego. Widać więc, że sposób postępowania w tym przypadku przebiega analogicznie do poprzednio opisanego i dlatego nie ma potrzeby przytaczania szczegółowych objaśnień.

W praktyce można realizować syntezę toru przy użyciu obu omówionych schematów postępowania jednocześnie. Nie jest to jednak celowe w przypadku macierzy transmisyjnej toru antymetrycznego i symetrycznego.

Warto jeszcze zaznaczyć, że opisana metoda syntezy może być także realizowana przy użyciu macierzy pomocniczej $R(s)$.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. N. Balabanian, Network Synthesis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York 1958.
2. S. Bellert, Zarys teorii syntezy liniowych układów elektrycznych. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1964.
3. I. S. Berezin, N. P. Židkow, Metody wycislenij. T. I, wyd. III, Izd. „Nauka”, Moskwa 1966.
4. A. L. Feldsztejn, L. R. Jawicz, W. P. Smirnow, Sprawocznik po elementam wołnowodnoj tiechniki. Wyd. II, Sowietsoje radio, Moskwa 1967.
5. A. L. Feldsztejn, L. R. Jawicz, Sintiez czetyriechpolusnikow i wosmipolusnikow na SWCz. Izd. „Swiaz”, Moskwa 1965.
6. E. Jahnke, F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Wyd. II, Verlag von B. G. Teubner, Berlin 1933.
7. F. Kamiński, Wybrane zagadnienia filtrów elektromechanicznych, Prace ITR, 6, 2 (19), 19—43, 1962.
8. F. Kamiński, Synteza torów niejednorodnych złożonych z odcinków jednorodnych. Rozprawa doktorska. Instytut Automatyki PAN, Warszawa 1966.
9. F. Kamiński, Cechy charakterystyczne torów niejednorodnych złożonych z odcinków jednorodnych, Przegląd Telekomunikacyjny, 38(32), 8, 225—229, 1966.
10. F. Kamiński, Sintiez szirokopolnosnych elektromiechaniczskich filtrow s regularnoj strukturoj. Tocznoje reszenie. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 15, 2, 1(165)—5(169), 1967.
11. F. Kamiński, Sintiez stupieniczatych pierichodow s bolszim czislom zwienjew, Radiotiehnika i elektronika, 10, 12, 2134—2145, 1965.
12. F. Kamiński, Synteza torów dopasowujących o charakterystyce przenoszenia Czebyszewa, Archiwum Elektrotechniki, 14, 1, 41—70, 1965.

13. F. Kamiński, Swiąż między parametrami nieodnorodnych linii so sdwinitymi po odnoszeniu drug k drugu czastotnymi charakteristikami, *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci techn.*, **13**, 2, 1(185)—6(190), 1965.
14. F. Kamiński, Metoda syntezy filtrów elektromechanicznych za pomocą układów zastępczych o stałych rozłożonych, *Archiwum Elektrotechniki*, **17**, 3, 1968.
15. F. Kamiński, Wybrane aspekty syntezy torów niejednorodnych złożonych z odcinków jednorodnych, o charakterystyce Czebyszewa, *Rozprawy Elektrotechniczne*, **15**, 1, 23—49, 1969.
16. F. Kamiński, O pewnej metodzie obniżania stopnia elementów macierzy transmisyjnej torów niejednorodnych, *Archiwum Elektrotechniki*, **17**, 3, 435—447, 1968.
17. A. K. Łosew, *Teoria i rasczot elektromechaniceskich filtrow*, Izd. „Swiąż”, Moskwa 1965.
18. A. N. Pietrow, W. F. Szmatczenko, *Radiowe filtry elektromechaniczne*, WNT, Warszawa 1964.
19. W. Struszyński, A Theoretical Analysis of the Torsional Electromechanical Filters, *The Marconi Review*, **22**, 134, 119—143, 1959.
20. E. Trzeba, Elektromechanische Vierpole als Kopplungsfilter, *Hochfrequenztechnik und Elektroakustik*, **69**, 3, 108—117, 1960.
21. L. Young, Stepped-Impedance Transformers and Filter Prototypes, *IRE Trans. on Microwaves Theory and Techniques*, **MTT-10**, 5, 339—359, 1962.
22. F. Kamiński, Uwagi o syntezie elektromechanicznych filtrów łańcuchowych o strukturze regularnej *Prace ITR*, **10**, 4(41), 33—46, 1967.

F. KAMIŃSKI

THE SYNTHESIS OF ELECTROMECHANICAL CHAIN FILTERS BY MEANS OF EQUIVALENT CIRCUITS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

Summary

The article presents a new method of the synthesis of electromechanical chain filters on the basis of effective network parameters. His characteristic feature is the utilization of equivalent circuits with distributed parameters. This permits to make use of the unhomogeneous line theory for the electromechanical filter synthesis. The presented results generalize conclusions given in [14].

Theoretical principles of the proposed method is under discussion in detail in section 2 and 3. It is based on the notion of a matrix analogue for the wave transmission matrix of coupling elements and of the whole of the electromechanical filter. These analogues describe transmission properties of filters with a good approximation over the effective frequency bandwidth. In this connection, it is possible to bring to light a sort of factors, which has the decisive influence on filter characteristics. Also other factors which cause a disagreement between the experimental data and the requirements are considered. The knowledge of these factors makes possible to evaluate a quantity of undesirable effects and to decrease it by a small change in wave parameters of resonators and of couplers.

On the basis of the results of the basic analysis discussed above, practical directions for the electromechanical filter synthesis are formulated and given in section 4, 5 and 6. It should be noted, that the synthesis method is common to all filters with different structures and couplers.

The results of this paper, particularly calculating formulas collected in the appendix 1, are suitable for a computer programming, what is of great importance to the synthesis of electromechanical filters with a large number of resonators. These computer programs will differ mainly in a final part depending upon filter structures.

The proposed synthesis method permits to make use of available catalogs or to work out new ones what facilitates and speed up design computations.

This method is especially suitable for a narrow- and supernarrow bandpass filter design, since in this instance the action of the deforming factors mentioned above is very small. However it should be noted that it is possible to design wide bandpass electromechanical filters provided that additional correction factors will be taken into account.

F. KAMIŃSKI

LA SYNTHÈSE DES FILTRES ÉLECTROMÉCANIQUES EN ÉCHELLE À L'AIDE DES SCHÉMAS ÉQUIVALENTS À CONSTANTES RÉPARTIES

Résumé

On a présenté dans l'oeuvre une nouvelle méthode de la synthèse des filtres électromécaniques en échelle, qui se distingue considérablement en comparaison aux méthodes, employées jusqu'ici. La particularité principale de cette méthode consiste à utiliser des schémas équivalents à constantes réparties, ce qui de sa côté donne la possibilité de prendre en considération tout le bagage important de la théorie des circuits irréguliers composés des segments réguliers, et, en particulier, celui de la théorie de la synthèse des circuits filtrant à caractéristique Tchébycheff, ainsi qu'à celle de Butterworth. Le sujet de l'oeuvre présent constitue la continuation et la généralisation des propositions mises en avant par [14].

Les principes théoriques de la méthode proposée de la synthèse sont présentés dans les chapitres 2 et 3. On a accepté comme le point d'issue des considérations la notion de la matrice de transmission équivalente du connecteur, qui décrit d'une approximation suffisamment exacte les propriétés de transmission du schéma conjuguant dans la bande de fréquences utilisée. Une telle approche au problème a donné la possibilité de déterminer les facteurs ayant une influence décisive sur la forme de la caractéristique du filtre ainsi que de formuler des règles de les calculer. A côté de ci-dessus on a analysé aussi les facteurs, causant le désaccord des résultats finaux obtenus et ceux exigés.

La méthode proposée de la synthèse est singulièrement commode à calculer des filtres à bande étroite et ceux à bande superétroite, car en ce cas l'influence des facteurs déformant n'est pas importante. Il faut cependant remarquer, qu'à l'aide de la méthode donnée on peut aussi projeter des filtres à bandes utilisées plus larges, ce qu'on peut réaliser en considérant de certaines corrections dans le procédé de la synthèse.

A côté des considérations théoriques l'oeuvre contient des directives concrètes concernant la façon d'agir au cours de la synthèse d'un filtre; elles sont présentées dans les chapitres 4, 5 et 6. La valeur essentielle des résultats présentés consiste à l'unification du procédé de la synthèse des filtres avec des connecteurs des différents types (par exemple avec des connecteurs simples, composés ou combinés), ayant des principes suffisamment généraux concernant la longueur des éléments conjuguant.

Le matériel présenté dans l'oeuvre et en particulier les formules de calcul données dans l'annexe N° 1, peut être utilisé à composer les programmes aux calculatrices, ce qui est très important en cas des filtres électromécaniques de haute classe. Grâce à unifier le procédé de la synthèse des filtres de différents types les programmes particuliers se distingueront l'un de l'autre considérablement seulement dans la partie finale, où les résultats des calculs dépendront de la structure du filtre.

Enfin il faut souligner, qu'au cours de se servir de la méthode proposée par l'auteur il existe la possibilité d'utiliser les données de catalogue ou d'élaborer des catalogues spéciaux accélérant le procédé des calculs, comme on a fait déjà dans le domaine de la synthèse des filtres à constantes concentrées.

F. KAMIŃSKI

DIE SYNTHESE VON ELEKTROMECHANISCHEN SIEBKETTEN AUF GRUND ERSATZVIERPOLE MIT VERTEILTEN KONSTANTEN

Zusammenfassung

Es wird ein neues Verfahren der Synthese von elektromechanischen Siebketten mit der Anwendung der Vierpolbetriebsparameter mitgeteilt. Es ist gekennzeichnet, dass Ersatzvierpole mit verteilten Konstanten im Gebrauch sind. Das macht möglich die Synthese von elektromechanischen Filterketten auf Grund der Theorie von Leitungsketten mit homogenen Leitungsstücken zu realisieren. Die vorliegenden Ergebnisse verallgemeinern die Schlussfolgerungen von [14].

Eine theoretische Begründung der geschilderten Methode wird im Kapitel 2 und 3 eingehend dargelegt. Als Ausgangspunkt wird der Begriff einer Ersatzmatrix für die Betriebsparametermatrix (anders: die Welleübertragungsmatrix) von Resonatoren und Kopplern formuliert. Diese Matrizen werden zur Beschreibung der Siebeigenschaften vom elektromechanischen Vierpole im Übertragungsfrequenzband ausgenützt. In diesem Zusammenhang ist es möglich solche Faktoren festzustellen, die einen entscheidenden Einfluss auf die Filterdämpfungskurve ausüben. Ausserdem werden andere Faktoren analysiert, die ein gewisses Missverhältnis zwischen den Versuchsangaben und den bestimmten Bedingungen hervorrufen. Die Kenntnis mit diesen Faktoren ist wichtig, um eine Bewertung des Ausmasses von unerwünschten Effekten machen zu können.

Im Kapitel 4, 5 und 6 sind praktische auf Grund der erwähnten theoretischen Resultaten abgeleiteten Anweisungen gegeben. Es wird nötig hervorzuheben, dass ein Einheitsbehandlung von der Synthese elektromechanischen Filtern mit verschiedenartigen Koplern und Strukturen erarbeitet wird.

Die Ergebnisse dieser Arbeit, besonders die im Beilage 1 gesammelte Berechnungsformeln, kann man zur Erarbeitung einer Programmierung von elektronischen Rechenmaschinen ausnützen, was von Wichtigkeit für die Synthese von elektromechanischen Filtern mit grosser Schwingerzahl. Diese Synthesenprogramme von verschiedenartigen Filtern unterscheiden sich hauptsächlich nur im Endteil, der von Filterstrukturen abhängig ist.

Das geschilderte Synthesenverfahren macht möglich vorhandene Kataloge auszunützen oder neue Kataloge vorzubereiten. Es ist wichtig, um eine Erleichterung und eine Beschleunigung von Berechnungen zu erreichen.

Die vorgeschlagene Methode von der Siebkettensynthese ist besonders für den Entwurf Schmal und Extraschmalbandfilter geeignet, denn die Einwirkung der oben genannten Verzerrungsfaktoren ist in diesem Fall sehr gering. Man soll aber vermerken, dass es auf Grund dieses Verfahren ein Entwurf von Breitbandfiltern zu realisieren möglich ist. Zu diesem Zweck ist es nötig einige Zuschlagsfaktoren in Betracht zu ziehen.

Ф. КАМИНСКИ

СИНТЕЗ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ЦЕПОЧЕЧНЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ ПРОТОТИПОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

Р е з ю м е

В настоящей работе предпринята попытка разработки нового метода синтеза электромеханических цепочечных фильтров (сокр. ЭМЦФ) на основе рабочих параметров четырехполюсника. Характерной чертой предложенного метода является использование прототипов с распределенными постоянными, что, в свою очередь, создает условия для синтеза ЭМЦФ на основе теории ступенчатых линий с чебышевской и максимально гладкой частотной характеристикой. Представленные результаты являются обобщением выводов работы [14]. Подробное изложение теории предложенного метода на русском языке дано в работе: Ф. Камински, Теоретические предпосылки синтеза электромеханических цепочечных фильтров на основе прототипов с распределенными постоянными, Труды ИЭТ ПАН, № 28, Варшава 1968.

Теоретическое обоснование предложенного метода синтеза дано в гл. 2 и 3. Исходной точкой анализа служит понятие матричного аналога волновой матрицы передачи элементов связи и всего фильтра. Эти аналоги описывают с хорошим приближением свойства прототипов ЭМЦФ и его связей в рабочей полосе частот. При таком подходе появилась возможность выявления тех факторов, которые имеют решающее влияние на частотную характеристику фильтра. Кроме них проанализированы другие факторы, которые являются причиной несоответствия данных эксперимента с поставленными требованиями. Знание этих факторов дает основу для оценки величины нежелательных эффектов и некоторого их уменьшения с помощью незначительного изменения волновых параметров резонаторов и связей.

В гл. 4, 5 и 6 даны практические указания по синтезу ЭМЦФ с использованием результатов предыдущих глав. Следует подчеркнуть, что разработан стандартный подход к синтезу ЭМЦФ с различными связками (т. е. с простыми, сложными и комбинированными связками) при достаточно общих предположениях относительно длины элементов связи.

Результаты работы, а особенно вычислительные формулы, собранные в приложении 1, могут быть использованы при разработке программы для электронновычислительных машин, что имеет большое значение в случае синтеза ЭМЦФ высокого класса. Эти программы синтеза ЭМЦФ разного типа будут отличаться между собой главным образом в заключительной части, в которой результаты расчета зависят от структуры ЭМЦФ.

Предложенный метод синтеза дает возможность использования существующих каталогов или разработки новых каталогов для облегчения и ускорения расчетов, как это имеет место при синтезе фильтров высокого класса с сосредоточенными постоянными.

Описанный метод синтеза является особенно удобным при проектировании узко- и сверх-узкополосных фильтров, так как в этом случае влияние упомянутых деформирующих факторов весьма незначительное. Следует однако отметить, что с помощью этого метода можно также синтезировать более широкополосные фильтры; с этой целью необходимо учитывать в процессе синтеза дополнительные поправки.

Powstawanie impulsów fałszywych na wyjściach dekodera licznika

ANDRZEJ SKORUPSKI (WARSZAWA)

Katedra Budowy Maszyn Matematycznych Politechniki Warszawskiej

JAN KOCHMAN (WARSZAWA)

Katedra Urządzeń Teletransmisyjnych i Telegraficznych Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 15.3.1969

W artykule przedstawiono sposób powstawania impulsów fałszywych na wyjściach dekodera licznika oraz podano metody ich likwidacji. Ponadto wyprowadzono warunek wiążący maksymalną liczbę stopni licznika z czasem propagacji przeniesienia i częstotliwością impulsów wejściowych.

1. ZAŁOŻENIA, OZNACZENIA I DEFINICJE

W niniejszej pracy przyjmujemy następujące określenia:

— *Licznikiem* będziemy nazywać automat skończony zmieniający swój stan po podaniu impulsu na jego wejście [1]. Na ogół jest to układ n przerzutników wraz z układem wyliczającym. Układ wyliczający, po podaniu impulsu wejściowego, wpisuje do przerzutników ich nowe stany, tworzące następny stan licznika.

— *Dekoderem stanów licznika* będziemy nazywać układ iloczynów, których argumentami są wyjścia proste bądź zanegowane przerzutników licznika.

— *Czasem propagacji przeniesienia*, t_o , będziemy nazywać czas, jaki upłynie pomiędzy zmianą stanu na wyjściu i -tego przerzutnika i zmianą stanu na wyjściu $(i+1)$ -ego przerzutnika. Czas propagacji przeniesienia wynika z opóźnienia wnoszonego przez układ wyliczający i przerzutnik.

— *Czasem cyklu pracy licznika* będziemy nazywać abstrakcyjny czas automatowy, tj. czas upływający pomiędzy tymi samymi kolejnymi stanami licznika podczas liczenia tედнокierunkowego.

Wyjścia kolejnych przerzutników licznika będziemy oznaczać $A_1, \bar{A}_1; A_2, \bar{A}_2 \dots A_i, \bar{A}_i; \dots A_n, \bar{A}_n$ i nazywać A_i wyjściem prostym, zaś $\bar{A}_i$ wyjściem negowanym.

Kolejne stany licznika odczytujemy za pomocą dekodera w następujący sposób:

Stanowi 0 odpowiada „1” na wyjściu iloczynu dekodera $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \dots \bar{A}_n$, tzn. iloczyn ten będzie spełniony, gdy wszystkie przerzutniki będą w stanie „0”.

Stanowi 1 odpowiada „1” na wyjściu iloczynu dekodera $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \dots \bar{A}_n$.

Stanowi 2 odpowiada „1” na wyjściu iloczynu dekodera $\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \dots \bar{A}_n$ itd., aż do stanu $2^n - 1$, któremu odpowiada „1” na wyjściu iloczynu dekodera $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$.

Dla przejrzystości rozumowania założymy, że:

- kolejnymi stanami licznika są 0, 1, 2, 3, ..., $2^n - 1$, 0, itd.,
- dekodujemy wszystkie możliwe stany licznika,
- zmiana stanów przerzutników jest sygnalizowana na obu ich wyjściach jednocześnie,
- czas narastania i opadania impulsów wyjściowych przerzutnika jest znacznie krótszy od czasu propagacji przeniesienia.

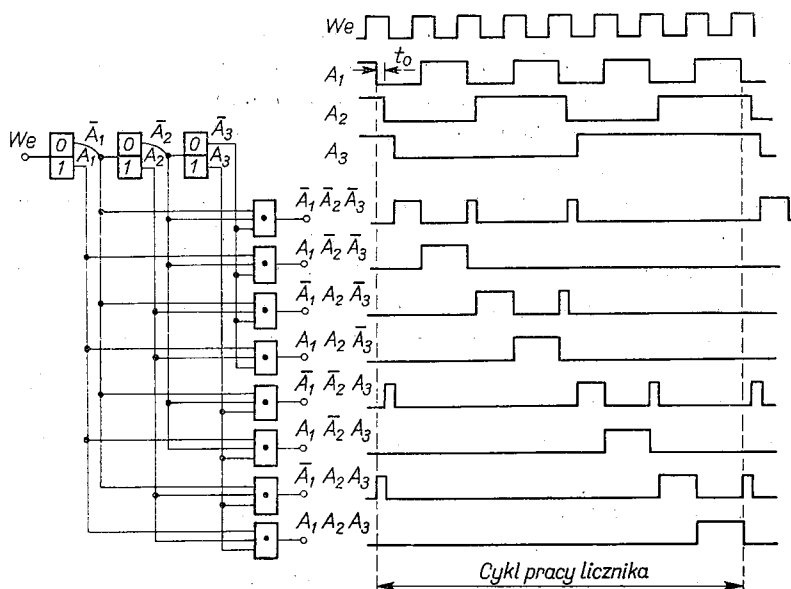
Przykład:

Rozpatrzmy przykładowo pracę i przebiegi czasowe najprostszego 3-stopniowego, szeregowego licznika wraz z 8-wyjściowym dekoderm. W tym przypadku nie ma układu wyliczającego, a stopniami licznika są przerzutniki typu T (trygery), które zmieniają swoje stany pod wpływem dodatniego zbocza impulsu wejściowego, tj. wtedy, gdy (przy założeniu dodatniej konwencji logicznej) przebieg na wejściu zmienia się z „0” na „1”. Aby licznik zmieniał swoje stany wg sekwencji

0 1 2 3 4 5 6 7 0 ...,

drugi i trzeci stopień licznika jest sterowany z wyjść zanegowanych poprzedniego stopnia. Czas propagacji przeniesienia takiego licznika jest równy czasowi opóźnienia przerzutnika.

Z rysunku 1 widać, że na pewnych wyjściach dekodera, na przykład na wyjściu iloczynu $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ dekodującego stanu „0” licznika, niezależnie od impulsu właściwego pojawiają



się impulsy fałszywe — przekłamania. Impulsy te powstają wtedy, gdy więcej niż jeden przerzutnik zmienia swój stan. Dzieje się tak dlatego, że przerzutniki zmieniają swoje stany niejednocześnie.

Na tych wyjściach iloczynów dekodera, na których powstają impulsy fałszywe, ulega także skróceniu szerokość impulsu właściwego — impuls ten jest krótszy niż czas trwania impulsu na wyjściu pierwszego przerzutnika.

2. OGÓLNE WŁASNOŚCI IMPULSÓW FAŁSZYWYCH

Na podstawie przytoczonego przykładu można zauważyć pewną ogólną własność dotyczącą powstawania impulsów fałszywych. Własność tę podamy w postaci lematu słusznego dla powyższego przykładu.

L e m a t 1. Impulsy fałszywe powstają tylko wtedy, gdy w układzie licznika generuje się przeniesienie z pierwszej na dalsze pozycje.

Ogólnie lemat ten można przedstawić w następujący sposób:

L e m a t 2. Impulsy fałszywe powstają tylko wtedy, gdy zmienia swój stan więcej niż jeden przerzutnik [2], [3].

D o w ó d. Rzeczywiście, jeżeli tylko jeden przerzutnik zmienia swój stan, a stany pozostałych przerzutników nie ulegają zmianie, to spośród argumentów iloczynów dekodera zmienia się tylko jeden, spełniając tylko odpowiedni iloczyn. Jeżeli natomiast zmieniają swój stan dwa przerzutniki, to w czasie t_0 , upływającym od momentu zmiany stanu pierwszego przerzutnika do momentu zmiany stanu drugiego przerzutnika, będzie spełniony iloczyn odpowiadający nowemu stanowi pierwszego przerzutnika i poprzedniemu stanowi drugiego przerzutnika. Na wyjściu tego iloczynu będzie to impuls fałszywy.

Wykażemy teraz słusność następującego twierdzenia:

T w i e r d z e n i e 1. Liczba impulsów fałszywych występujących na wyjściu danego iloczynu dekodera w czasie cyklu pracy licznika wynosi $(k-1)$, gdzie k jest liczbą przerzutników zmieniających swój stan podczas przejścia licznika do stanu dekodowanego przez dany iloczyn ze stanu poprzedniego.

D o w ó d. k pierwszych przerzutników zmienia swoje stany podczas przejść licznika ze stanów $A_1 A_2 A_3 \dots A_{k-1} \tilde{A}_k \tilde{A}_{k+1} \dots \tilde{A}_n$ do stanów

$$\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \dots \tilde{A}_{k-1} A_k \tilde{A}_{k+1} \dots \tilde{A}_n,$$

gdzie $\tilde{A}_i$ oznacza bądź A_i , bądź $\tilde{A}_i$.

Zapiszmy iloczyn dekodujący stan $\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \dots \tilde{A}_{k-1} A_k \tilde{A}_{k+1} \dots \tilde{A}_n$ jako

$$(\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \dots \tilde{A}_{k-1} A_k)(\tilde{A}_k \tilde{A}_{k+1} \dots \tilde{A}_n).$$

Zauważmy, że na wyjściach iloczynów dekodujących stany $A_k \tilde{A}_{k+1} \dots \tilde{A}_n$ nie pojawiają się zgodnie z lematem 1 żadne impulsy fałszywe. Wynika to stąd, że do stanów $A_k \tilde{A}_{k+1} \dots \tilde{A}_n$ przechodzi się ze stanów $\tilde{A}_k \tilde{A}_{k+1} \dots \tilde{A}_n$. W czasie tego przejścia tylko jeden przerzutnik zmienia swój stan. Iloczyn dwóch argumentów $(\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \dots \tilde{A}_{k-1} A_k)$ i $(A_k \tilde{A}_{k+1} \dots \tilde{A}_n)$ nie wniesie również impulsu fałszywego. Impuls fałszywy może powstać na wyjściu iloczynu tylko wtedy, gdy jedne argumenty zmieniają się z $0 \rightarrow 1$, a drugie z $1 \rightarrow 0$, co w tym przypadku jest niemożliwe, gdyż oba argumenty zawierają A_k .

Na wyjściu iloczynu $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \dots \bar{A}_{k-1}A_k$ pojawiają się impulsy fałszywe podczas następujących zmian stanów licznika:

- 1 — ze stanu $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4 \dots \bar{A}_{k-1}A_k$ do stanu $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4 \dots \bar{A}_{k-1}A_k$,
- 2 — „ $A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4 \dots \bar{A}_{k-1}A_k$ „ $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4 \dots \bar{A}_{k-1}A_k$,
- i — „ $A_1A_2 \dots A_i\bar{A}_{i+1}\bar{A}_{i+2} \dots \bar{A}_{k-1}A_k$
do stanu $\bar{A}_1\bar{A}_2 \dots \bar{A}_iA_{i+1}\bar{A}_{i+2} \dots \bar{A}_{k-1}A_k$,
- $k-1$ „ $A_1A_2A_3 \dots A_{k-1}\bar{A}_k$ do stanu $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \dots \bar{A}_{k-1}A_k$.

Można sprawdzić, że na tym wyjściu podczas pozostałych możliwych przejść nie powstaną impulsy fałszywe. Zatem wymienione ($k-1$) przypadki obejmują wszystkie sytuacje, w czasie których powstają impulsy fałszywe na wyjściu rozpatrywanego iloczynu.

Przedstawmy teraz inną własność impulsów fałszywych.

Twierdzenie 2. Impulsy fałszywe powstają tylko na wyjściach tych iloczynów dekodera, których argumentem jest wyjście negowane pierwszego przerzutnika (przy założonym sposobie liczenia).

D o w ó d. Z dowodu twierdzenia 1 można zauważyć, że na wyjściach iloczynów dekodera, których argumentem jest wyjście proste pierwszego przerzutnika, nie powstają żadne impulsy fałszywe. Jeżeli natomiast argumentem iloczynu dekodera jest wyjście negowane pierwszego przerzutnika, to iloczyn ten dekoduje stany licznika, które powstały w wyniku zmiany stanu co najmniej dwóch pierwszych przerzutników. Wobec tego na tym wyjściu zgodnie z lematem 1 i twierdzeniem 1 pojawi się co najmniej jeden impuls fałszywy.

Na podstawie twierdzenia 1 i 2 można wykazać słuszność następujących wniosków:

Wniosek 1. Czas pomiędzy końcem i -tego i początkiem $(i+1)$ -ego impulsu fałszywego na danym wyjściu jest równy czasowi trwania „1” na wyjściu $(i+1)$ -ego przerzutnika.

Wniosek ten wynika z faktu, że i -ty impuls fałszywy na wyjściu iloczynu powstaje podczas przejścia do stanu $\bar{A}_1\bar{A}_2 \dots \bar{A}_iA_{i+1}\bar{A}_{i+2} \dots \bar{A}_n$, zaś $(i+1)$ -szy podczas przejścia do stanu $\bar{A}_1\bar{A}_2 \dots \bar{A}_iA_{i+1}A_{i+2} \dots \bar{A}_n$. Czas pomiędzy tymi stanami jest właśnie czasem trwania „1” na wyjściu $(i+1)$ -ego przerzutnika.

Wniosek 2. i -ty impuls fałszywy może zacząć się tylko w momencie zmiany stanu i -tego przerzutnika.

Wniosek ten wynika z tego, że impuls fałszywy powstaje jako iloczyn nowego stanu i -tego przerzutnika i poprzedniego stanu $(i+1)$ -ego przerzutnika. Wobec tego zaczyna się w momencie zmiany i -tego przerzutnika i trwa aż do momentu zmiany $(i+1)$ -ego.

Wniosek 3. Szerokość impulsów fałszywych jest równa czasowi propagacji przeniesienia.

Wniosek ten jest prawdziwy przy spełnionych założeniach o dekodowaniu wszystkich możliwych stanów licznika i pominięciu czasu narastania i opadania impulsów na wyjściach przerzutników. Gdy dekodujemy nie wszystkie stany, to szerokość impulsów fałszywych może być równa wielokrotności czasu propagacji przeniesienia.

Na zakończenie udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. Szerokość impulsu właściwego na wyjściu iloczynu dekodera jest mniejsza od czasu trwania impulsu na wyjściu pierwszego przerzutnika o czas $(k-1)t_0$, gdzie $(k-1)$ jest liczbą impulsów fałszywych na tym wyjściu.

Aby to udowodnić, należy wykazać, że impuls właściwy rozpoczyna się po czasie $(k-1)t_0$ od momentu zmiany stanu pierwszego przerzutnika, zaś kończy się w momencie następnej zmiany stanu pierwszego przerzutnika.

Na podstawie twierdzenia 1 widać, że podczas przejścia licznika do stanu dekodowanego przez dany iloczyn k przerzutników zmienia swój stan, a więc k -ty przerzutnik zmieni swój stan po czasie $(k-1)t_0$ od zmiany stanu pierwszego przerzutnika. Tak więc rzeczywiście impuls właściwy rozpoczyna się o $(k-1)t_0$ później niż zmiana stanu pierwszego przerzutnika. Ponieważ pierwszy przerzutnik zmienia swój stan wcześniej od pozostałych, to następna zmiana jego stanu będzie odpowiadać zakończeniu impulsu właściwego.

3. ZALEŻNOŚĆ DŁUGOŚCI LICZNIKA OD CZASU PROPAGACJI PRZENIESIENIA I CZĘSTOTLIWOŚCI WEJŚCIOWEJ

Poprzednio wykazaliśmy, że szerokość impulsów właściwych na wyjściach iloczynów dekodera, na których pojawiają się impulsy fałszywe, jest mniejsza od czasu trwania impulsu na wyjściu pierwszego przerzutnika. Na podstawie twierdzeń 1, 2 i 3 można zauważyć, że najmniejszą szerokość mają impulsy właściwe na wyjściach iloczynów $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \dots \bar{A}_{n-1}\bar{A}_n$ i $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \dots \bar{A}_{n-1}A_n$. Czas trwania tych impulsów dla okresowego przebiegu wejściowego w okresie T_{wej} wynosi $T_{we} - (n-1)t_0$. Aby dekodowanie było możliwe, trzeba, aby $T_{wej} - (n-1)t_0 > 0$ i stąd

$$T_{wej} > (n-1)t_0 \quad (3.1)$$

lub (co równoważne)

$$f_{wej} < \frac{1}{(n-1)t_0}. \quad (3.2)$$

Z powyższego wynika, że dla danej częstotliwości wejściowej i danego czasu propagacji t_0 maksymalna liczba stopni licznika wynosi

$$n < \frac{T_{wej} + t_0}{t_0}. \quad (3.3)$$

Na przykład dla $t_0 = 0,1 \mu\text{sek}$ i $T_{wej} = 1 \mu\text{sek}$, co odpowiada $f_{wej} = 1 \text{ MHz}$, możemy uzyskać licznik co najwyżej 11-stopniowy, a dla $T_{wej} = 0,2 \mu\text{sek}$ jedynie 3-stopniowy.

Stąd widać, że czas propagacji przeniesienia znacznie ogranicza liczbę stopni licznika lub częstotliwość wejściową. Dlatego też w wielu przypadkach stosuje się liczniki równoległe (jak np. liczniki łańcuchowe — jedno z najszybszych). Liczniki takie w pewnych zastosowaniach nie zapewniają poprawności dekodowania ze względu na pojawienie się impulsów fałszywych.

4. METODA ELIMINACJI IMPULSÓW FAŁSZYWYCH

Opracowana metoda eliminacji impulsów fałszywych polega na podaniu na dodatkową wejścia iloczynów dekodera argumentu w postaci ciągu impulsów o następujących właściwościach:

- w okresach czasu, w których mogą się pojawić impulsy fałszywe, poziom tego dodatkowego ciągu impulsów odpowiada wartości logicznej „0”,
- w pozostałych okresach czasu poziom ciągu odpowiada wartości logicznej 1.

Podanie tego ciągu na dodatkowe wejścia iloczynów dekodera powoduje, że iloczyny te nie będą spełnione w okresach czasu, w których mogą się pojawić impulsy fałszywe. Zgodnie z przeprowadzoną analizą impulsy fałszywe mogą pojawić się w czasie propagacji przeniesienia. Zatem sygnały powodujące zmiany stanów stopni licznika można wykorzystać do sterowania układem generującym pożądaną ciąg impulsów.

Istnieje szereg możliwości rozwiązania generatora wymaganego ciągu impulsów.

Generator impulsów o czasie trwania $n \cdot t_0$, gdzie n jest liczbą stopni licznika, wywołany sygnałem sterującym pierwszy stopień licznika. Rozwiązanie to jest poprawne, gdy czas zadziałania generatora ciągu impulsów jest mniejszy od czasu opóźnienia pierwszego przerzutnika.

W szczególnym przypadku dodatkowym argumentem może być zanegowany przebieg wejściowy licznika, jeżeli spełni on warunki a i b.

Uzyskane w powyższy sposób dodatkowe argumenty skracają czas trwania impulsów właściwych. Minimalne skrócenie można uzyskać stosując układ formujący impuls o czasie trwania t_0 , sterowany zróżniczkowanymi sygnałami sterującymi wszystkimi stopniami licznika.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. N. Wawiłow, G. P. Portnoj, Synteza układów elektronicznych maszyn cyfrowych, WNT, Warszawa 1967.
2. H. J. Gray, Digital Computer Engineering, Prentice — Hall, 1963.
3. K. Bieńkowski, O pewnym sposobie numeracji charakterystyk przejściowych dwustanowych elektrycznych układów logicznych, Arch. Automatyki i Telemekhaniki, 1, 1967.
4. Głuszkow, Synteza cyfrowych automatów, WNT, Warszawa 1968.
5. Patent zgłoszony przez autorów, Sposób eliminacji impulsów fałszywych powstających na wyjściu dekodera licznika i urządzenie do stosowania tego sposobu.

A. SKORUPSKI, J. KOCHMAN

FALSE PULSES ON THE OUTPUTS OF COUNTER DECODER

Summary

The paper deals with the false pulses appearing on the outputs of counter decoder and methods of their elimination. Relation between the number of counter stages, carry propagation time and frequency of input pulses is given.

A. SKORUPSKI, J. KOCHMAN

LA NAISSANCE DE FAUX IMPULSIONS AUX SORTIES D'UN DÉCHIFFREUR DU CALCULATEUR

Résumé

On a montré dans l'oeuvre présent comment de faux impulsions prennent naissance aux sorties d'un déchiffreur du calculateur et on a proposé des méthodes de les liquider. On a déduit une condition liant le nombre maximal des étages du calculateur aux temps de propagation du transport ainsi qu'à la fréquence des impulsions d'entrée.

А. СКОРУПСКИ, Я. КОХМАН

ЛОЖНЫЕ ИМПУЛЬСЫ НА ВЫХОДЕ ДЕШИФРАТОРА СЧЁТЧИКА

Резюме

В настоящей статье выяснен способ возникновения ложных импульсов на выходе дешифратора счётчика и указано как можно их исключить. Авторами выводится зависимость числа ячеек счётчика от времени распространения переноса и частоты входных импульсов.

TREŚĆ

J. Kudrewicz: Matematyczne podstawy metody linearyzacji harmoniczných	587
J. Migdałski: Niektóre zagadnienia analizy i syntezy niezawodnościowej układów elektrycznych	625
J. Kaliński: Stabilizacja poziomu sygnału w mikrofalowych układach pomiarowych metodą podwójnej modulacji	635
L. Referowski: Optymalizacja układu do pomiaru słabych pól magnetycznych metodą kompensacyjną z cewką solenoidalną	655
F. Kamiński: Synteza łańcuchowych filtrów elektromechanicznych za pomocą układów zastępczych o stałych rozłożonych	717
A. Skorupski, J. Kochman: Powstawanie impulsów fałszywych na wyjściach dekodera licznika	751

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

J. Kudrewicz: Mathematical Basis of Describing Function Method	587
Les fondements mathématiques de la méthode de la linéarisation des harmoniques	587
J. Migdałski: On Certain Problems of Reliability Analysis and Synthesis of Electrical Systems Quelques problèmes de l'analyse et synthèse des circuits électriques du point de vue de leur infaillibilité	625
J. Kaliński: Stabilization of Signal Level in Microwave Measuring Set-Ups with the Double Modulation Method	635
La stabilisation du niveau du signal dans les circuits hyperfréquences de mesure d'après la méthode de la modulation à deux reprises	635
L. Referowski: The Optimization of the Circuit for the Measurement of Small Magnetic Fields by the Compensation Method with a Solenoidal Coil	655
L'optimisation du schéma de mesure de petits champs magnétiques d'après la méthode de compensation avec bobine-solénoïde	655
Die Optimalisierung der Schaltung für die Messung kleiner magnetischer Felder nach der Kompensationsmethode mit der solenoidischen Spule	655
F. Kamiński: The Synthesis of Electromechanical Chain Filters by Means of Equivalent Circuits with Distributed Parameters	717
La synthèse des filtres électromécaniques en échelle à l'aide des schémas équivalents à constantes réparties	717
Die Synthese von elektromechanischen Siebketten auf Grund Ersatzvierpole mit verteilten Konstanten	717
A. Skorupski, J. Kochman: False Pulses on the Outputs of Counter Decoder	751
La naissance de faux impulsions aux sorties d'un déchiffreur du calculateur	751

СОДЕРЖАНИЕ

Я. Кудревич: Математические основы метода линеаризации гармоник	587
Я. Мигдальски: Некоторые проблемы анализа и синтеза электрических систем с точками зрения надежности	625

Е. Калиньски: Стабилизация уровня сигнала в измерительных устройствах сверх- высокой частоты по методу двукратной модуляции	635
Л. Рэфэровски: Оптимизация схемы для измерения слабых магнитных полей ком- пенсационным методом с соленоидной катушкой	655
Ф. Каминьски: Синтез электромеханических цепочечных фильтров на основе про- тотипов с распределенными постоянными	717
А. Скорупски, Я. Кохман: Ложные импульсы на выходе дешифратора счётчика	751

W artykule J. Szrednickiego pt. „Mostki RC przestrajane jednym elementem”, zamieszczonym w zeszyte 3/1969, zauważono następujące błędy:

str. 372, rys. 13, jest $r(1 + w) = tr$ ma być $rm(1 + w) = tR$;
str. 380, rys. 20 jest $yR = tR$ ma być $yr = tR$.

Spis treści do rocznika „Rozpraw Elektrotechnicznych” z roku 1969 będzie dołą-
czony do zeszytu 2/1970.